

تأثیر نویززدایی سری زمانی بر تحلیل آن با استفاده از نظریه نظم در بی‌نظمی (مطالعه موردی: رودخانه زاینده‌رود)

مهسا بوستانی^۱، سعید فرزین^{۲*}، سید فرهاد موسوی^۳، حجت کرمی^۲

۱. دانشجوی دکترای گروه مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

۲. استادیار گروه مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

۳. استاد گروه مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

(تاریخ دریافت ۱۳۹۷/۰۳/۰۱؛ تاریخ تصویب ۱۳۹۷/۰۸/۱۳)

چکیده

در پژوهش حاضر، ویژگی‌های غیرخطی جریان ماهانه رودخانه زاینده‌رود، در دو حالت قبل و بعد از نویززدایی، با استفاده از نظریه آشوب، طی ۴۳ سال (۱۳۵۰ تا ۱۳۹۲) در چهار ایستگاه هیدرومتری ارزیابی شده است. برای تعیین روند آشوبی یا تصادفی بودن جریان رودخانه زاینده‌رود، ابتدا به بازسازی فضای حالت پرداخته شده است. به این دلیل، زمان تأخیر بهینه و بُعد محاط با استفاده از روش‌های میانگین اطلاعات متقابل و الگوریتم نزدیک‌ترین همسایگی کاذب محاسبه شده است. امکان وجود آشوب در دبی جریان ماهانه، در سری زمانی اصلی و نویزگیری شده، با استفاده از شاخص بُعد همبستگی بررسی شده است. بر اساس نتایج، بُعد همبستگی برای سری زمانی نویزگیری شده در ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله به ترتیب برابر ۵/۹۴، ۴/۶۳، ۲/۸۹ و ۳/۳۰ برآورد شده است. مقدار غیرصحیح این بُعد، بیان‌کننده رفتار آشوبناک دبی جریان ماهانه نویززدایی شده رودخانه زاینده‌رود در ایستگاه‌های یادشده است. نبود بُعد همبستگی در سری زمانی اصلی، نشان‌دهنده تصادفی بودن سیستم است. در ادامه، حساسیت به شرایط اولیه سیستم، به عنوان یک مشخصه سیستم‌های آشوبناک، با استفاده از آزمون نمای لیاپانوف بررسی شده است. سپس، افق پیش‌بینی جریان در ایستگاه‌های نویزگیری شده آشوبناک تعیین شده است که به ترتیب برابر ۳۶، ۴۱، ۴۵ و ۴۴ ماه است. یکی از راه‌کارهای مدیریت شرایط کم‌آبی و بحران منابع آب، پیش‌بینی جریان آب‌های سطحی است. با استفاده از داده‌های ماهانه نویزگیری شده رودخانه زاینده‌رود، امکان پیش‌بینی جریان با استفاده از روش‌های مختلف فراهم است که برای سری زمانی اصلی، این امر مقدور نیست.

کلیدواژگان: آزمون بُعد همبستگی، جریان ماهانه، حوضه زاینده‌رود، رفتار آشوبناک، فضای حالت، نویززدایی.

مقدمه

ظاهر نامنظم که توسط سیستم دینامیک غیر خطی معین تولید شده‌اند، در نظر گرفته می‌شوند. سیگنال‌های زمانی به دست آمده از پدیده‌های طبیعی، توسط نویز مخدوش شده‌اند. به بیان دیگر، نویز بخش ناخواسته داده‌ها محسوب می‌شود. در نتیجه، وجود نویز در مقادیر اندازه‌گیری شده، سبب به وجود آمدن خطا در سیستم می‌شود و تحلیل رفتار سیستم را با مشکل روبه‌رو می‌سازد. بنابراین، استفاده از روش‌های نویززدایی برای حذف نویز، در بهبود کارایی مدل‌ها کارکرد مهمی دارد. تا کنون تعداد مطالعات اندکی در زمینه کاهش نویز با استفاده از نظریه آشوب صورت گرفته است که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم. پراتو و ریدولفی برای نخستین بار تحقیقات اولیه درباره مفهوم نویز در تحلیل‌های آشوبی را وارد سیستم‌های هیدرولوژیکی کردند. آنها با استفاده از مدل آشوب به کاهش نویز سری‌های زمانی پرداختند. نتایج مطالعه آنها نشان دهنده بهبود عملکرد سری‌های نویززدایی شده نسبت به سری‌های اصلی بود. وجود نویز در داده‌ها، خودتشابهی در جاذب که از ویژگی‌های سیستم‌های آشوبناک است را به طور مشخص از بین می‌برد. همچنین، بازسازی فضای حالت در مقیاس‌های کوچک در بعدهای بزرگ‌تر انجام می‌شود. مسیرهای حالت نزدیک به هم به طور پراکنده از هم دور شده و اگر خواهند شد و موجب تصادفی به نظر رسیدن داده‌ها می‌شوند. از سوی دیگر، نتایج پیش‌بینی با خطا همراه می‌شود. بنابراین برای پیش‌بینی‌های دقیق، در صورت امکان باید به کاهش نویز در سری‌های زمانی پرداخته شود [۷]. کاهش نویز روندی حساس در تحلیل غیرخطی سری‌های زمانی است، زیرا داده‌های نویززدایی شده اساس تحلیل‌های سایر مراحل قرار می‌گیرند. هر گونه اشتباه در انجام این فرایند، خصوصیات داده‌ها را به شدت تغییر می‌دهد و به نتیجه‌گیری نادرست منجر می‌شود.

سیواکومار و همکاران تأثیر کاهش نویز سری‌های زمانی بر پیش‌بینی سیستم‌های قطعی هیدرولوژیک را بررسی کردند. آنها ابتدا روش غیرخطی کاهش نویز را روی داده‌های نویزدار شده یک سری زمانی مصنوعی بررسی کردند. سپس، این روش را برای کاهش نویز داده‌های واقعی هیدرولوژیک به کار بردند. نتایج بیان‌کننده افزایش دقت پیش‌بینی در سری‌های نویززدایی شده داشت [۸]. الشورباگی و همکاران توانایی الگوریتم غیر خطی کاهش نویز را در تخمین داده‌های مفقود شده جریان روزانه

رودخانه‌ها یکی از منابع مهم تأمین‌کننده آب مورد نیاز بشر هستند که در صورت شناخت ناقص و بی‌توجهی به فرایندهای واقع در آن، می‌تواند به خسارت‌های جبران‌ناپذیری منجر شود [۱]. در گذشته، رفتار سیستم‌های طبیعی عموماً به عنوان رفتاری غیر عادی و پیش‌بینی‌ناپذیر شناخته شده بود و اغلب آن را متأثر از عوامل تصادفی محیط می‌دانستند. آشوبناک بودن پدیده‌های طبیعی، بیان‌کننده نظمی در درون بی‌نظمی‌ها و ضابطه‌ای درون بی‌ضابطه‌ای هاست. شاید نتوان تعریف دقیقی برای بی‌نظمی بیان کرد، اما می‌توان آن را نوعی تصادفی بودن همراه با قطعیت دانست [۲]. امروزه برای تحلیل‌های دقیق، استفاده از روش‌های نوین به ضرورتی اجتناب‌ناپذیر تبدیل شده است [۳]. به علت تأثیرگذاری عوامل مختلف، رفتار یک حوضه آبخیز به فرایند نسبتاً پیچیده‌ای تبدیل می‌شود، بنابراین برای ارزیابی آن، اغلب از مدل‌های هیدرولوژیکی استفاده می‌شود [۴]. نظریه آشوب، مطالعه کمی و کیفی رفتار به‌ظاهر نامنظم و ناپایدار سیستم دینامیک غیر قطعی است که ممکن است از روابط معین، مشخص و ساده‌ای ناشی شده باشد. ادوارد لورنز^۱، دانشمند هواشناس، نخستین شخصی بود که از طریق محاسبات عددی و شبیه‌سازی رایانه‌ای، به معنای آشوب پی برد. وی متوجه شد که کوچک‌ترین تغییر در شرایط اولیه سبب تغییر الگوهای رفتاری می‌شود. به گونه‌ای که پاسخ به دست آمده، کاملاً متفاوت می‌شود و بر این اساس، موضوع جنجالی اثر پروانه‌ای مطرح شد و پیش‌بینی وضعیت آب و هوا برای مدت طولانی مسلم شد [۵]. به این ترتیب، گروهی از دانشمندان به جای آنکه تغییرات در الگوهای رفتاری سیستم به ازای تغییر کوچک در شرایط اولیه را به موضوع اغتشاش و آثار نویز از محیط روی سیستم ربط دهند، به ماهیت رفتار دینامیک پویای غیر خطی و درون سیستم مربوط دانستند. یافته‌های لورنز چنان بنیادین بود که موجی را برای گسترش تحقیق درباره ماهیت آشوب به راه انداخت. امروزه، نظریه آشوب، کاربردهای پیشرفته‌ای در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی در علوم مختلف مانند هواشناسی، زمین‌شناسی، دریاشناسی و هیدرولوژی یافته است [۶].

برای تحلیل‌های آشوبی، سری زمانی به عنوان داده‌هایی به

1. Edward Lorenz

مواد و روش‌ها

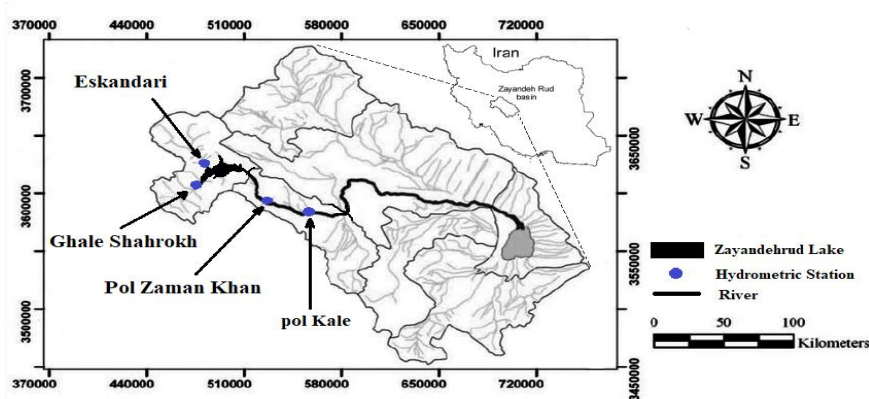
معرفی منطقه مطالعاتی

زاینده‌رود مهم‌ترین حوضه داخلی ایران است که تنها رودخانه دائمی حوضه مرکزی به نام زاینده‌رود در آن جریان دارد. رودخانه یادشده یکی از عوامل مهم پیدایش، پایداری و استمرار حیات طی چند هزار سال گذشته در بخش مرکزی ایران بوده است [۱۳]. طول این رودخانه ۳۵۰ کیلومتر است و در انتها به تالاب گاوخونی منتهی می‌شود. این حوضه در بین طول‌های جغرافیایی $50^{\circ}21'$ و $53^{\circ}20'$ شرقی و عرض‌های جغرافیایی $31^{\circ}15'$ و $33^{\circ}45'$ شمالی واقع شده است. قسمت بالادست سد زاینده‌رود دو ایستگاه آب‌سنجی ورودی دارد، یعنی ایستگاه آب‌سنجی اسکندری که جریان آب ورودی از طریق تونل‌های خدنگستان، چشمه‌لنگان و رودخانه پلاسجان از منطقه فریدون‌شهر را می‌سنجد و ایستگاه آب‌سنجی قلعه شاهرخ که میزان آب ورودی به سد از استان چهارمحال و بختیاری را اندازه‌گیری می‌کند. پس از سد زاینده‌رود نیز ایستگاه‌های آب‌سنجی پل زمانخان و پل کله برای مطالعه انتخاب شدند. فاصله ایستگاه‌های هیدرومتری پل زمانخان و پل کله از سد زاینده‌رود، به‌صورت سد-پل زمانخان برابر ۴۳۷۲۶ متر و سد-پل کله ۷۹۳۶۰ متر است که در فاصله یادشده ورود آب به‌صورت زهکش و همچنین برداشت آب برای مصارف کشاورزی، صنعت و شرب در میزان دبی جریان رودخانه دخیل‌اند. بنابراین، دبی جریان رودخانه زاینده‌رود در فاصله یادشده به‌صورت تنظیم‌شده نیست. موقعیت جغرافیایی حوضه زاینده‌رود و ایستگاه‌های مد نظر در شکل ۱ ارائه شده است.

رودخانه اونتاریوی انگلیس بررسی کردند. آنها در مطالعات خود به این نتیجه رسیدند که بهتر است از داده‌های خام، به‌عنوان اساس تحلیل‌های آشوبی استفاده شود [۹]. آن‌جی و همکاران در بررسی‌های آشوب‌پذیری سری‌های زمانی، استفاده از مجموعه داده‌های خام را مناسب دانستند. آنها با حذف و یا اصلاح نویز به این علت که نویز موجود به‌صورت طبیعی رخ داده است، مخالفاند [۱۰].

فتاحی به بررسی تحلیل‌های آشوبی قبل و بعد از نوپزدایی جریان ماهانه سه ایستگاه هیدرومتری واقع در استان فارس، با استفاده از روشی بر پایه موجک پرداخت. ایشان مشاهده کردند سری‌هایی که رفتار تصادفی از خود نشان می‌دادند، پس از نوپزدایی، رفتاری آشوبناک دارند و از یک سیستم آشوبی به‌وجود آمده‌اند [۱۱].

رضایی و جباری قره‌باغ سری اصلی و نوپزدایی‌شده جریان روزانه رودخانه نازلوچای، واقع در ارومیه را با تحلیل‌های آشوبی بررسی کردند. نتایج پژوهش آنها کاهش ۶۰/۷ درصدی بُعد همبستگی و افزایش دقت مدل تقریب موضعی برای سری نوپزدایی‌شده نسبت به سری اصلی داده‌ها را نشان داد [۱۲]. با توجه به امکان وجود نویز در داده‌های هیدرولوژیک، استفاده از روش‌های نوین به‌منظور کاهش نویز، تأثیر بسزایی در تحلیل فرایندهای هیدرولوژیک و در پی آن برنامه‌ریزی و مدیریت منابع آب دارد. به این دلیل، در تحقیق حاضر تأثیر نوپزدایی در تحلیل‌های آشوبی جریان ماهانه رودخانه زاینده‌رود که جایگاه مهمی در تأمین آب منطقه مرکزی ایران دارد، طی ۴۳ سال دوره آماری، بررسی شده است. ایستگاه‌های استفاده‌شده در این رودخانه اسکندری و قلعه شاهرخ در بالادست دریاچه زاینده‌رود و پل زمانخان و پل کله در پایین‌دست آن است.



شکل ۱. حوضه زاینده‌رود و موقعیت ایستگاه‌های هیدرومتری در آن

جدول ۱. مشخصات آماری داده‌های ماهانه دبی جریان رودخانه زاینده‌رود

چولگی	کمترین داده (m3/s)	بیشترین داده (m3/s)	انحراف معیار (m3/s)	میانگین (m3/s)	تعداد داده	ایستگاه
۳/۰۰۴	۰/۰۰۲	۴۷/۴۷	۵/۳۲	۴/۲۶	۵۱۶	اسکندری
۱/۶۷	۵/۴۶	۲۱۴/۹۱	۳۴/۳۹	۳۸/۸۷	۵۱۶	قلعه شاهرخ
۱/۶۰	۴/۶	۱۶۶/۲۳	۲۵/۸۸	۴۵/۳۴	۵۱۶	پل زمانخان
۱/۰۸	۱/۰۱	۱۷۱/۶۲	۲۵/۷۷	۳۷/۶۶	۵۱۶	پل کله

بازسازی فضای حالت (فضای فاز)

یکی از ابزارهای ریاضی برای تحلیل سیستم‌های دینامیک غیرخطی، استفاده از مفهوم فضای حالت است که از مشخصات هندسی فضای فاز می‌توان به نوع سیستم دینامیک پی برد. در سیستم‌های طبیعی معمولاً مدلی از سیستم به صورت صریح در دسترس نیست و فقط یک سری زمانی یک‌بعدی $x(t)$ ، شامل مقادیر اسکالر اندازه‌گیری شده از مشاهدات سیستم به صورت $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ به‌عنوان خروجی سیستم در دسترس است. در چنین شرایطی

نمی‌توان رفتار سیستم را به‌طور مستقیم تشخیص داد و برای بررسی آن می‌توان از بازسازی فضای حالت استفاده کرد. روش مرسوم برای بازسازی فضای حالت، استفاده از روش محاط سازی تاکنر است [۱۴]. در این روش مقادیر متغیر x حاصل از یک سیستم دینامیک که در فواصل زمانی Δt نمونه‌برداری شده‌اند، به‌صورت $x[n] = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^{(n+1)}$ در دسترس است. سپس، یک زمان تأخیر (τ) انتخاب کرده و مجموعه بردارهای $\{\xi_0^m | \xi_i \in R^{m \times 1}\}$ را به صورت رابطه ۱ می‌توان ایجاد کرد:

$$\begin{bmatrix} \xi_0^m \\ \xi_1^m \\ \vdots \\ \xi_{(n+1)-(m-1)\tau}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) & x(t+\tau) & \dots & x(t+(m-1)\tau) \\ x(t_1) & x(t_1+\tau) & \dots & x(t_1+(m-1)\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(t_n-(m-1)\tau) & x(t_n-m\tau) & \dots & x(t_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

هر یک از بردارهای $\{\xi_i | \xi_i \in R^{m \times 1}, i=0,1,\dots,(n+1)-(m-1)\tau\}$ نقطه‌ای را در فضای حالت تصویر می‌کنند که از اتصال این نقاط، فضای حالت سیستم دینامیک بررسی شده ترسیم می‌شود. بنابراین، باید به دنبال نگاشتی از جاذب سیستم به فضای بازسازی شده بود، به‌صورتی که این نگاشت یک‌به‌یک باشد و تمامی اطلاعات سیستم را حفظ کند که این مفهوم محاط (m) است. فضای حالت باید طوری بازسازی شود که یک نگاشت یک‌به‌یک بین تمامی نقاط در فضای زمان-مکان و نقاط نظیر آنها در فضای حالت برقرار شود. با استفاده از فضای حالت یک سیستم دینامیک، می‌توان به مطالعه خواص دینامیکی و هندسی آن پرداخت و با توجه به حالات سیستم در مدت‌زمان کافی، به وضعیت آینده سیستم پی برد. برای تعیین زمان تأخیر یک سری زمانی می‌توان از روش میانگین متقابل (AMI) استفاده کرد. در روش AMI، تابع میانگین متقابل متقابل به عنوان یک تابع همبستگی غیرخطی

بین $x(t)$ و $x(t+\tau)$ که با τ به یکدیگر مرتبط می‌شوند، برای تعیین زمان تأخیر مناسب استفاده می‌شود.

$$I(\tau) = \sum_{x(t), x(t+\tau)} P(x(t), x(t+\tau)) \ln \frac{p(x(t), x(t+\tau))}{p(x(t)) \cdot p(x(t+\tau))} \quad (2)$$

که در رابطه یادشده $p(x(t), x(t+\tau))$ احتمال مشترک سری زمانی اصلی و تأخیر یافته را نشان می‌دهد [۱۵]. زمان تأخیری که به ازای تابع اطلاعات متقابل میانگین از اولین مینیمم محلی خود عبور می‌کند، به‌عنوان زمان تأخیر مناسب انتخاب می‌شود.

همچنین، برای محاسبه بُعد محاط از روش شمارش نزدیک‌ترین همسایه‌های کاذب که یکی از روش‌های متداول برای محاسبه بُعد سری زمانی است، استفاده شده است. هدف از محاسبه بُعد محاط بهینه سیستم، به‌دست آوردن کمترین بُعدی است که در آن ساختار جاذب در فضای حالت وجود دارد. بر این اساس، اگر Y_j

$$D = \lim_{K \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln C^M(K)}{\ln K} \right) \quad (۴)$$

و بُعد همبستگی عبارت است از (رابطه ۵):

$$D = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln D^M \quad (۵)$$

اگر D^M محاسبه شده برای یک سری با افزایش M مدام افزایش یابد، بیان می‌کند که فرایند ایجادکننده سری تصادفی است. در غیر این صورت، اگر D^M به ثبات نسبی برسد، بر معین بودن سری دلالت خواهد داشت. مشکلی که در زمینه اندازه‌گیری شاخص‌های یادشده وجود دارد این است که در حالت‌های با مشاهدات کم، این امکان وجود دارد که K طوری انتخاب شود که عملاً فاصله هیچ دو نقطه‌ای در این دامنه قرار نگیرد. برای رفع این مشکل Brock and Sayers آماره جدیدی را به شرح زیر معرفی کردند (رابطه ۶):

$$SC^M = \left(\frac{\ln C^M(K_t) - \ln C^M(K_{t-1})}{\ln(K_t) - \ln(K_{t-1})} \right) \quad (۶)$$

اگر آماره SC در مقادیر کم به مقدار ثابتی گرایش پیدا کند، دلالت بر این دارد که سری مد نظر از یک فرایند آشوبناک پیروی می‌کند [۱۸].

بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف

ویژگی اثر پروانه‌ای در سیستم‌های آشوبناک سبب می‌شود که در برابر تغییرات جزئی در مقادیر اولیه آنها، تغییرات بسیار زیادی در رفتار آتی آنها دیده شود. این ویژگی سیستم‌های آشوبناک توضیح می‌دهد که چگونه تغییرات و دگرگونی‌های کوچک، می‌تواند بر سیستم‌های بزرگ و پیچیده همچون الگوهای آب و هوایی، تأثیرگذار باشد. در گذشته، سیستم‌هایی که از اثر پروانه‌ای پیروی می‌کردند از گستره مطالعات علمی کنار گذاشته می‌شدند و در گروه سیستم‌های تحلیل‌ناپذیر قرار می‌گرفتند. اما امروزه این سیستم‌ها مورد توجه دانشمندان است و می‌کوشند مسائلی که در گذشته تصادفی و بی‌نظم برداشت می‌شدند را با تئوری آشوب بررسی و تحلیل کنند.

آزمون نمای لیاپانوف بر اساس این ویژگی سری‌های آشوبی است که نقاط مجاور در این سری‌ها به مرور زمان از هم جدا شده و نسبت به هم واگرا می‌شوند. نمای لیاپانوف این واگرایی را به‌وسیله یک تابع نمایی اندازه‌گیری می‌کند. محاسبه نمای لیاپانوف از طریق

نقطه‌ای از جاذب بازسازی شده در فضای حالت m بُعدی سیستم باشد و Y_j^{NN} نزدیک‌ترین همسایه Y_j باشد، وضعیت رفتار این نقطه و همسایه‌اش در فضای فاز $m+1$ بُعدی بررسی می‌شود. اگر Y_j^{NN} با افزایش بُعد فضای حالت از Y_j دور شود، نشانه‌ای از نزدیک‌ترین همسایه کاذب از Y_j است که در این بازه از جاذب، در بُعد m ظاهر شده است. در یک فضای حالت با بُعد مشخص m ، وقتی درصد این همسایگان کاذب در کل جاذب به صورت مشخص کاهش یابد؛ ساختار هندسی جاذب آشوبی آشکار می‌شود و این بُعد به عنوان بُعد محاط بهینه برای جاذب سیستم در نظر گرفته می‌شود [۱۶].

آزمون بُعد همبستگی

آزمون بُعد همبستگی خصوصیات ویژه یک فرایند تصادفی در مقایسه با فرایند آشوبی را دارد. یک فرایند تصادفی ابعاد پیوسته (بی‌نهایت) دارد. اما، یک فرایند آشوبی ابعاد محدودتری دارد؛ یعنی مجموعه نقاطی دارد که مسیر زمانی به آن محدود شده است. بنابراین، می‌توان از روی محاسبه ابعاد یک سری، به فرایند ایجادکننده آن دست یافت. مطابق این روش، اگر دامنه سری زیاد باشد، بیان‌کننده فرایند تصادفی است. در غیر این صورت، فرایند آشوبی خواهد بود. بُعد همبستگی با استفاده از متغیری به نام انتگرال همبستگی که از سوی Grassberger and Procaccia معرفی شده به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۷]. سری مانای x_t را در نظر بگیرید ($t = 1, 2, 3, \dots, T$). می‌توان x_t را در فضای m بُعدی به صورت $X_t^m = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$ تعریف کرد. انتگرال همبستگی از درجه m همبستگی فضایی بین T نقطه پراکنده در فضای m بُعدی را اندازه‌گیری می‌کند و از بین آنها بخشی از نقاط دوتایی m بُعدی، یعنی (X_t^m, X_s^m) را که فاصله هایشان از یکدیگر کمتر از شعاع ثابت K است، انتخاب می‌کند. بنابراین، انتگرال همبستگی به صورت رابطه ۳ تعریف می‌شود:

$$C_T^m(K) = \frac{\sum_{t < s} |X_t^m - X_s^m| < K}{T_m(T_m - 1)} \quad (۳)$$

که T حجم نمونه شامل نقاطی از بردار x و $T_m = T - m - 1$ هستند. گراسبرگر و پروکاشیا (۱۹۸۳) نشان دادند برای مقادیر کوچک K می‌توان نوشت $C^M(K) = K^D$ که D بُعد سیستم را نشان می‌دهد. بُعد همبستگی با بُعد M عبارت است از (رابطه ۴):

مدیریت منابع آب در کشور نیز تصمیم‌گیری کوتاه‌مدت و انعطاف‌پذیر به‌منظور برنامه‌ریزی و بهره‌برداری از منابع اهمیت زیادی دارد. با توجه به بزرگ‌ترین نمای لیپانوف به‌دست‌آمده از رابطه ۸، مقدار افق پیش‌بینی (Δt) به‌صورت رابطه ۸ محاسبه می‌شود:

$$(\Delta t) = \frac{1}{\lambda} \quad (۸)$$

که در این رابطه λ بزرگ‌ترین نمای لیپانوف است [۲۱].

کاهش نویز با استفاده از نظریه آشوب

در سیستم آشوبی، باید بین دو نوع نویز اندازه‌گیری و نویز دینامیک تفاوت قائل بود. به این ترتیب که نویز اندازه‌گیری شامل انحراف از مشاهدات به وسیله خطاهایی می‌شود که به دینامیک سیستم بستگی ندارد و به زمان اندازه‌گیری مربوط می‌شود. چنان که با توجه به دینامیک سیستم، مقدار واقعی مشاهدات در زمان n ، برابر X_n است. در صورتی که اندازه‌گیری‌های اسکالر عبارت‌اند از: $S_n = S(X_n) + \eta_n$ ، که در آن $S(X)$ تابع ملایمی است که به نداشت نقاط روی جاذب به مقادیر واقعی منجر می‌شود. η_n ها اعداد تصادفی هستند و سری اعداد تصادفی $\{\eta_n\}$ به‌عنوان نویز اندازه‌گیری شناخته می‌شوند. نویز دینامیک فرایندی بازخوردی است که در آن، سیستم در هر گام زمانی با یک مقدار کوچک تصادفی مختل شده و نتیجه آن به گام زمانی بعدی منتقل می‌شود [۵]:

$$X_{n+1} = F(X_n + \eta_n) \quad (۹)$$

در سیستم‌های دینامیک قطعی آشوبی، برای کاهش نویز از روش غیرخطی استفاده می‌شود. هدف این روش، جایگزینی اندازه‌گیری‌های نویزدار با بهترین مقداری است که نویز کمتری دارد. ایده اصلی روش یادشده به این صورت است که سیر تکامل سیستم توسط نگاشت $X_n = f(x_{n-m}, \dots, x_{n-1})$ قطعی در نظر گرفته می‌شود. در حالی که f برای ما ناشناخته بوده و تمامی اطلاعات در دسترس از سیستم، سری زمانی اندازه‌گیری‌های نویزدار است: $S_n = X_n + \eta_n$ که در آن η_n ، نویز تصادفی با داشتن تابع خودهمبستگی است که به‌سرعت کاهش می‌یابد و بدون همبستگی با سیگنال X_n است. اگر سری زمانی بدون نویز باشد، مسیرهای حالت سیستم قطعی در فضای حالت، به شکل منظم هندسی خواهند بود. اما با وجود نویز،

اندازه‌گیری مقدار کشیدگی یا خمیدگی که در حرکت سیستم رخ می‌دهد، انجام می‌شود [۱۹]. در واقع، این روش سرعت متوسطی که مسیرهای انتقالی دونقطه‌ای که ابتدا به هم نزدیک بوده‌اند و به‌طور نمایی از یکدیگر منحرف می‌شوند را محاسبه می‌کند. اگر بزرگ‌ترین نمای محاسبه‌شده لیپانوف مقدار مثبتی داشته باشد، سیستم دارای رفتار آشوبی است و به عکس، نمای لیپانوف به‌صورت رابطه ۷ قابل ارائه است:

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right| \quad (۷)$$

برای سری‌های آشوبناک مقدار توان لیپانوف مثبت و در غیر این صورت منفی است. λ می‌تواند مقادیر مثبت، منفی و صفر را به شرح زیر اختیار کند:

۱. اگر $\lambda < 0$ به دست آمد، آن‌گاه یک نقطه ثابت یا یک چرخه متناوب پایدار خواهیم داشت. به بیان دیگر، تمامی نقاط انتخابی، به یک نقطه ثابت یا چرخه متناوب، همگرا خواهند شد. به این سیستم‌ها پایدار مجانب گفته می‌شود. با افزایش منفی $(\lambda \rightarrow -\infty)$ پایداری سیستم افزایش می‌یابد. به طوری که برای $\lambda = -\infty$ یک نقطه ثابت یا یک چرخه متناوب فوق پایدار وجود دارد.
۲. اگر $\lambda = 0$ باشد، سیستم فقط حول یک نقطه ثابت نوسان می‌کند. در این حالت هر نقطه اولیه انتخابی، حول یک چرخه حدی پایدار نوسان می‌کند. این نوع سیستم موسوم به پایدار لیپانوف است.
۳. اگر $\lambda > 0$ باشد، هیچ نقطه ثابت و یا چرخه متناوب پایداری وجود ندارد. در حقیقت، نقاط ناپایدار ولی سیستم کران‌دار و آشوبناک است. در این حالت به دلیل حساسیت زیاد به شرایط اولیه، مسیرهای نزدیک به هم به سرعت واگرا می‌شوند [۲۰].

برآورد افق پیش‌بینی قابل اعتماد برای سری زمانی

وابستگی به شرایط اولیه در سیستم‌های آشوبناک سبب کاهش دقت پیش‌بینی در بازه‌های زمانی بلندمدت می‌شود. بنابراین، رفتار کوتاه‌مدت سیستم غیرخطی می‌تواند به‌طور مناسب قابل پیش‌بینی باشد، اما پیش‌بینی بلندمدت در سیستم آشوبناک به دلیل نبود آگاهی از رویدادهای آینده، تحت تأثیر احتمالات است. در زمینه

بازسازی شده است. تئوری تاکنز روش مناسبی برای بازسازی فضای فاز یک سیستم دینامیک براساس سری زمانی حاصل از یک متغیر سیستم فراهم می‌کند. در کاربرد این تئوری تعیین زمان تأخیر و بُعد محاط اهمیت زیادی دارد و با توجه به بُعد محاط و زمان تأخیر فضاهای فاز متفاوتی از یک سیستم به دست می‌آید. بنابراین، با استفاده از داده‌های ماهانهٔ جریان رودخانهٔ زاینده‌رود به محاسبهٔ زمان تأخیر بهینه، در دو سری زمانی اصلی و نویزگیری شده، پرداخته شده است. به این منظور، برای ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله با استفاده از روش میانگین اطلاعات متقابل (AMI) زمان تأخیر بهینه به دست آمد.

برای جداسازی ویژگی‌های اصلی سری زمانی مطالعه‌شده از نویز، از مدل تیسن استفاده شده است. تغییرات دبی جریان ماهانهٔ رودخانهٔ زاینده‌رود، در سری زمانی اصلی و پس از نویززدایی در شکل ۲ نشان داده شده است.

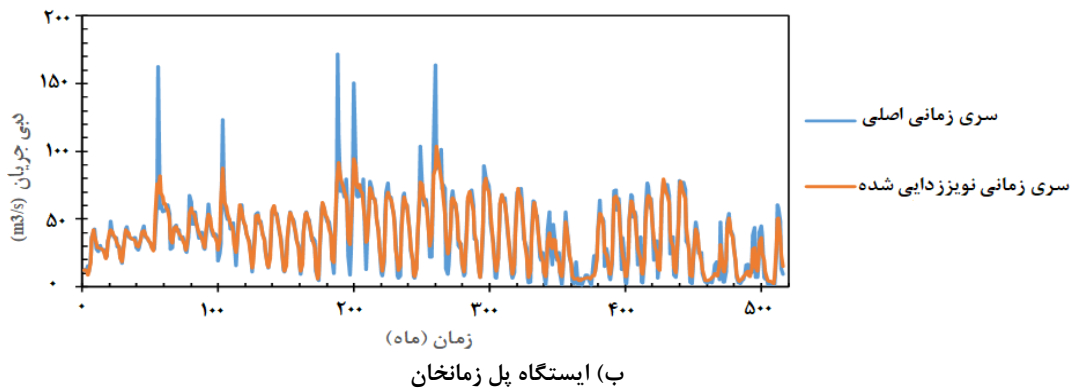
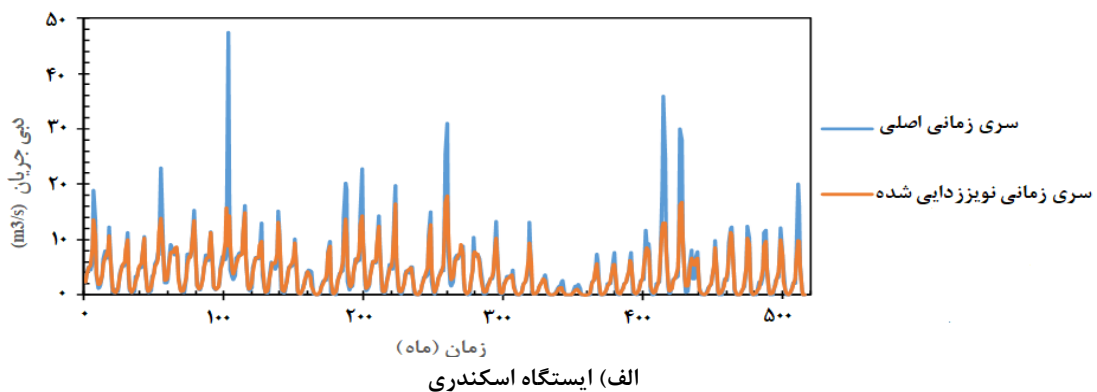
نقاط در فضای حالت بازسازی‌شده روی مسیره‌های حالت حقیقی خود نیستند، بلکه به‌طور پراکنده اطراف آن را خواهند گرفت. برای دست‌یابی به مقدار صحیح و بدون نویز نقاط، مقادیر اندازه‌گیری‌شده را با مقادیر برآوردشده \hat{X}_n جایگزین و تصحیح می‌کنیم. این مقدار برآوردشده بر مبنای اندازه‌گیری‌های گذشته خواهد بود:

$$\hat{X}_n = \hat{f}(S_{n-m}, \dots, S_{n-1}) \quad (10)$$

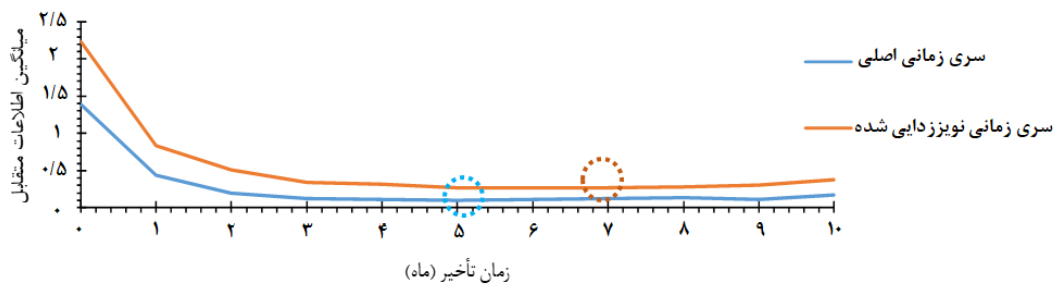
در تحقیق حاضر از روش شریبر [۲۲] با استفاده از نرم‌افزار تیسن، هگر و همکاران [۲۳] برای کاهش نویز استفاده شده است.

نتایج و بحث

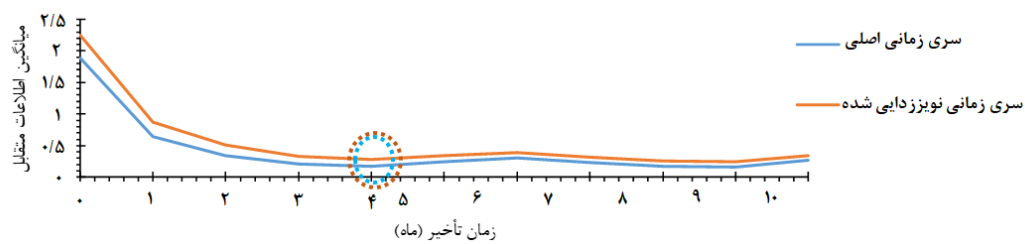
برای بررسی رفتار جریان رودخانهٔ زاینده‌رود قبل و بعد از نویززدایی آن، به تعیین هر یک از پارامترهای آشوبی، در سری زمانی اصلی و نویززدایی‌شده پرداخته شده است. ابتدا نویززدایی داده‌های جریان ماهانه با استفاده از نرم‌افزار تیسن انجام شده و سپس فضای حالت، به روش تاکنز



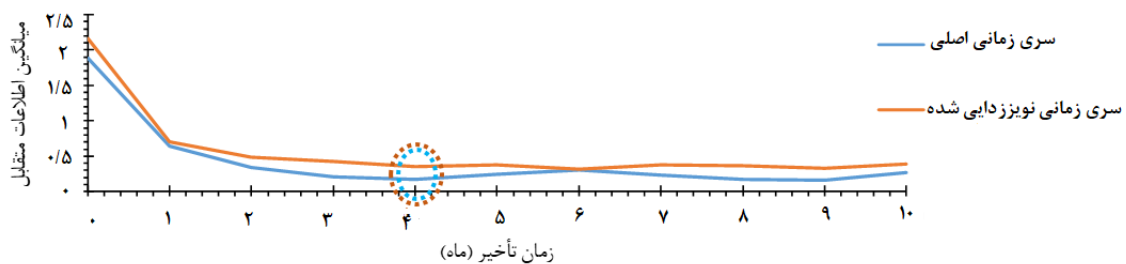
شکل ۲. سری زمانی اصلی و نویززدایی‌شدهٔ دبی جریان ماهانهٔ رودخانهٔ زاینده‌رود برای ایستگاه اسکندری در بالادست دریاچهٔ زاینده‌رود و ایستگاه پل زمانخان در پایین‌دست آن



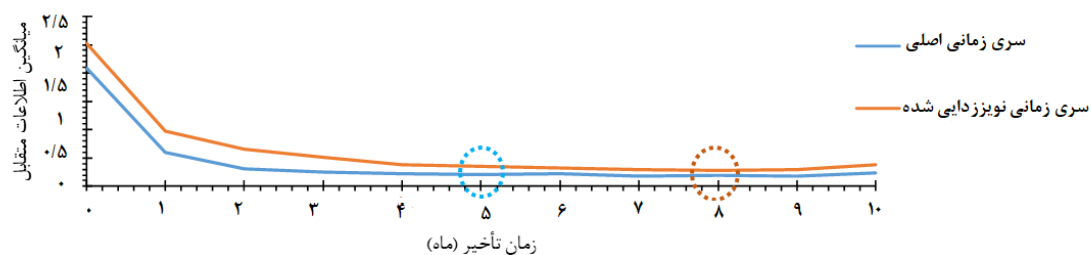
الف) ایستگاه اسکندری



ب) ایستگاه قلعه شاهرخ



ج) ایستگاه پل زمانخان



د) ایستگاه پل کله

شکل ۳. نمودارهای زمان تأخیر مربوط به سری زمانی اصلی و نوبزگیری شده جریان در مقیاس ماهانه

مقدار بُعد محاط با استفاده از روش نزدیک ترین همسایگی کاذب محاسبه شده است. بُعد محاطی مناسب است که تعداد همسایه‌های کاذب آن به صفر رسیده باشد. مقدار کم بُعد محاط نشان دهنده بُعد کم سیستم است. یعنی در این بُعد، سیستم رفتار دینامیک غیر خطی دارد. مقادیر زمان تأخیر و بُعد محاط برای ایستگاه‌های بررسی شده، برای سری زمانی

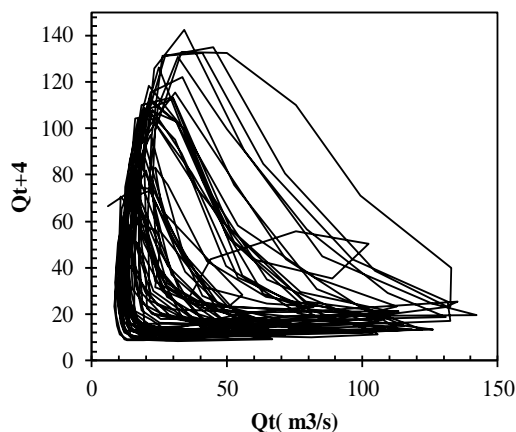
نمودارهای زمان تأخیر در شکل ۳ ارائه شده است. در شکل یاد شده دایره‌های آبی برای سری اصلی و دایره‌های نارنجی برای سری نوبز دایی شده، نشان دهنده نخستین مینیمم محلی، بیان کننده زمان تأخیر بهینه برای دبی جریان ماهانه است. در این روش، اولین کمینه محلی از میانگین اطلاعات متقابل به عنوان زمان تأخیر در نظر گرفته شده و

الگوی فراکتالی دارد. از این الگوهای فراکتالی با عنوان «تعیین پذیری پنهان» سیستم یاد می‌شود. به این دلیل، حساسیت به شرایط اولیهٔ نمودار جاذب سیستم و همچنین بُعد فراکتالی آن ارزیابی شده است.

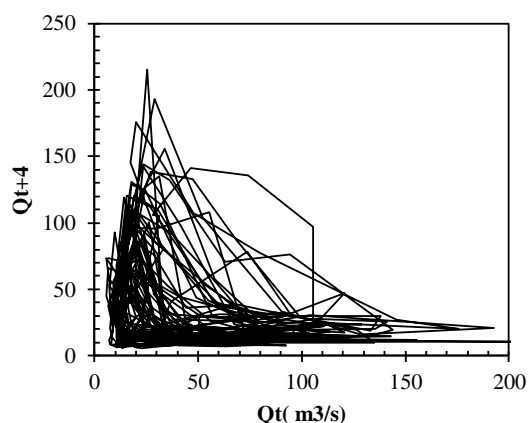
اصلی و نوپزگیری شدهٔ جریان رودخانهٔ زاینده‌رود در جدول ۲ درج شده است. همچنین، شناسایی وجود آشوب در سیستم با توجه به فضای بازسازی شده انجام شده است. فضای حالت بازسازی شده در شکل ۴ ترسیم شده و نمودار فرم جاذب با

جدول ۲. مقادیر زمان تأخیر و بُعد محاط برای ایستگاه‌های بررسی شده در مقیاس ماهانه، برای سری اصلی و نوپزگیری شده

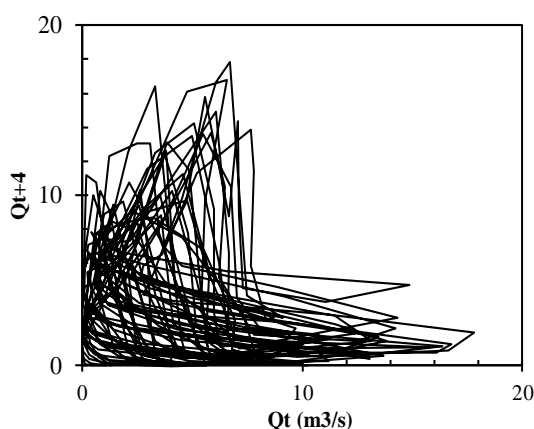
ایستگاه	اسکندری		قلعه شاهرخ		پل زمانخان		پل کله	
	زمان تأخیر	بُعد محاط	زمان تأخیر	بُعد محاط	زمان تأخیر	بُعد محاط	زمان تأخیر	بُعد محاط
سری اصلی	۵	۵	۴	۵	۴	۳	۵	۴
سری نوپزگیری شده	۷	۳	۴	۴	۴	۳	۸	۳



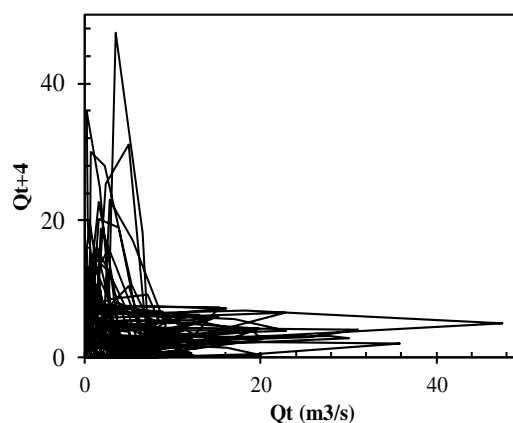
ب) ایستگاه قلعه شاهرخ، سری نوپزگیری شده



الف) ایستگاه قلعه شاهرخ، سری اصلی



د) ایستگاه پل زمانخان، سری نوپزگیری شده

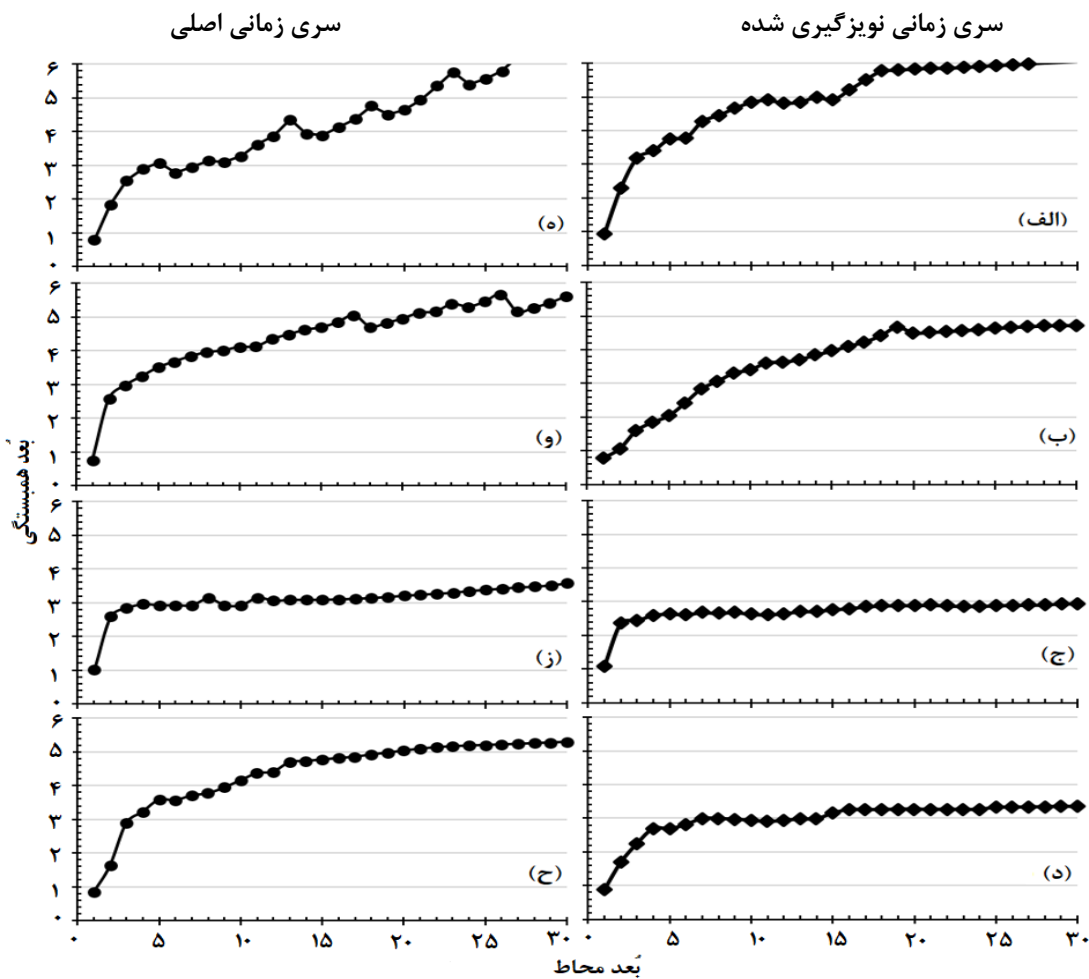


ج) ایستگاه پل زمانخان، سری اصلی

شکل ۴. نمودار فضای حالت بازسازی شدهٔ جریان ماهانهٔ رودخانهٔ زاینده‌رود برای ایستگاه قلعه شاهرخ در بالادست دریاچهٔ زاینده‌رود و ایستگاه پل زمانخان در پایین‌دست آن

مقدار مشخصی به حالت اشباع می‌رسد و از مقدار معینی فراتر نمی‌رود. این مقدار برابر با بُعد همبستگی است. بُعد همبستگی برای سری زمانی دبی جریان ماهانه رودخانه زاینده رود برای ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله به ترتیب برابر ۵/۹۴، ۴/۶۳، ۲/۸۹ و ۳/۳۰ به دست آمده است. این اشباع شدن پس از نویزگیری، نشان می‌دهد که سری زمانی جریان رودخانه زاینده رود متشکل از سری زمانی آشوبی بوده است و با نویزگیری از داده‌های خام می‌توان رفتار پیچیده و غیرخطی رودخانه زاینده رود را توصیف کرد. نتایج کسب‌شده با پژوهش فتاحی مطابقت دارد [۹]. نمودار بُعد همبستگی سری ماهانه نویزدایی شده به ازای ابعاد محاط ۱-۳۰ محاسبه و برای مقایسه با نمودار بُعد همبستگی سری ماهانه اصلی در شکل ۵ ارائه شده است.

به منظور محاسبه بُعد همبستگی جریان در مقیاس‌های زمانی مختلف، بعد از محاسبه تغییرات $\log C(r)$ در مقابل $\log(r)$ نمودار توان همبستگی مطابق شکل ۵ ترسیم شده است. با توجه به این شکل، در صورت اشباع شدن نمودار، رفتار سیستم مطالعه شده آشوبناک است. بر این اساس، بُعد همبستگی ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله برای سری اصلی و نویزگیری شده محاسبه شد که نتایج در جدول ۳ ارائه شده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، نمودار تغییرات بُعد همبستگی در برابر بُعد محاط برای سری زمانی اصلی در تمامی ایستگاه‌ها به اشباع نرسیده است. اشباع شدن نمودار بُعد همبستگی بیان‌کننده تصادفی بودن جریان رودخانه زاینده رود در مقیاس ماهانه است. اما پس از نویزگیری از دبی جریان ماهانه رودخانه زاینده رود مشاهده می‌شود که نمودار بُعد همبستگی پس از

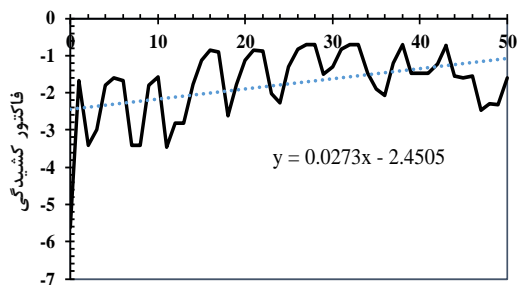


شکل ۵. بُعد همبستگی به ازای ابعاد محاط مختلف برای جریان رودخانه زاینده رود برای سری زمانی اصلی و نویزگیری شده (الف-ه)

ایستگاه اسکندری، (ب-و) ایستگاه قلعه شاهرخ، (ج-ز) ایستگاه پل زمانخان، (د-ح) ایستگاه پل کله

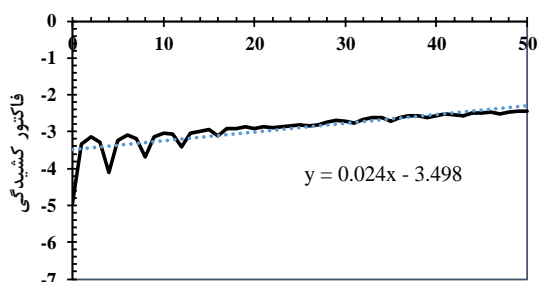
جدول ۳. مقادیر محاسبه‌شدهٔ بُعد همبستگی برای ایستگاه‌های بررسی‌شده در مقیاس ماهانه، برای سری اصلی و نوپزگیری‌شده

ایستگاه	اسکندری	قلعه شاهرخ	پل زمانخان	پل کله
سری زمانی اصلی	ندارد	ندارد	ندارد	ندارد
سری زمانی نوپزگیری‌شده	۵/۹۴	۴/۶۳	۲/۸۹	۳/۳۰



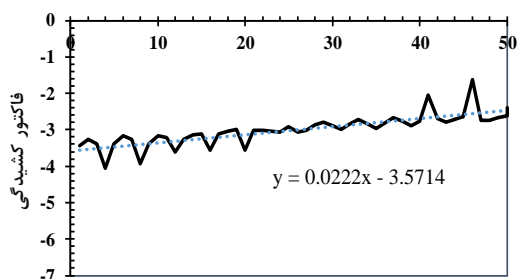
تعداد نقاط

(ب) ایستگاه اسکندری، نوپزگیری‌شده



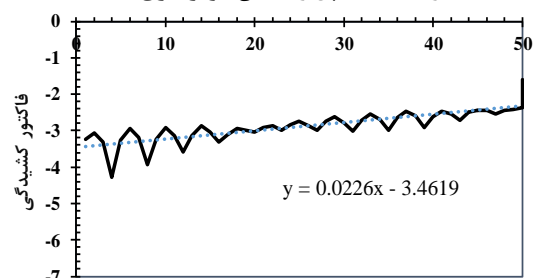
تعداد نقاط

(د) ایستگاه قلعه شاهرخ، نوپزگیری‌شده



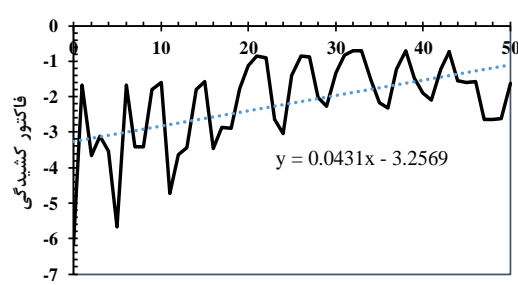
تعداد نقاط

(و) ایستگاه پل زمانخان، نوپزگیری‌شده



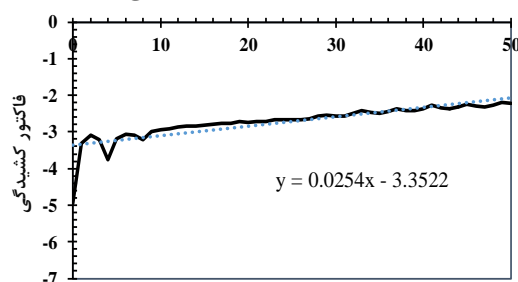
تعداد نقاط

(ح) ایستگاه پل کله، نوپزگیری‌شده



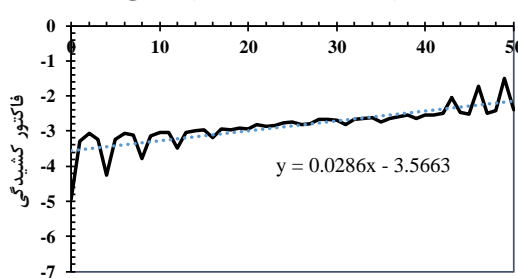
تعداد نقاط

(الف) ایستگاه اسکندری، اصلی



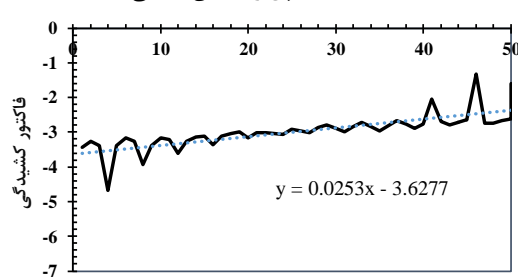
تعداد نقاط

(ج) ایستگاه قلعه شاهرخ، اصلی



تعداد نقاط

(ه) ایستگاه پل زمانخان، اصلی



تعداد نقاط

(ز) ایستگاه پل کله، اصلی

شکل ۶. نمودار بزرگ‌ترین نمای لب‌پانوف

۴/۶۳، ۲/۸۹ و ۳/۳۰ برآورد شد. همچنین، بررسی آزمون حساسیت به شرایط اولیه سیستم به وسیله بزرگترین نمای لیاپانوف، در تمامی ایستگاه‌ها مثبت محاسبه شد. افق پیش‌بینی ایستگاه‌های یادشده در سری نویز زدایی شده به ترتیب برابر ۳۶، ۴۱، ۴۵ و ۴۴ ماه تخمین زده شد. نتایج کسب‌شده از مراحل آنالیز نشان می‌دهد این نظریه به خوبی می‌تواند رفتار پیچیده و غیرخطی جریان رودخانه را توصیف کند. با توجه به وابستگی استان‌های اصفهان، یزد و کرمان به منابع آب این حوضه، تغییرات و نوسانات آب در آن، پیامدهای اقتصادی-اجتماعی فراوانی در ابعاد منطقه‌ای، ملی و بین‌المللی دارد. بنابراین شناخت ماهیت این حوضه، در تدوین راهبردهای اقتصادی-اجتماعی و تأمین آب در این حوضه، کمک فراوانی خواهد کرد. با توجه به اینکه اساس بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها در بهره‌برداری از منابع آب بر پایه پیش‌بینی و تحلیل دبی جریان است، در نتیجه می‌توان از طریق سری‌های نویز زدایی شده، پیش‌بینی‌های قابل اعتماد برای رودخانه زاینده‌رود در مقیاس ماهانه انجام داد و از روش‌های پیش‌بینی غیرخطی مبتنی بر نظریه آشوب به این منظور استفاده کرد.

منابع

- [1]. Honarbakhsh A, Karimian kakolaki R, shams Ghahfarokhi G, Davoudian Dehkordi A, Pajouhesh M. Flow modeling in a bend of a natural river based on different turbulence models (Case study: Doab Samsami River). *Iranian Journal of Ecohydrology*. 2018;5(3):907-916. (Persian)
- [2]. Hashemi Golpayegani SMR. *Chaos and its applications in engineering*. Tehran: Amirkabir University of Technology; 2009. (Persian)
- [3]. Seyedian S, Soleimani M, Kashani M. Predicting streamflow using data-driven model and time series. *Iranian Journal of Ecohydrology*. 2014; 1(3):167-179. (Persian)
- [4]. Amiri E, Roudbari Mousavi M. Evaluation of IHACRES hydrological model for simulation of daily flow (case study Polrood and Shalmanrood rivers). *Iranian Journal of Ecohydrology*. 2016;3(4):533-543. (Persian)
- [5]. Lorenz E. *The essence of chaos*. Seattle: University of Washington Press; 1993.

برای مشخص شدن تأثیر کاهش نویز در سیستم، از آزمون نمای لیاپانوف استفاده شده است. همچنین، مثبت بودن بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف، بیان‌کننده امکان وجود دینامیک قطعی و رفتار آشوبناک در سیستم است. با توجه به شکل ۶ مقادیر بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف محاسبه‌شده سری اصلی، برای ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله به ترتیب ۰/۰۴۳۱، ۰/۰۲۵۴، ۰/۰۲۸۶ و ۰/۰۲۵۳ و برای سری نویزگیری شده به ترتیب برابر ۰/۰۲۷۳، ۰/۰۲۴، ۰/۰۲۲۲ و ۰/۰۲۲۶ به دست آمده است. براساس مثبت بودن مقادیر به دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که جریان رودخانه زاینده‌رود احتمالاً آشوبناک است. اما از طرفی با توجه به نبود بُعد همبستگی در سری‌های زمانی اصلی جریان رودخانه زاینده‌رود می‌توان نتیجه گرفت که جریان ماهانه رودخانه یادشده، پس از نویزگیری رفتار آشوبی دارد و پیش از نویزگیری دارای رفتار تصادفی است. با توجه به رابطه ۸، مقادیر افق پیش‌بینی جریان ماهانه نویزگیری شده رودخانه زاینده‌رود، برای ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله به ترتیب برابر ۳۶، ۴۱، ۴۵ و ۴۴ ماه برآورد شده است. همچنین، ملاحظه می‌شود که تأثیر اطلاعات گذشته سیستم برای ایستگاه‌های یادشده به ترتیب بعد از ۳۶، ۴۱، ۴۵ و ۴۴ ماه از بین می‌رود. بنابراین، هر قدر بتوان به مقدار نمای لیاپانوف کمتری دست یافت، بیشتر می‌توان تأثیر اطلاعات گذشته را لحاظ کرد و در نتیجه، حساسیت نسبت به شرایط اولیه کمتر و افق پیش‌بینی بیشتری خواهیم داشت.

نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت مدیریت منابع آب، پیش‌بینی دقیق جریان رودخانه به استفاده از مدل مناسب برای برآورد جریان ورودی نیاز دارد. مدل‌های نوین کاهش نویز داده‌های طبیعی برای پیش‌بینی دقیق می‌توانند به مدیریت و برنامه‌ریزی صحیح کمک کنند. در مطالعه حاضر، تأثیر کاهش نویز سری‌های زمانی بر نتایج حاصل از شناسایی وجود آشوب دبی جریان رودخانه زاینده‌رود با استفاده از نرم‌افزار TISEAN بررسی شد. نتایج بیان‌کننده وجود بُعد همبستگی در دبی جریان ماهانه رودخانه زاینده‌رود پس از نویزگیری و آشوبی بودن ایستگاه‌های بررسی شده است. بُعد همبستگی ایستگاه‌های اسکندری، قلعه شاهرخ، پل زمانخان و پل کله به ترتیب برابر ۵/۹۴

- [6]. Porporato A, Ridolfi L. Nonlinear analysis of river flow time sequences. *Water Resources Research*. 1997;33(6):1353-1367.
- [7]. Kantz H, Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. UK: Cambridge University Press; 1997.
- [8]. Sivakumar B, Phoon KK, Liong SY, Liaw CY. A systematic approach to noise reduction in chaotic hydrological time series. *Journal of Hydrology*. 1999;219(4):103-135.
- [9]. Elshorbagy A, Simonovic SP, Panu US. Estimation of missing streamflow data using principles of chaos theory. *Journal of Hydrology*. 2002a; 255:123-133.
- [10]. Ng W.W, Panu U.S, Lennox W.C. Chaos based analytical techniques for daily extreme hydrological observations. *Journal of Hydrology*. 2007;342:17-41.
- [11]. Fattahi MH. Applying a noise reduction method to reveal chaos in the river flow time series. *International Journal of Environmental, Ecological, Geological and Mining Engineering*. 2014;8(8):524-531.
- [12]. Rezaei H, Jabbari Gharabagh S. Noise reduction effect on chaotic analysis of Nazluchay River flow. *Water and Soil Science*. 2017;27(3):239-250. (Persian)
- [13]. Iranmehr M, Pourmanafi S, Soffianian A. Ecological monitoring and assessment of spatial-temporal changes in land cover with an emphasis on agricultural water consumption in Zayandeh Rood region. *Iranian Journal of Ecohydrology*. 2015; 2(1):23-38. (Persian)
- [14]. Takens F. *Detecting strange attractors in turbulence*. Berlin: SpringerVerlag. 1981.
- [15]. Wang W, Vrijling JK, Van Gelder PH, Ma J. Testing for nonlinearity of streamflow processes at different time scales. *Journal of Hydrology*. 2006;322(1):247-268.
- [16]. Dhanya CT, Kumar DN. Multivariate nonlinear ensemble prediction of daily chaotic rainfall with climate input. *Journal of Hydrology*. 2011;403:292-306.
- [17]. Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*. 1983;9:189-208.
- [18]. Brock WA, Sayers CL. Is the business cycle characterized by deterministic chaos?. *Journal of Monetary Economics*. 1988;22(1):71-90.
- [19]. Shang P, Li X, Kamae S. Chaotic analysis of traffic time series. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005;25:121-128.
- [20]. Wolf A, Swift JB, Swinney HL, Vastano JA. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985;16(3):285-317.
- [21]. Rosenstein M.T, Collins J.J, De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993;65(1-2):117-134.
- [22]. Schreiber T. Extremely simple nonlinear noise-reduction method. *Physical Review. E*. 1993;47(4):2401-2404.
- [23]. Hegger R, Kantz H, Schreiber T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1999;9(2):413-35.