

## مقایسه روش‌های متداول و هوشمند در تخمین پارامتر تابع مفصل به منظور تحلیل فراوانی چندمتغیره جریان کمینه (مطالعه موردی: حوضه آبریز دز)

- فرشاد احمدی<sup>۱</sup>، فریدون رادمنش<sup>۲\*</sup>، غلام‌علی پرهام<sup>۳</sup> و رسول میرعباسی نجف‌آبادی<sup>۴</sup>
۱. دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، دانشکده مهندسی علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز
  ۲. دانشیار گروه مهندسی منابع آب، دانشکده مهندسی علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز
  ۳. استاد گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز
  ۴. استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد

(تاریخ دریافت ۱۳۹۵/۱۱/۰۵؛ تاریخ تصویب ۱۳۹۵/۱۲/۲۵)

### چکیده

در سال‌های اخیر، توجه به ساختار وابستگی موجود در بین متغیرهای هیدرولوژیک افزایش یافته و این امر موجب شده است که تحلیل چندمتغیره به‌عنوان جایگزین مناسبی در مقابل روش‌های تک‌متغیره معرفی شود. در این مطالعه از تابع مفصل برای تحلیل چندمتغیره جریان‌های کمینه حوضه آبریز دز در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار استفاده شد. ابتدا جریان کمینه هفت‌روزه در محل ایستگاه‌های مطالعه‌شده، از داده‌های دبی روزانه رودخانه‌های بختیاری و سزار در دوره آماری ۱۳۳۵-۱۳۹۱ استخراج شد. در مرحله بعد، ۱۱ تابع توزیع احتمالاتی مختلف به داده‌های جریان کمینه برازش داده شد که در این بین توزیع‌های لجستیک (برای ایستگاه تنگ پنج-بختیاری) و مقادیر حدی تعمیم‌یافته (برای ایستگاه تنگ پنج-سزار) به‌عنوان توزیع حاشیه‌ای مناسب انتخاب شدند. پس از انتخاب توزیع حاشیه‌ای، باید پارامتر مفصل تعیین شود. در این مطالعه، از دو روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها (IFM) و الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) استفاده شد. نتایج نشان داد روش PSO عملکرد مناسب‌تری در برآورد پارامتر مفصل داشت. سپس از بین توابع مفصل علی-میخائیل-حق، کلایتون، فرانک، گلامبوس و گامبل-هوگارد، تابع مفصل فرانک با داشتن کمترین خطا و بیشترین دقت برای ایجاد توزیع توأم جفت داده‌های جریان کمینه هفت‌روزه ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار انتخاب و دوره بازگشت‌های توأم در دو حالت «یا» و «و» محاسبه شد.

**کلیدواژگان:** تحلیل فراوانی، توابع مفصل، توزیع‌های حاشیه‌ای، توزیع توأم، دوره بازگشت توأم.

## مقدمه

در هیدرولوژی متغیرهای زیادی به‌عنوان نماینده رفتار سیستم برای مدل‌سازی فرایندها بررسی می‌شوند و مستقل فرض کردن این متغیرها می‌تواند صحت نتایج نهایی مدل‌سازی را با تردید مواجه سازد. از طرفی، در بعضی از مسائل و پدیده‌های هیدرولوژیک، نظیر جریان کمینه و سیلاب چندین متغیر مؤثر بوده و در حالی پدیده بررسی شده را تحت تأثیر قرار می‌دهند که خود این متغیرها با همدیگر وابستگی و همبستگی دارند. تحلیل فراوانی این متغیرها با استفاده از توزیع‌های آماری تک‌متغیره متداول و بررسی نکردن ساختارهای وابستگی، به افزایش عدم قطعیت در برآوردها منجر خواهد شد. بنابراین، دانستن ارتباط بین توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای مختلف به‌منظور درک قوانین حاکم بر این وابستگی‌ها می‌تواند در شناخت وقایع هیدرولوژیکی مشاهده‌شده بسیار مؤثر واقع شود [۱]. بنابراین، به‌منظور افزایش اطمینان به نتایج تحلیل‌ها باید از رویکردهای آماری چندمتغیره استفاده کرد. روش سنتی انجام تحلیل‌های چندمتغیره، استفاده از توابع توزیع چندمتغیره کلاسیک است؛ اما در استفاده از این توابع مشخص بودن توزیع‌های حاشیه‌ای و یکسان بودن نوع آنها الزامی است و در نتیجه استفاده از این روش‌ها با محدودیت‌های جدی مواجه است. روش مناسب‌تر برای تحلیل‌های چندمتغیره که توانسته محدودیت‌های توابع چندمتغیره کلاسیک را برطرف کند، استفاده از روش تابع مفصل<sup>۱</sup> است. روش مفصل، محدودیت‌های یادشده برای توابع توزیع دومتغیره را برطرف کرده و با پیوند دادن توابع توزیع حاشیه‌ای تک‌متغیره، می‌تواند توابع توزیع چندمتغیره را ایجاد کند. همچنین با استفاده از مفصل‌ها می‌توان ساختار وابستگی موجود در بین متغیرهای هیدرولوژیکی را به شکل دقیق‌تری توصیف کرد [۲]. مهم‌ترین مزایای توابع مفصل عبارت‌اند از [۳]:

۱. نیازی به انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای از یک خانواده نیست.
۲. می‌توان از توزیع‌های ناپارامتری در برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای استفاده کرد.
۳. می‌توان ساختار وابستگی و توزیع‌های حاشیه‌ای را به‌صورت مجزا برآورد کرد.

۴. تابع چگالی احتمال توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل می‌تواند به‌صورت جداگانه بررسی شود.

۵. توابع مفصل انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌سازی پدیده‌های هیدرولوژیک دارند و می‌توان با استفاده از یک مفصل معین، توزیع‌های چندمتغیره بسیاری را با تغییر در توزیع‌های حاشیه‌ای ایجاد کرد.

توابع مفصل توسط اسکالر [۴] معرفی شد و پس از آن در تحقیقات فراوانی در زمینه علم آمار و احتمالات، استفاده شد. در دهه ۱۹۸۰ میلادی استفاده کاربردی از این توابع در علم اقتصاد و محاسبات مالی شروع شد. یک مفصل برای تهیه توزیع توأم متغیرها از الگوریتم‌های مناسب‌تری استفاده می‌کند و در نتیجه واقع‌بین‌تر است [۱]. در واقع مفصل قادر به ساخت توزیع توأم از متغیرهای وابسته دارای توزیع حاشیه‌ای متفاوت است و به عکس. با توجه به اهمیت پیش‌بینی در بازارهای بورس، کاربرد این روش بیشتر در محاسبات و تحلیل‌های بازارهای مالی و علوم آماری بوده است [۵]. از سال ۲۰۰۳ به بعد محققانی همچون سالوادوری، فاور و گنست در استفاده از توابع مفصل در بخش هیدرولوژی پیشگام شده‌اند به‌طوری که فاور و همکارانش [۶]، از توابع مفصل در مدل‌سازی متغیرهای هیدرولوژیک دو حوضه آبخیز در کبک کانادا استفاده کردند. آنها بیان کردند که همبستگی بین متغیرهای موجود در مباحث هیدرولوژی را می‌توان با استفاده از این روش مدل‌سازی کرد و نتایج بهتری نسبت به روش‌های پیش‌بینی سنتی تک‌متغیره داشت. پس از آن مفهوم توابع مفصل به‌سرعت در زمینه‌های مختلف هیدرولوژی شامل تحلیل فراوانی سیلاب [۷ و ۸] تحلیل چندمتغیره خصوصیات بارش [۹ و ۱۰] و تحلیل چندمتغیره خصوصیات خشکسالی [۱۱ و ۱۲] بررسی شده است.

یکی از مراحل مهم استفاده از توابع مفصل تخمین پارامتر آن است. بدین‌منظور تا کنون روش‌های مختلفی ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به روش‌های گشتاورها<sup>۲</sup>، روش حداکثر درست‌نمایی<sup>۳</sup> (MLM)، روش حداکثر درست‌نمایی کانونیکال<sup>۴</sup> (CML)، روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها<sup>۵</sup> (IFM) و روش‌های فراابتکاری نظیر الگوریتم فراابتکاری

2. Method-of-moments  
3. Maximum Likelihood method  
4. Canonical Maximum Likelihood  
5. Inference Functions for Margins

1. Copula Function

تحلیل چندمتغیره جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز استفاده شد. همچنین با توجه به پیشینه پژوهش، مشاهده می‌شود که در مطالعات اندکی به مقایسه روش‌های متداول و هوشمند در تخمین پارامتر تابع مفصل پرداخته شده است. از این‌رو، در مطالعه حاضر عملکرد دو روش IFM و PSO در تخمین پارامترهای مفصل ارزیابی شد.

بنابراین، اهداف این پژوهش عبارت‌اند از:

(الف) ایجاد نوعی مدل احتمالاتی مبتنی بر مفصل برای تحلیل چندمتغیره جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز. (ب) مقایسه روش‌های IFM و PSO در تخمین پارامتر مفصل.

(ج) انتخاب بهترین تابع مفصل مناسب دوبعدی براساس تحلیل خطا<sup>۳</sup>.

(د) بررسی رفتار احتمالاتی توأم رویدادهای جریان کم در این حوضه.

## مواد و روش‌ها

### داده‌ها و منطقه مطالعه شده

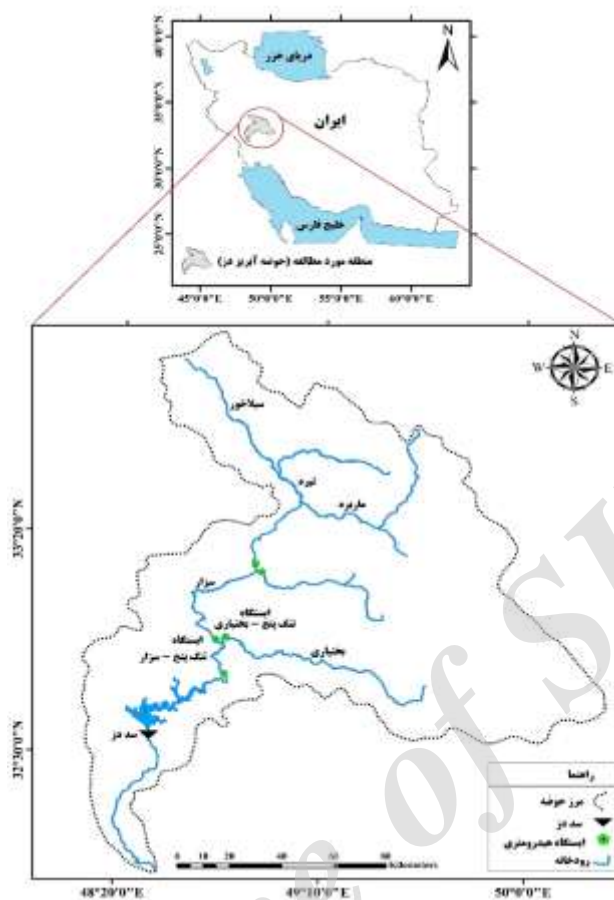
حوضه آبریز رودخانه دز به‌عنوان یک حوضه درجه سه، زیرمجموعه‌ای از حوضه کارون بزرگ محسوب می‌شود و در تقسیم‌بندی بزرگ‌تر در زیرمجموعه حوضه خلیج فارس و دریای عمان قرار می‌گیرد. شکل ۱ موقعیت حوضه آبریز دز را در ایران نشان می‌دهد. مساحت کل حوضه بالغ بر ۲۱۷۲۰ کیلومتر مربع و متوسط ارتفاع حوضه حدود ۱۶۰۰ متر است. محدوده مطالعه شده در این تحقیق حوضه آبریز دز در بالادست سد دز است که مساحت آن حدود ۱۷۳۶۵ کیلومتر مربع است. شیب حوضه در بالادست سد نسبتاً تند است، به‌طوری که شیب متوسط آن ۱۲/۱ درصد است و ۱۰ درصد حوضه شیبی بیشتر از ۱۹/۵ درصد دارد. پوشش گیاهی در ارتفاعات پایین حوضه کم است و با افزایش ارتفاع، این پوشش زیادتر می‌شود. همان‌گونه که شکل ۱ نشان می‌دهد، جهت جریان در حوضه آبریز دز از سمت شمال به جنوب است. رودخانه دز ابتدا از اتصال دو شاخه اصلی رودخانه تیره و سیلاخور شروع شده و با اضافه شدن سرشاخه ماربره رودخانه سپید دشت - سزار تشکیل می‌شود. از به‌هم‌پیوستن دو رودخانه سپید دشت - سزار و سپید دشت - زاز رودخانه سزار شروع می‌شود و در نهایت،

بهینه‌سازی توده ذرات<sup>۱</sup> (PSO) اشاره کرد. روش IFM متداول‌ترین راه برای تخمین پارامترهای مفصل است که توسط جوئی [۱۳] ارائه شده و شامل دو مرحله پیشینه‌کردن توابع درست‌نمایی هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای تک‌متغیره و پیشینه‌کردن تابع درست‌نمایی مفصل برای تخمین پارامتر وابستگی مفصل،  $\theta$  است.

الگوریتم PSO یک الگوریتم جست‌وجوی اجتماعی است که از رفتار اجتماعی دسته‌های پرندگان مدل شده است. ابتدا این الگوریتم به‌منظور کشف الگوهای حاکم بر پرواز هم‌زمان پرندگان و تغییر ناگهانی مسیر آنها و تغییر شکل بهینه دسته به کار گرفته شد. در PSO ذرات در فضای جست‌وجو جاری می‌شوند [۱۴]. تغییر مکان ذرات در فضای جست‌وجو تحت تأثیر تجربه و دانش خود و همسایگان است. بنابراین، موقعیت دیگر توده ذرات روی چگونگی جست‌وجوی یک ذره اثر می‌گذارد. نتیجه مدل‌سازی این رفتار اجتماعی، فرایند جست‌وجویی است که ذرات به سمت نواحی موفق میل می‌کنند. ذرات از یکدیگر می‌آموزند و بر مبنای دانش به‌دست‌آمده به سمت بهترین همسایگان خود می‌روند. اساس کار PSO بر این اصل استوار است که در هر لحظه هر ذره مکان خود را در فضای جست‌وجو با توجه به بهترین مکانی که تا کنون در آن قرار گرفته است و بهترین مکانی که در کل همسایگی‌اش وجود دارد، تنظیم می‌کند [۱۴].

ردی و سینگ [۱۵] از روش‌های بهینه‌سازی فرااکووشی الگوریتم ژنتیک و روش PSO برای تخمین پارامتر تابع چهار مفصل مختلف بهره بردند و منحنی‌های شدت-مدت-فراوانی خشکسالی را در ایالت تکزاس آمریکا استخراج کردند. نتایج نشان داد عملکرد دو روش GA و PSO بسیار نزدیک به هم است، اما عملکرد روش PSO اندکی بهتر بود. عبدی و همکارانش [۱۲] برای تحلیل خشکسالی‌های شمال غرب ایران از توابع مفصل استفاده کردند. آنها به‌منظور تعیین پارامتر تابع مفصل از روش‌های PSO، الگوریتم ژنتیک و روش جست‌وجوی سیستم ذرات الکتریکی<sup>۲</sup> (ACSS) بهره بردند. نتایج پژوهش این محققان نشان داد عملکرد هر سه روش در تخمین پارامتر مفصل نزدیک به هم بوده و روش ACSS بهترین عملکرد را در تخمین پارامتر مفصل داشته است.

در این مطالعه از توابع مفصل ارشمیدسی و حدی برای



شکل ۱. موقعیت منطقه مطالعه شده

حذف اثر همه ضرایب خودهمبستگی معنادار) استفاده شد. مبانی تئوری این آزمون به طور مبسوط توسط خلیلی و همکارانش [۱۷] ارائه شده است.

#### انتخاب مناسب ترین توزیع های حاشیه ای

هدف اولیه تحلیل فراوانی، ارتباط دادن وقایع حدی به فراوانی آنها با استفاده از توزیع های احتمالاتی است. در تحلیل فراوانی وقایع هیدرولوژیک، داده های مشاهده شده در یک دوره زمانی طولانی مربوط به یک حوضه آبریز با فرض استقلال و هم توزیع بودن بررسی شوند [۱۸]. در واقع، فرض اساسی این است که داده های مطالعه شده از نظر مکانی و زمانی مستقل اند. در دسترس بودن داده ها یکی از جنبه های مهم تحلیل فراوانی است. برآورد احتمال وقوع پدیده های حدی یک برون یابی براساس داده های موجود است. در نتیجه، هر چه داده های پایه بیشتر باشد، صحت برآورد نیز بیشتر خواهد بود. اساس کار نیز بدین صورت است که یک توزیع فراوانی به عنوان توزیع حاکم بر جامعه در نظر گرفته شده و اطلاعات آماری از روی داده های

رودخانه دز در محلی به نام تنگ پنچ، از تلاقی دو رودخانه سزار و بختیاری تشکیل می شود. به منظور تحلیل فراوانی توأم جریان های کمینه حوضه آبریز دز در دوره آماری ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۱، دو سرشاخه متصل به هم تنگ پنچ-بختیاری و تنگ پنچ-سزار انتخاب شدند.

#### بررسی همگنی داده ها

در صورتی وجود سری زمانی طولانی مدت دقت تحلیل فراوانی را افزایش می دهد که سری زمانی همگن باشد و روندی کاهشی یا افزایشی در آن مشاهده نشود [۱۶]. در این تحقیق برای بررسی همگنی سری زمانی هر ایستگاه از آزمون من-کندال استفاده شده است. شرط لازم برای استفاده از این آزمون نبود ضریب خودهمبستگی معنادار در سری زمانی داده ها است. حال آنکه بیشتر سری های هیدرولوژیک دارای خودهمبستگی معنادارند [۱۷]. در این پژوهش برای بررسی روند جریان های کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز از ویرایش سوم آزمون من-کندال (با

CDF نظری محاسبه شده،  $\bar{F}$  میانگین CDF نظری و  $G(x_i)$  مقدار CDF تئوری است.

### تابع مفصل

معرفی و ارائه مفصل به اسکالر [۴] نسبت داده شده است که در یک تئوری توصیف می‌کند چگونه توابع توزیع تک‌بعدی می‌تواند به فرم توزیع‌های چندمتغیره ترکیب شود. برای متغیرهای تصادفی پیوسته  $N$  بعدی  $X_1, X_2, \dots, X_N$  با توزیع‌های حاشیه‌ای  $F(x_i) = P_{x_i}(X_i \leq x_i)$ ، توزیع توأم متغیر  $X$  به صورت زیر قابل تعریف است.

$$H_{X_1, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N] \quad (3)$$

مفصل تابعی است که توابع توزیع حاشیه‌ای تک‌متغیره را برای تشکیل یک تابع توزیع دو یا چندمتغیره، به هم پیوند می‌دهد. بنابراین، اسکالر نشان داد توزیع چندمتغیره احتمالاتی  $H$  با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابستگی می‌تواند توسط تابع مفصل  $C$  بیان شود:

$$C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_N}(x_N)) = H_{X_1, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4)$$

که در رابطه یادشده  $F_{X_i}(x_i)$ ،  $i$  امین توزیع حاشیه‌ای پیوسته و  $H_{X_1, \dots, X_N}$  همان توزیع تجمعی توأم  $X_1, X_2, \dots, X_N$  است. با توجه به اینکه برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ها از صفر تا یک کاهش یافته نیست، می‌توان مفصل  $C$  را به‌عنوان تبدیل  $H_{X_1, \dots, X_N}$  از  $[-\infty, +\infty]^N$  به  $[0, 1]^N$  در نظر گرفت. این تبدیل توزیع‌های حاشیه‌ای را از یکدیگر جدا می‌کند و در نتیجه، تابع مفصل  $C$  فقط به ارتباط بین متغیرها مربوط می‌شود و توصیف کاملی از ساختار وابستگی به‌دست می‌آید [۲۱]. توابع مفصل به خانواده‌های متعددی تقسیم شده‌اند که در این میان، توابع مفصل ارشمیدسی<sup>۱</sup> یکی از توابع پرکاربرد در تحلیل چندمتغیره وقایع هیدرولوژیک هستند و روابط صریح در توابع توزیع تجمعی خود را دارند که این مزیت استفاده از این توابع نسبت به برخی توابع مثل توابع مفصل بیضوی است که توزیع تجمعی صریحی ندارند [۲۱]. در این مطالعه، از پنج تابع

موجود محاسبه می‌شوند [۱۸]. برای بررسی ساختار وابستگی بین جریان‌های کمیته هفت‌روزه دو رودخانه متصل به هم، لازم است که ابتدا توزیع تک‌متغیره مناسب حاکم بر هر متغیر تعیین شود [۱۹]. برای اینکه تغییرات یک متغیر تصادفی به‌درستی توسط توزیع مد نظر بیان شود، باید تخمین پارامترهای آن توزیع به‌خوبی انجام شود. در این صورت می‌توان با خطای کمتری چندک‌ها و امید ریاضی را با استفاده از مدل برازش داده‌شده تعیین کرد. در این تحقیق، از روش گشتاورهای خطی برای تخمین پارامتر توزیع‌های آماری استفاده شد. هاسکینگ [۲۰] گشتاورهای خطی را به‌صورت ترکیب خطی از آماره‌های مرتب‌شده بیان کرد.

در این مطالعه توزیع‌های نرمال (NOR)، لوگ نرمال (LN)، پیرسون تیپ ۳ (P3)، نمایی (EXP)، گاما (GAM)، توزیع مقادیر حدی تعمیم‌یافته (GEV)، ناکاگامی (NAK)، رایلی (RAY)، لجستیک (LOG)، لجستیک تعمیم‌یافته (GLOG)، پارتوی تعمیم‌یافته (GPA) و ویبول (WEI) بر داده‌های جریان کمیته هفت‌روزه حوضه آبریز دز برازش داده شد. پس از برازش توزیع‌های آماری، نکویی برازش هر توزیع توسط آزمون کلموگروف-اسمیرنوف بررسی شد. در صورتی که در سطح احتمال ۵ درصد برازش مدل‌ها توسط آزمون کلموگروف-اسمیرنوف تأیید شود، توزیع احتمالاتی مد نظر پذیرفته می‌شود. پس از کنترل نکویی برازش و تعیین توزیع‌های مورد قبول، برای انتخاب بهترین مدل برازشی، جذر میانگین مربعات نرمال شده (NRMSE) (رابطه ۱) و معیار نش-ساتکلیف (رابطه ۲) محاسبه می‌شود. هریک از توزیع‌های برازشی که بیشترین مقدار معیار نش-ساتکلیف (NS) و کمترین NRMSE را داشته باشند، به‌عنوان مناسب‌ترین توزیع حاشیه‌ای جریان‌های کمیته هفت‌روزه حوضه آبریز دز برگزیده می‌شود.

$$NRMSE = 100 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F(x_i) - G(x_i))^2}}{F_{\max} - F_{\min}} \quad (1)$$

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - G(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - \bar{F})^2} \quad (2)$$

که در روابط یادشده  $n$  تعداد داده‌ها،  $F(x_i)$  مقدار CDF نظری،  $F_{\max}$  و  $F_{\min}$  به ترتیب بیشترین و کمترین

1. Archimedean

جدول ۱. توابع مفصل استفاده شده [۲۱]

| خانواده مفصل | تابع مفصل          | تابع توزیع تجمعی  | $\theta$                |
|--------------|--------------------|---|-------------------------|
| ارشمیدسی     | علی - میخائیل - حق | $C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$   | $-1 \leq \theta \leq 1$ |
|              | کلایتون            | $C(u, v) = \max \left[ \left( u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right]$                 | $\theta \geq 0$         |
|              | فرانک              | $C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$ | $\theta \neq 0$         |
| مقادیر حدی   | گالامبوس           | $C(u, v) = uv \exp \left\{ \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \right\}$     | $\theta \geq 0$         |
|              | گامبل - هوگارد     | $C(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$         | $\theta \geq 1$         |

کانونیکال است و در مطالعه حاضر استفاده شده است. برای موارد دومتغیره، دو متغیر تصادفی همبسته  $Y$  و  $X$  به ترتیب به صورت توابع  $f_X(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  و  $f_Y(y; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  و پارامترهای  $f_X(x)$  و  $f_Y(y)$  پارامترهای  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  هستند. تعداد پارامترها نیز براساس نوع توزیع‌های حاشیه‌ای تعیین می‌شود.

برای  $n$  جفت مشاهده مستقل، تابع لگاریتم درست‌نمایی برای  $Y$  و  $X$  یعنی  $\ln L_X(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  و  $\ln L_Y(y; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  به صورت مجزا به منظور تخمین پارامترها پیشینه می‌شوند.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  و  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  پارامترهای تخمینی هستند. تابع لگاریتم درست‌نمایی تابع چگالی توأم  $f_{X,Y}(x, y)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \ln L(x, y; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r, \theta) = & \\ \ln L_C(x, y; F_X(x), F_Y(y), \theta) + & \\ \ln L_X(x; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p) + & \\ \ln L_Y(y; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r) & \end{aligned} \quad (6)$$

که در رابطه یاد شده  $\ln L_C$  تابع لگاریتم درست‌نمایی تابع چگالی مفصل است. با جای‌گذاری مقادیر تخمین زده شده برای  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  و  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  در رابطه ۶، تابع لگاریتم درست‌نمایی  $\ln L$  برای برآورد پارامتر مفصل تخمینی  $\hat{\theta}$  پیشینه می‌شود.

مفصل مختلف شامل علی - میخائیل - حق<sup>۱</sup> (AMH)، کلایتون<sup>۲</sup>، فرانک<sup>۳</sup>، گالامبوس<sup>۴</sup>، گامبل - هوگارد<sup>۵</sup> به منظور تحلیل چندمتغیره جریان‌های کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز استفاده شد. جدول ۱ روابط مربوط به توابع مفصل استفاده شده را نشان می‌دهد.

قدم اول در برازش و انتخاب تابع مفصل تعیین میزان همبستگی دو متغیر بررسی شده است. در این مطالعه میزان وابستگی جریان کمینه هفت‌روزه در سرشاخه‌های متصل به هم حوضه آبریز دز با استفاده از روش کندال تاو<sup>۶</sup> (رابطه ۵) محاسبه شد.

$$\tau = \left( \frac{N}{2} \right)^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (5)$$

که در رابطه یاد شده  $N$  تعداد داده‌ها،  $\text{sign}()$  تابع علامت و  $x$  و  $y$  جفت داده‌های مشاهداتی برای جریان کمینه هفت‌روزه در محل اتصال دو سرشاخه است.

قدم دوم و بسیار مهم در کاربرد توابع مفصل، تخمین پارامتر مفصل ( $\theta$ ) است. در این مطالعه از روش‌های IFM و الگوریتم PSO برای تخمین پارامتر وابستگی مفصل استفاده شد که در ادامه به طور گسترده شرح داده می‌شود.

#### روش تابع منطقی برای حاشیه‌ها (IFM)

این روش از نظر محاسباتی بسیار کارآمدتر از روش‌های گشتاورها، حداکثر درست‌نمایی و حداکثر درست‌نمایی

1. Ali - Mikhail - Haq (AMH)
2. Clayton
3. Frank
4. Galambos
5. Gumbel-Hougaard (GH)
6. Kendall's  $\tau$

در مطالعه حاضر، توسعه برنامه کامپیوتری بر مبنای الگوریتم PSO در زبان برنامه‌نویسی متلب، به شرح زیر صورت گرفت:

گام اول- تولید مقادیر اولیه بردارهای وضعیت و سرعت: در این مرحله مقادیر اولیه بردارهای سرعت و وضعیت با استفاده از یک توزیع یکنواخت و کاملاً تصادفی در بازه یک و صفر ایجاد می‌شود.

گام دوم- معرفی مقادیر ایجادشده به تابع مفصل: در این مرحله تابع مفصل مد نظر براساس مقادیر اولیه بردارها ایجاد شده و نتایج به دست آمده با استفاده از تابع هدف بررسی می‌شود. در این مطالعه تابع هدف استفاده شده معیار نش-ساتکلیف<sup>۴</sup> (NS) است. این شاخص نسبت واریانس باقی مانده به واریانس احتمال تجربی را نشان می‌دهد و مقدار بهینه آن یک است [۲۵]. مقادیر بزرگ‌تر از صفر قابل قبول تر هستند. معیار NS از رابطه ۹ به دست می‌آید:

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})^2}{\sum_{i=1}^n (C_{ei} - \bar{C}_e)^2} \quad (9)$$

که در رابطه یادشده،  $n$  اندازه نمونه،  $C_{pi}$  مقادیر محاسبه شده مفصل تئوری،  $C_{ei}$  مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی و  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی است.

گام سوم- در تکرار اول، pbest برای هر ذره همان وضعیت فعلی ذره لحاظ شده و gbest که بهترین موقعیت ملاقات شده ذره‌هاست براساس تابع هدف تعیین می‌شود. در تکرار دوم با استفاده از مقادیر به دست آمده برای pbest و gbest و با توجه به مقادیر بردارهای وضعیت و سرعت تکرار اول، سرعت جدید برای ذره‌ها محاسبه می‌شود و وضعیت جدید هر ذره به دست می‌آید. حال در تکرار دوم مقدار تابع هدف قابل محاسبه بوده و pbest و gbest جدید برای هر ذره مشخص می‌شود. بدین ترتیب مقادیر pbest و gbest در هر مرحله از روی مقادیر مربوط به مرحله قبل ساخته می‌شود و مقادیر بردارهای وضعیت و سرعت در هر مرحله با توجه به وضعیت ذره‌ها در مرحله قبل به روز می‌شود.

گام چهارم- در نهایت با اتمام آخرین مرحله تکرار، gbest مرحله آخر به عنوان بهترین وضعیت و مقدار تابع

### چارچوب تحلیلی الگوریتم PSO

کندی و ابراهام [۲۲] الگوریتم PSO را براساس رفتار اجتماعی حیوانات توسعه دادند. در این زمینه محققان متعددی قوانین ضروری حاکم بر گروه پرندگان و ماهیان را مطالعه و آن را شبیه‌سازی کرده‌اند. رعایت این قوانین توسط تک تک پرندگان و ماهیان، آنها را قادر ساخته است تا با هم همگام شوند و در حرکات دسته‌جمعی به جست‌وجوی غذا و دفاع از خود بپردازند. همچنین نتیجه تلاش همه اعضا در یک دسته، هنگام حرکت فاصله بهینه با همسایگان حفظ می‌شود [۲۳].

در الگوریتم PSO فراگیر، اگر فضای جست‌وجو  $D$  بعدی فرض شود،  $i$  امین ذره از جمعیت می‌تواند با یک بردار  $D$  بعدی (بردار موقعیت) به صورت  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{id})^T$  تعریف شود. تغییر موقعیت هر ذره نیز با یک بردار  $D$  بعدی دیگر به صورت  $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{id})^T$  قابل نمایش است و بردار سرعت نامیده می‌شود. برای تعیین بهترین وضعیت ملاقات شده توسط هر ذره نیز به تعریف بردار  $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, \dots, p_{id})^T$  نیاز است. حال می‌توان معادلات حاکم بر حرکت دسته را به صورت زیر تعریف کرد:

$$V_{id}^{n+1} = v_{id}^n + cr_1^n (p_{id}^n - x_{id}^n) + cr_2^n (p_{gd}^n - x_{gd}^n) \quad (7)$$

$$x_{id}^{n+1} = x_{id}^n + v_{id}^{n+1} \quad (8)$$

در روابط یادشده  $n$  شمارنده تکرار، اندیس  $i$  شمارنده ذره‌ها، اندیس  $d$  معرف بعد و اندیس  $g$  نشان دهنده موقعیت بهترین ذره در دسته است.  $r_1$  و  $r_2$  اعداد کاملاً تصادفی در بازه یک و صفر با توزیع یکنواخت هستند و خصلت غیرقطعی و تصادفی الگوریتم PSO را تعیین می‌کنند.  $c$  نیز ضریب شتاب است و همواره مقادیر مثبت را برمی‌گزینند. در هر مرحله (تکرار) ابتدا مقدار سرعت هر ذره توسط معادله ۷ براساس سرعت مرحله قبل  $(v_{id}^n)$ ، موقعیت ذره در مرحله قبل  $(x_{id}^n)$ ، بهترین وضعیت همان ذره در مرحله قبل  $(p_{id}^n)$  و بهترین وضعیت ذره در دسته در مرحله قبل  $(p_{gd}^n)$  ساخته می‌شود و سپس با توجه به رابطه ۸ موقعیت هر ذره در مرحله کنونی  $(x_{id}^{n+1})$  به توجه به سرعت مرحله فعلی و موقعیت مرحله قبل خود اصلاح می‌شود [۲۴].

1. Individuals
2. Iteration
3. Acceleration Coefficient

4. Nash Sutcliffe (NS)

مفصل‌ها با نتایج مفصل تجربی، مفصل مناسب برای داده‌های مد نظر انتخاب شد. برای انتخاب بهترین تابع مفصل از آماره‌های نش- ساتکلیف (رابطه ۹)، آماره کرامر- فون مایسس (رابطه ۱۲)، NRMSE (رابطه ۱۳) و BIAS (رابطه ۱۴) استفاده شد.

$$Sn = \sum_{i=1}^n [C_{pi} - C_{ei}]^2 \quad (12)$$

$$NRMSE = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})^2}}{C_{emax} - C_{emin}} \quad (13)$$

$$BIAS = \frac{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})}{n} \quad (14)$$

که در روابط یادشده،  $n$  اندازه نمونه،  $C_p$  مقادیر محاسبه شده مفصل تئوری،  $C_e$  مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی و  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی هستند. تابع مفصلی مناسب‌تر است که در آن مقادیر Sn، NRMSE و BIAS به صفر و مقدار NS به یک نزدیک‌تر باشد. مقدار شاخص NS از یک تا منفی بی‌نهایت تغییر می‌کند. بازه‌های ۰/۷۵-۱، ۰/۷۵-۰/۳۶ و ۰/۳۶-۰/۳۶ برای مقدار این شاخص به ترتیب نشان‌دهنده عملکرد بسیار خوب، رضایت‌بخش و ضعیف مدل استفاده شده هستند [۲۵].

### نتایج و بحث

تحلیل همگنی داده‌ها و انتخاب توزیع حاشیه‌ای برتر برای انجام تحلیل فراوانی دبی‌های کمینه هفت‌روزه، ابتدا باید کمترین جریان‌های هفت روز سالانه استخراج شود. بدین منظور میانگین متحرک هفت‌روزه دبی روزانه ایستگاه‌های مطالعه شده محاسبه و برای هر سال کمترین آن انتخاب می‌شود که کمینه دبی هفت‌روزه سالانه نامیده می‌شود. در مرحله بعد باید فرض لازم برای تحلیل فراوانی، یعنی همگن بودن داده‌های کمینه دبی هفت‌روزه بررسی شود. بدین منظور از آزمون من- کندال اصلاح شده استفاده شد. جدول ۲ نتایج بررسی روند تغییرات جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز را پس از حذف اثر همه ضرایب خودهمبستگی معنادار نشان می‌دهد. با توجه به مقادیر Z آزمون MMK ارائه شده در این جدول، مشاهده می‌شود که جریان‌های کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز در همه

هدف (مقدار معیار NS) متناظر با آن به‌عنوان جواب معرفی می‌شود.

### دوره بازگشت دومتغیره

برای ارزیابی ریسک متغیرهای تصادفی همبسته به‌طور هم‌زمان، به تحلیل فراوانی دومتغیره نیاز است. تحلیل فراوانی دومتغیره درباره دو متغیر تصادفی همبسته به‌وسیله دوره بازگشت توأم تعریف می‌شود [۱۱].

دوره‌های بازگشت توأم دو حالت «یا» و «و» دارند و به شرح زیر هستند [۱۱]:

### حالت اول (حالت «یا»): دوره بازگشت توأمی است

که در آن مقدار مشاهده شده از  $X$  یا از  $Y$  تجاوز کرده باشد. به بیان دیگر  $X > x$  یا  $Y > y$  است و با  $T_{XY}$  نشان داده می‌شود.

### حالت دوم (حالت «و»): دوره بازگشت توأمی است

که در آن جفت داده مشاهده شده، هم از  $X$  و هم از  $Y$  تجاوز کرده باشد. به بیان دیگر  $X > x$  و  $Y > y$  است و با  $T'_{XY}$  نشان داده می‌شود.

این دو نوع دوره بازگشت توأم با استفاده از توابع مفصل نیز قابل تعریف و به شرح زیر هستند:

$$T_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ or } Y > y)} = \frac{1}{1 - F_{X,Y}(x, y)} = \frac{1}{1 - C(F_X(x), F_Y(y))} \quad (10)$$

$$T'_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ and } Y > y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))} \quad (11)$$

### انتخاب تابع مفصل مناسب

برای انتخاب مناسب‌ترین مفصل، بدین صورت عمل شد که پس از انتخاب و برازش توزیع حاشیه‌ای مناسب بر هر یک از متغیرهای بررسی شده و تخمین پارامترهای توزیع به روش بیشترین درست‌نمایی، چند نوع تابع مفصل مختلف را برای پیوند این دو تابع توزیع حاشیه‌ای در نظر گرفته و پارامتر تابع مفصل با استفاده از روش‌های IFM و الگوریتم PSO برآورد می‌شود. سپس با مقایسه نتایج هر یک از

1. OR  
2. AND



توزیع‌های مد نظر برآورد شد. پس از برآورد ضرایب و برازش توزیع‌های آماری بررسی شده، ابتدا نکویی برازش این توزیع‌ها از نظر آماری با استفاده از آزمون KS در سطح اطمینان ۵ درصد بررسی شد. همچنین با استفاده از آماره‌های جذر میانگین مربعات نرمال شده و معیار نش-ساتکلیف میزان دقت و کارایی توزیع‌های آماری در مدل کردن احتمال تجمعی رخداد متغیر جریان کمینه با تداوم هفت روز محاسبه و نتایج در جدول ۳ ارائه شده است. با توجه به جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای متغیر جریان کمینه هفت‌روزه در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار، به ترتیب توزیع‌های LOG و GEV بهترین برازش و عملکرد مناسب‌تری داشتند. در جدول ۴ نیز پارامترهای توزیع‌های منتخب در هر ایستگاه ارائه شده است. در شکل ۲ نمودار تابع توزیع تجمعی تجربی و تئوری برای جریان‌های کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز ارائه شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که تابع توزیع حاشیه‌ای منتخب تطابق مناسبی با احتمال تجربی جریان‌های کمینه هفت‌روزه دارند.

ایستگاه‌های مطالعه شده افزایش غیرمعنادار را تجربه کرده و جریان‌های کمینه هفت‌روزه سالانه در سطح معناداری یک درصد همگن هستند.

جدول ۲. نتایج بررسی روند تغییرات جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار با استفاده از آزمون MMK

| متغیر                | مقادیر Z        |              |
|----------------------|-----------------|--------------|
|                      | تنگ پنج-بختیاری | تنگ پنج-سزار |
| جریان کمینه هفت‌روزه | ۰/۶۲            | ۰/۲۱         |

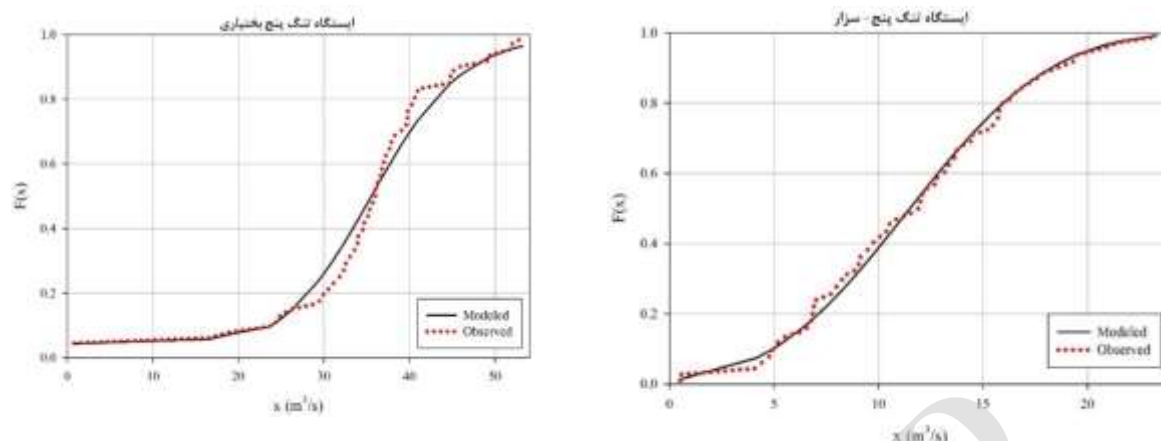
پس از تأیید همگنی سری‌های جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز، از توزیع‌های یادشده در بخش مواد و روش‌ها برای انجام تحلیل فراوانی تک‌متغیره بهره گرفته شد. برای برازش توزیع‌های احتمالاتی به داده‌های جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز، ابتدا گشتاورهای خطی برای سری‌های استخراجی محاسبه و سپس با برابر قراردادن آنها با گشتاورهای خطی توزیع‌های احتمالاتی، ضرایب

جدول ۳. مقادیر آماره‌های KS، NS و NRMSE توزیع‌های برازشی برای سری‌های جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار

| توزیع احتمالاتی           | تنگ پنج-بختیاری |       |       | تنگ پنج-سزار |       |       |
|---------------------------|-----------------|-------|-------|--------------|-------|-------|
|                           | NRMSE           | NS    | KS    | NRMSE        | NS    | KS    |
| نرمال (NOR)               | ۰/۱۴۵           | ۰/۹۱۸ | ۸/۳۲  | ۰/۱۴۵        | ۰/۹۱۸ | ۸/۳۲  |
| لوگ نرمال (LN)            | ۰/۳۴۲           | ۰/۵۰۵ | ۲۰/۴۱ | ۰/۳۴۲        | ۰/۵۰۵ | ۲۰/۴۱ |
| پیرسون تیپ ۳ (P3)         | ۰/۳۵۳           | ۰/۵۴۲ | ۱۶/۲۸ | ۰/۳۵۳        | ۰/۵۴۲ | ۱۶/۲۸ |
| نمایی (EXP)               | ۰/۴۱۳           | ۰/۳۶۲ | ۱۶/۲۳ | ۰/۴۱۳        | ۰/۳۶۲ | ۱۶/۲۳ |
| گاما (GAM)                | ۰/۳۰۶           | ۰/۶۴۷ | ۱۷/۲۲ | ۰/۳۰۶        | ۰/۶۴۷ | ۱۷/۲۲ |
| حدی تعمیم‌یافته (GEV)     | ۰/۱۱۳           | ۰/۹۳۱ | ۷/۶۰  | ۰/۱۱۳        | ۰/۹۳۱ | ۷/۶۰  |
| لجستیک (LOG)              | ۰/۰۷۴           | ۰/۹۷۱ | ۴/۹۸  | ۰/۰۷۴        | ۰/۹۷۱ | ۴/۹۸  |
| لجستیک تعمیم‌یافته (GLOG) | ۰/۱۷۵           | ۰/۸۰۸ | ۱۲/۷۰ | ۰/۱۷۵        | ۰/۸۰۸ | ۱۲/۷۰ |
| رایلی (RAY)               | ۰/۲۷۱           | ۰/۶۵۱ | ۱۷/۱۴ | ۰/۲۷۱        | ۰/۶۵۱ | ۱۷/۱۴ |
| ناکامی (NAK)              | ۰/۱۸۷           | ۰/۷۰۴ | ۱۵/۷۸ | ۰/۱۸۷        | ۰/۷۰۴ | ۱۵/۷۸ |
| پارتوی تعمیم‌یافته (GPA)  | ۰/۲۰۸           | ۰/۶۶۱ | ۱۶/۸۹ | ۰/۲۰۸        | ۰/۶۶۱ | ۱۶/۸۹ |
| ویبول (WEI)               | ۰/۱۶۱           | ۰/۸۲۴ | ۱۲/۱۸ | ۰/۱۶۱        | ۰/۸۲۴ | ۱۲/۱۸ |

جدول ۴. ضرایب توزیع‌های حاشیه‌ای منتخب

| ایستگاه         | توزیع                 | پارامتر    |            |            |
|-----------------|-----------------------|------------|------------|------------|
|                 |                       | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| تنگ پنج-بختیاری | حدی تعمیم‌یافته (GEV) | -۰/۶۹۲     | ۱۱/۱۰۲     | ۳۲/۷۵۷     |
| تنگ پنج-سزار    | لجستیک (LOG)          | ۶/۰۳۹      | ۳۴/۴۶۷     | ---        |



شکل ۲. مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و تئوری حاشیه‌ای برای جریان کمینه هفت‌روزه ایستگاه‌های مطالعه‌شده

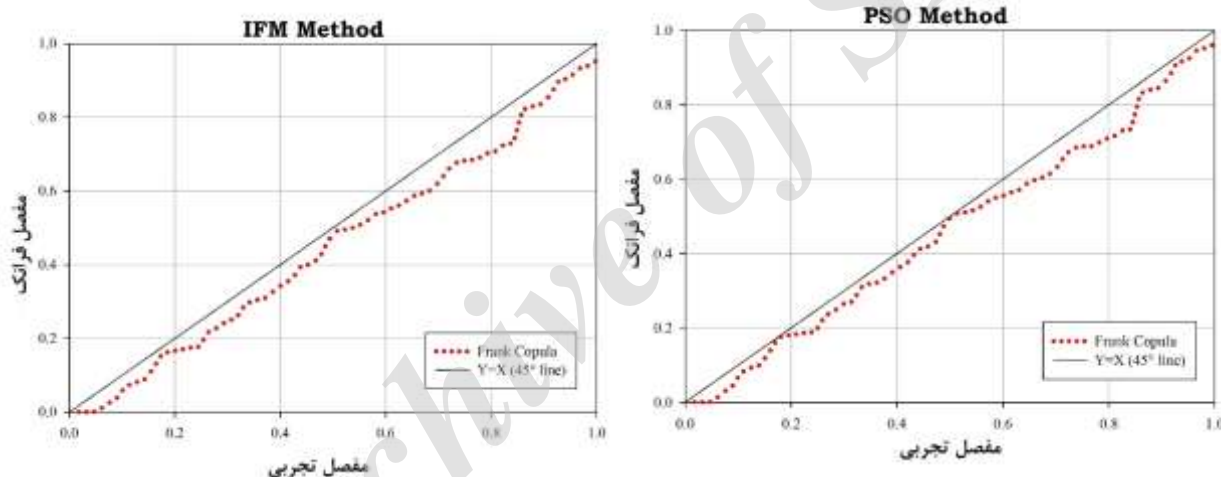
### انتخاب تابع مفصل

پس از تعیین توابع توزیع حاشیه‌ای مناسب، از توابع مفصل علی-میخائیل-حق (AMH)، کلایتون، فرانک، گلامبوس و گامبل-هوگارد برای ساخت توابع توزیع توأم استفاده شد. ابتدا وابستگی بین جریان‌های کمینه هفت‌روزه در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار با استفاده از روش کندال-تاو به ترتیب برابر با ۰/۴۱ محاسبه شد. در مرحله بعد به منظور تخمین پارامتر وابستگی مفصل از دو روش IFM و PSO استفاده شد. جدول ۵ نتایج آزمون‌های نکویی برازش را برای هر یک از توابع مفصل نشان می‌دهد. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که الگوریتم PSO در تخمین پارامتر مفصل به مراتب از دقت زیاد و خطای کمتری نسبت به روش IFM برخوردار است. برای انتخاب مناسب‌ترین تابع مفصل از آماره‌های Bias، NS، NRMSE و Sn بهره گرفته شد. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که برای دو ایستگاه تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار تابع مفصل فرانک با داشتن کمترین (بیشترین) مقدار Bias، NRMSE و Sn (NS) بهترین عملکرد را در برآورد مقادیر مشاهداتی داشته است. عملکرد مفصل‌های فرانک، گلامبوس و گامبل-هوگارد نیز بسیار نزدیک به هم هستند و با اختلاف اندکی در رتبه‌های بعدی توابع مفصل مناسب برای داده‌های جریان کمینه هفت‌روزه ایستگاه‌های مطالعه‌شده قرار می‌گیرند.

انتخاب مفصل‌های مناسب به محدوده سطح وابستگی‌ای بستگی دارد که می‌توانند توصیف کنند. برای نمونه، مفصل گامبل-هوگارد می‌تواند فقط برای وابستگی مثبت به کار رود. مفصل علی-میخائیل-حق برای وابستگی ضعیف ( $0/3333 < \tau < 0/1807$ ) مناسب است، در حالی که مفصل‌های کلایتون و فرانک برای هر دو وابستگی مثبت و منفی مناسب‌اند [۲۱]. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده مشاهده می‌شود که وابستگی جریان‌های کمینه هفت‌روزه در ایستگاه‌های مطالعه‌شده مقادیر مثبتی بوده است و در نتیجه مفصل‌هایی که برای وابستگی‌های مثبت مناسب بودند، بهترین عملکرد را داشته‌اند. همچنین دلیل عملکرد ضعیف تابع مفصل AMH را نیز می‌توان با توجه به سطح وابستگی توجیه کرد. بنابراین، با توجه به نتایج آزمون‌های نکویی برازش، در نهایت برای ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار تابع مفصل فرانک برای ایجاد توزیع‌های توأم انتخاب شد. شکل ۳ نمودار مقادیر تخمینی به‌دست‌آمده از مفصل فرانک را با استفاده از مقادیر پارامتر مفصل محاسبه‌شده توسط روش‌های IFM و PSO نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که مقدار تخمینی توسط PSO توانسته است عملکرد تابع مفصل فرانک را بهبود بخشد و مقادیر محاسبه‌شده به خط ۴۵ درجه (در مقایسه با روش IFM) نزدیک‌تر شده‌اند.

جدول ۵. نتایج آزمون‌های نکویی برازش و پارامتر وابستگی مفصل محاسبه‌شده با استفاده از روش‌های IFM و PSO برای توابع مختلف مطالعه‌شده

| متغیرها                                 | شاخص‌های ارزیابی | روش تخمین پارامتر مفصل | توابع مفصل |         |        |                           |
|---|------------------|------------------------|------------|---------|--------|---------------------------|
|   |                  |                        | AMH        | کلایتون | فرانک  | گالامبوس - گامبل - هوگارد |
|   | Bias             | IFM                    | ۰/۱۳۱      | ۰/۰۸۹   | ۰/۰۵۱  | ۰/۰۵۲                     |
|   |                  | PSO                    | ۰/۱۰۲      | ۰/۰۴۰   | ۰/۰۳۷  | ۰/۰۴۲                     |
| جریان کمینه هفت‌روزه در ایستگاه‌های تنگ | NS               | IFM                    | ۰/۷۵۷      | ۰/۸۸۴   | ۰/۹۶۷  | ۰/۹۶۲                     |
|   |                  | PSO                    | ۰/۸۰۱      | ۰/۹۷۳   | ۰/۹۷۵  | ۰/۹۷۲                     |
| پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار              | NRMSE            | IFM                    | ۱۴/۱۹۵     | ۹/۷۹۷   | ۵/۴۹۵  | ۵/۵۹۶                     |
|   |                  | PSO                    | ۱۲/۱۲۹     | ۴/۸۱۱   | ۴/۶۶۰  | ۴/۹۳۱                     |
|   | Sn               | IFM                    | ۱/۳۵۱      | ۰/۶۳۷   | ۰/۱۸۳  | ۰/۱۹۶                     |
|   |                  | PSO                    | ۱/۱۰۱      | ۰/۱۲۲   | ۰/۱۱۵  | ۰/۱۲۹                     |
| teta                                    |                  | IFM                    | ۰/۹۸۹      | ۲/۸۱۷   | ۲۰/۰۰۰ | ۵/۳۳۵                     |
|   |                  | PSO                    | ۲/۳۵۱      | ۲۹/۱۸۲  | ۳۸/۱۹۴ | ۲۹/۸۴۵                    |



شکل ۳. مقایسه مفصل تجربی و فرانک با خط ۴۵ درجه

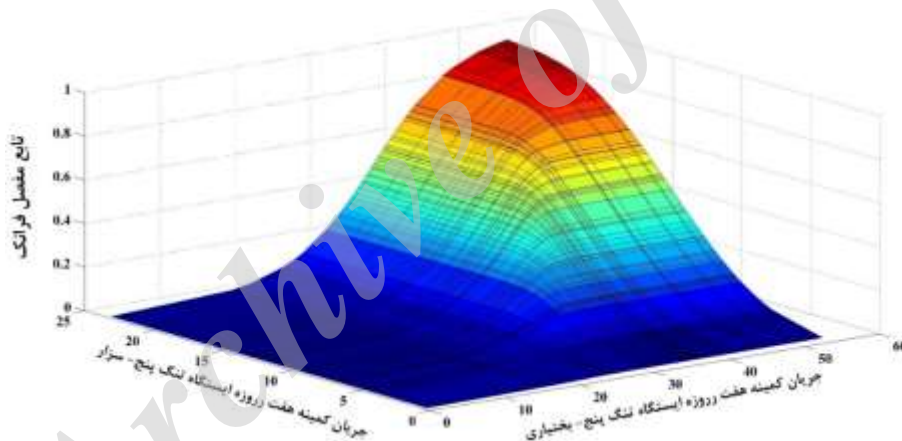
رفتار احتمالاتی جریان کمینه به‌منظور بهره‌برداری بهینه از آب‌های سطحی، در اختیار کاربران و محققان قرار دهد. به‌طور مثال، می‌توان به‌ازای جریان کمینه مشخص در ایستگاه تنگ پنج-بختیاری یا تنگ پنج-سزار، احتمال وقوع شرطی و نیز دوره‌های بازگشت توأم را تعیین کرد. شکل ۵ دوره‌های بازگشت توأم جریان کمینه هفت‌روزه را در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری یا تنگ پنج-سزار، برای حالت «یا» ( $X < x$  or  $Y < y$ ) نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش دوره بازگشت، میزان جریان کمینه در هر دو ایستگاه کاهش می‌یابد. در حالتی که جریان در محل

تحلیل احتمالات توأم جریان کمینه هفت‌روزه حوضه آبریز دز

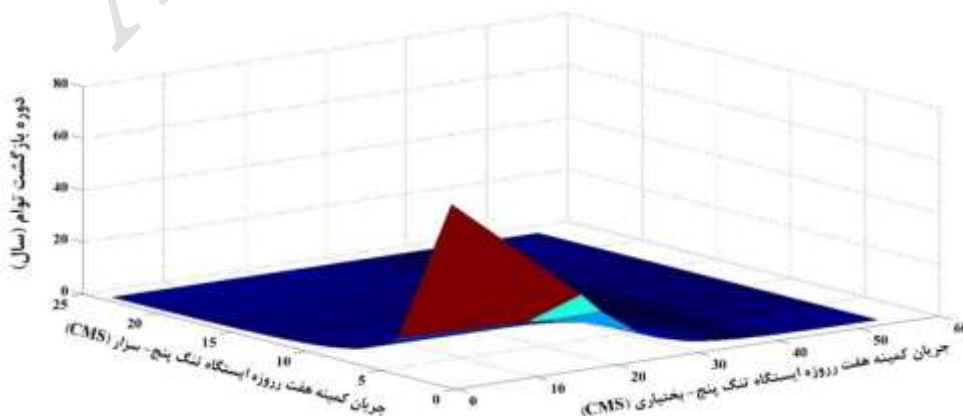
پس از تعیین پارامتر مفصل می‌توان احتمالات توأم را برای جریان کمینه هفت‌روزه استخراج کرد. شکل ۴ نمودار بهترین تابع مفصل منتخب را برای جریان کمینه هفت‌روزه، در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار نشان می‌دهد. در شکل ۴ پارامتر مفصل با استفاده از روش PSO محاسبه شده است. این شکل نشان می‌دهد چگونه می‌توان با استفاده از احتمالات توأم، جریان کمینه را در دو ایستگاه متصل به هم، به‌صورت هم‌زمان تعیین کرد. این امر می‌تواند اطلاعات بسیار مفیدی را در زمینه

هفت‌روزه را در ایستگاه‌های تنگ پنج- بختیاری یا تنگ پنج- سزار برای حالت «و» ( $X < x$  and  $Y < y$ ) نشان می‌دهد. در نگاه اول می‌توان مشاهده کرد که در حالت «و» دوره بازگشت محاسباتی به‌شدت افزایش می‌یابد. یو و راسموسن [۲۶] نشان دادند مقدار دوره بازگشت محاسباتی در حالت «و» می‌تواند به‌مراتب بزرگ‌تر از حالت «یا» باشد که نتایج به‌دست‌آمده در این مطالعه نیز تأییدکننده این امر است. به‌بیان دیگر، می‌توان گفت که احتمال وقوع دو واقعه به‌صورت هم‌زمان بسیار کمتر است و در نتیجه دوره بازگشت‌های بزرگ‌تری را نیز تجربه خواهد کرد. بدین‌صورت می‌توان علت افزایش دوره بازگشت توأم را در شکل ۶ توجیه کرد. اکنون مانند شکل ۵، می‌توان حالت‌های مختلفی را در نظر گرفت و احتمال وقوع هر حالت را بررسی کرد. این اطلاعات در تحلیل جامع وضعیت خشکسالی و نیز بررسی سناریوهای مختلف اقلیمی می‌تواند بسیار کارساز باشد.

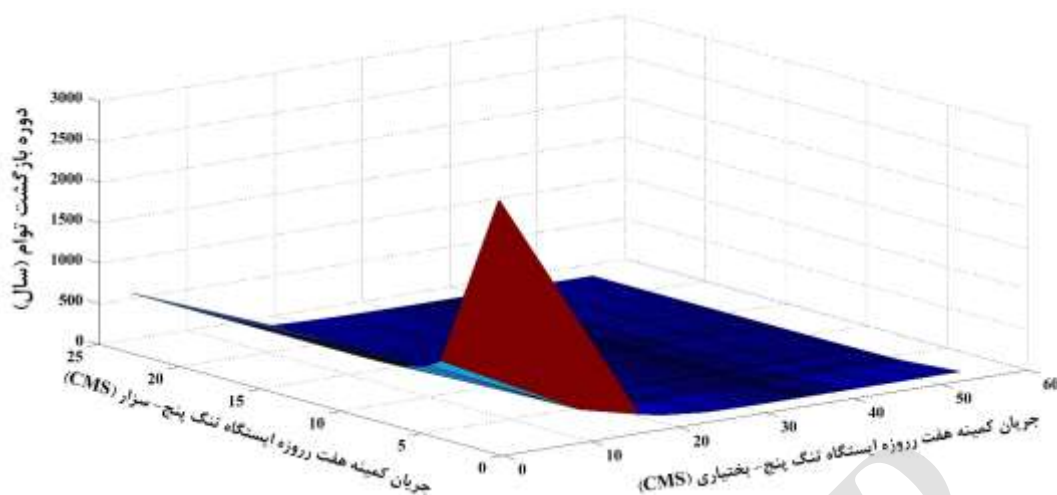
ایستگاه تنگ پنج- بختیاری بین محدوده  $(m^3/s)$  ۳۰ تا  $(m^3/s)$  ۵۰ واقع می‌شود، احتمال رخداد افزایش می‌یابد. زمانی که جریان در ایستگاه تنگ پنج- بختیاری بین محدوده  $(m^3/s)$  ۱۰ تا  $(m^3/s)$  ۲۰ باشد، در این صورت دوره بازگشت کوتاه‌تر می‌شود. حال با استفاده از این شکل می‌توان حالت‌های توأم متفاوتی را بررسی کرد. برای مثال، حالتی را در نظر بگیرید که جریان در ایستگاه تنگ پنج- بختیاری بین  $(m^3/s)$  ۱ تا  $(m^3/s)$  ۲۰ باشد. در این صورت اگر جریان ایستگاه تنگ پنج- سزار را بین  $(m^3/s)$  ۵ تا  $(m^3/s)$  ۱۰ محدود کنیم، احتمال رخداد این حالت بسیار کاهش می‌یابد و دوره‌های بازگشت بزرگ‌تری را به دست می‌دهد. همچنین این شکل نشان می‌دهد احتمال بروز خشکسالی و کاهش جریان در یکی از دو رودخانه متصل به هم به‌گونه‌ای است که می‌توان تقریباً هر ۴۰ سال یک بار چنین انتظاری را داشت. شکل ۶ دوره‌های بازگشت توأم جریان کمینه



شکل ۴. احتمال تجمعی توأم جریان کمینه هفت‌روزه در ایستگاه‌های تنگ پنج- بختیاری و تنگ پنج- سزار



شکل ۵. دوره بازگشت توأم جریان کمینه هفت‌روزه در ایستگاه‌های تنگ پنج- بختیاری و تنگ پنج- سزار



شکل ۶. دوره بازگشت توأم برای رخدادهای  $X < x$  و  $Y < y$  در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار

در شرایط «یا» و «و» محاسبه و در جدول ۶ ارائه شد. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که در حالت «یا» دوره بازگشت‌های دومتغیره محاسبه شده مقادیر کمتری را نسبت به دوره بازگشت تک‌متغیره اختیار می‌کنند. این امر نشان می‌دهد وقوع خشکسالی با در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای جانبی اندکی سریع‌تر در رودخانه‌های مطالعه شده به وقوع می‌پیوندد. همچنین در حالت «و» دوره بازگشت دومتغیره افزایش یافته و می‌توان نتیجه گرفت که وقوع خشکسالی در هر دو حوضه مطالعه شده به‌صورت هم‌زمان احتمال کمتری دارد.

پس از تعیین توابع مفصل منتخب برای بیان ساختار وابستگی بین پارامترهای جریان کمیته هفت‌روزه، می‌توان از این توابع به‌منظور محاسبه دوره‌های بازگشت توأم استفاده کرد. بدین‌منظور ابتدا مقادیر چندک‌های تک‌متغیره با استفاده از توزیع حاشیه‌ای منتخب در هر ایستگاه در دوره‌های بازگشت ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ ساله محاسبه شد. جدول ۶ مقادیر چندک‌های برآورد شده در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار را برای جریان کمیته هفت‌روزه نشان می‌دهد. با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۱ نیز مقادیر دوره بازگشت توأم

جدول ۶. مقادیر چندک تک‌متغیره و چندمتغیره جریان کمیته هفت‌روزه در ایستگاه‌های مطالعه شده

| دوره بازگشت‌های متغیر در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار |                    | ایستگاه                  |                             | دوره بازگشت تک‌متغیره (سال) |
|---|--------------------|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $X < x$ and $Y < y$   | $X < x$ or $Y < y$ | تنگ پنج-سزار ( $m^3/s$ ) | تنگ پنج-بختیاری ( $m^3/s$ ) |                             |
| ۲/۱۵  | ۱/۸۷               | ۱۱/۶۹                    | ۳۵/۵۴                       | ۲                           |
| ۶/۰۳  | ۴/۲۷               | ۷/۴۵                     | ۲۸/۱۵                       | ۵                           |
| ۱۴/۵۳   | ۷/۶۲               | ۵/۹۳                     | ۲۳/۸۳                       | ۱۰                          |
| ۳۹/۲۱   | ۱۳/۴۲              | ۴/۹۰                     | ۱۹/۸۵                       | ۲۰                          |
| ۱۷۳/۸۲  | ۲۹/۲۰              | ۳/۹۴                     | ۱۴/۸۰                       | ۵۰                          |
| ۵۹۸/۶۱  | ۵۴/۵۶              | ۳/۳۸                     | ۱۱/۰۵                       | ۱۰۰                         |

- [2]. Salvadori G, De Michele C. On the use of copulas in hydrology: theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*. 2007;12(4):369-80.
- [3]. Salari Jazi M. Assessment of the Flooding Risk for River with Tidal Interaction Zones. PhD Thesis. 2013.
- [4]. Sklar M. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Université Paris. 1959.
- [5]. Frees EW, Valdez EA. Understanding relationships using copulas. *North American actuarial journal*. 1998; 2(1):1-25.
- [6]. Favre AC, El Adlouni S, Perreault L, Thiémonge N, Bobée B. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water resources research*. 2004; 40(1): 25-39.
- [7]. Brunner MI, Seibert J, Favre AC. Bivariate return periods and their importance for flood peak and volume estimation. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water*. 2016; 3(6):819-33.
- [8]. Duan K, Mei Y, Zhang L. Copula-based bivariate flood frequency analysis in a changing climate—A case study in the Huai River Basin, China. *Journal of Earth Science*. 2016; 27(1):37-46.
- [9]. Serinaldi F. A multisite daily rainfall generator driven by bivariate copula-based mixed distributions. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. 2009; 114(10): 70-91.
- [10]. Seo BC, Krajewski WF, Mishra KV. Using the new dual-polarimetric capability of WSR-88D to eliminate anomalous propagation and wind turbine effects in radar-rainfall. *Atmospheric Research*. 2015; 153:296-309.
- [11]. Mirabbasi R, Anagnostou EN, Fakheri-Fard A, Dinpashoh Y, Eslamian S. Analysis of meteorological drought in northwest Iran using the Joint Deficit Index. *Journal of Hydrology*. 2013; 492:35-48.
- [12]. Abdi A, Hassanzadeh Y, Talatahari S, Fakheri-Fard A, Mirabbasi R. Parameter estimation of copula functions using an optimization-based method. *Theoretical and Applied Climatology*. 2016. DOI: 10.1007/s00704-016-1757-2.
- [13]. Joe H. Multivariate models and multivariate dependence concepts. CRC Press. 1997.
- [14]. Eberhart R, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory. In *Micro Machine and Human Science*, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on 1995, (pp. 39-43). IEEE.

## نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه استفاده از توزیع‌های تک‌متغیره در تحلیل فراوانی پارامترهای هیدرولوژیک نظیر بارش، سیلاب، جریان کمینه، خشکسالی و غیره در تعیین معیارهای طراحی به صورت یک شیوه استاندارد درآمده است، کاربرد توزیع‌های چندمتغیره با وجود داشتن ویژگی‌های منحصر به فرد، کمتر بررسی شده است. در این مطالعه به منظور تحلیل چندمتغیره جریان‌های کمینه حوضه آبریز دز در محل ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار از توابع مفصل استفاده شد. یکی از مراحل مهم کاربرد توابع مفصل در مسائل هیدرولوژیک تخمین مناسب پارامتر وابستگی آن است. به طوری که عدم تخمین صحیح می‌تواند موجب برآوردهای خلاف واقع شود. بنابراین، در این مطالعه از دو روش IFM و الگوریتم PSO برای تخمین پارامتر وابستگی مفصل بهره گرفته شد. روش IFM، یک روش پرکاربرد در این زمینه است. نتایج این دو روش براساس معیارهای تعریف شده در این مطالعه ارزیابی شد. با مقایسه نتایج مشاهده شد که روش PSO نسبت به روش IFM از دقت بیشتر و خطای کمتری در برآورد پارامتر مفصل برخوردار بود. پس از انتخاب مفصل مناسب توزیع توأم برای جریان کمینه ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار محاسبه شد. سپس تحلیل فراوانی توأم با در نظر گرفتن دو حالت «یا» و «و» برای رخداد پدیده مد نظر انجام شد. نتایج نشان داد در ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار برای حالت «یا»، با افزایش دوره بازگشت، میزان جریان کمینه در هر دو ایستگاه کاهش می‌یابد و احتمال بروز خشکسالی و کاهش جریان در یکی از رودخانه‌های متصل به هم با فواصل زمانی کوتاه‌تری رخ می‌دهد. همچنین در حالت «و» برای ایستگاه‌های تنگ پنج-بختیاری و تنگ پنج-سزار نیز دوره بازگشت وقوع رخداد مد نظر به شدت افزایش یافت.

## منابع

- [1]. Bahremand A, Alvandi E, Bahrami M, Dashti Marvili M, Heravi H, Khosravi GHR, et al. Copula functions and their application in stochastic hydrology. *Journal of Conservation and Utilization of Natural Resources*. 2015; 4 (2):1-20. [Persian]

- [15]. Reddy MJ, Singh VP. Multivariate modeling of droughts using copulas and meta-heuristic methods. *Stochastic environmental research and risk assessment*. 2014; 28(3):475-89.
- [16]. Rakhecha PR. Probable maximum precipitation for 24-h duration over an equatorial region: Part 2-Johor, Malaysia. *Atmospheric Research*. 2007; 84(1):84-90.
- [17]. Khalili K, Tahoudi MN, Mirabbasi R, Ahmadi F. Investigation of spatial and temporal variability of precipitation in Iran over the last half century. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2016; 30(4):1205-21.
- [18]. Zahedianfar F, Ghorbani Kh, Meftah Halaghi M, Abdolhosseini m, and Dehghani A. Flood Frequency Analysis on the basis of extreme values theory (Case study: Arazkuseh hydrometric station, Golestan). *Journal of Water and Soil Conservation*. 2015; 22(3): 115-135. [Persian]
- [19]. Zhang Q, Chen YD, Chen X, Li J. Copula-based analysis of hydrological extremes and implications of hydrological behaviors in the Pearl River basin, China. *Journal of Hydrologic Engineering*. 2011;16(7): 598-607.
- [20]. Hosking JR, Wallis JR. The effect of intersite dependence on regional flood frequency analysis. *Water Resources Research*. 1988; 24(4): 588-600.
- [21]. Nelsen RB. *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media. 2007.
- [22]. Eberhart R, Simpson P, Dobbins R. *Computational intelligence PC tools*. Academic Press Professional, Inc. 1996.
- [23]. Shi Y, Eberhart RC. Parameter selection in particle swarm optimization. In *International Conference on Evolutionary Programming 1998 Mar 25* (pp. 591-600). Springer Berlin Heidelberg.
- [24]. Hamed Ensaniyat, N. *Daily Runoff Simulation Using the PSO Algorithm in Catchment Model Optimization*. Msc Thesis. 2013. [Persian]
- [25]. Nash JE, Sutcliffe JV. River flow forecasting through conceptual models part I—A discussion of principles. *Journal of hydrology*. 1970; 10(3): 282-90.
- [26]. Yue S, Rasmussen P. Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrological Processes*. 2002; 16(14):2881-98.

Archive