مجلۀ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۳، شمارهٔ ۱، زمستان ۱۳۸۰

وزنهای پوچ توان در نظریه میدانهای همدیس

شاهین روحانی، مهدی سعادت و سامان مقیمی عراقی

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۷۹/۱۲/۲۲ دریافت نسخه نهایی: ۸۰/٦/۲۸)

چکیده

نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی را می‌توان با استفاده از تبدیلات مقیاس پوچ توان به دست آورد. با استفاده از این نوع تبدیل مقیاس خصوصیات مختلف نظریه‌های میدان همدیس لگاریتمی، از جمله توابع همبستگی دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای را صرفاً با استفاده از قیود تقارن محاسبه می‌کنیم. توابع همبستگی چهارنقطه‌ای نیاز به محاسبه بردارهای تکین دارد که در این مقاله با استفاده از روش وزنهای پوچ توان، دترمینان کچ، بردارهای تکین و نهایتاً توابع چهارنقطه‌ای محاسبه می‌شوند. این نتیجه منجر به تعمیم معادله فوق هندسی به یک مجموعه معادلات ناهمگن می‌شود، که جوابهایی برای آنها ارائه می‌شود. در ادامه با استفاده از همین روش، نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی نزدیک مرز را تحلیل می‌کنیم. در پایان ابرمیدانهایی با وزن همدیس Δ=۰ و Δ=۲ معرفی می‌شوند که یکی در بردارنده جفت لگاریتمی عملگر واحد و دیگری شامل جفت لگاریتمی تانسور انرژی تکانه است. سرانجام مبادرت به استنتاج OPE اعضای هر یک از این ابرمیدانها می‌ورزیم.

واژه‌های کلیدی: نظریه میدان،همدیس، پوچ‌توان

۱. مقدمه

نظریه میدانهای همدیس در دوبعد با کار بلاوین، پولیاکوف و زامولودچیکوف [۱] مورد توجه قرار گرفت و از آن پس به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف فیزیک مانند نظریه ریسمان، پدیده‌های بحرانی و ماده چگال مورد استفاده واقع شد. همچنین نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی (LCFTs)[۱] در ابتدا به وسیله گوراری [۲] در مدل c=−۲ معرفی شد. تفاوت نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی با دسته اول این است که توابع بستگی چندنقطه‌ای این میدانها علاوه بر تکنیکی‌های توانی، دارای تکنیگی‌های لگاریتمی نیز می‌باشند. در یک نظریه میدان لگاریتمی، عملگرهای تبهگن (با وزن همدیس یکسان) وجود دارند که تحت تبدیلات همدیس یک سلول جوردن تشکیل می‌دهند. در ساده‌ترین حالت، دو میدان ϕ و ψ با وزن همدیس Δ تحت تبدیل مقیاس به شکل زیر رفتار می‌کنند:

$$\phi(\lambda z)=\lambda^{-\Delta}\phi(z),$$
$$\psi(\lambda z)=\lambda^{-\Delta}\left[\psi(z)-\phi(z)\ln\lambda\right]. \qquad (۱)$$

توابع بستگی دونقطه‌ای شامل ϕ و ψ با استفاده از خاصیت ناوردایی آنها تحت عمل مولدهای L_0 و $L_{\pm 1}$ قابل استنتاج است [۳]. محاسبه توابع بستگی سه نقطه‌ای شامل ϕ و ψ و تعمیم به سلولهای جوردن بزرگتر در [٤ و ٥] انجام گرفته است.

در این مقاله با معرفی متغیر پوچ توان θ با خواص:

۱. Logarithmic Conformal Field Theories

$$\theta_i^2 = 0,$$
$$\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i. \quad (۲)$$

به بررسی LCFTs می‌پردازیم که چنانچه خواهیم دید ابزاری است که به ساده‌ترین شکل منجر به نتایج قبلی و پاره‌ای نتایج جدید می‌شود. با افزودن یک جزء پوچ توان مانند θ به وزن همدیس Δ و این فرض که میدان اولیه $\Phi(z,\theta)$ تحت تبدیل مقیاس به صورت:

$$\Phi(\lambda z,\theta)=\lambda^{-(\Delta+\theta)}\Phi(z,\theta). \quad (۳)$$

رفتار می‌کند و $\Phi(z,\theta)=\phi(z)+\theta\psi(z)$ ($\theta^2=0$ مشخص کننده یک سلول جوردن رتبه ۲ است) به روابط تبدیل (۱) می‌رسیم. برای تعمیم به سلول جوردن با رتبه n کافی است بسط دو طرف معادله (۳) را با

$$\Phi(z,\theta)=\phi_0(z)+\phi_1(z)\theta+\phi_2(z)\theta^2+\dots+\phi_{n-1}(z)\theta^{n-1}. \quad (۴)$$

و $\theta^n=0$ در نظر بگیریم. البته در تمام این مقاله با سلول جوردن رتبه ۲ کار خواهیم کرد چرا که تعمیم آن به رتبه‌های بالاتر سرراست است. برای به دست آوردن توابع بستگی دونقطه‌ای شامل ϕ و ψ، تابع بستگی دونقطه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(z_1,z_2,\theta_1,\theta_2)=\langle\Phi_1(z_1,\theta_1)\Phi_2(z_2,\theta_2)\rangle. \quad (۵)$$

ناوردایی تحت انتقال و دوران ایجاب می‌کند که بستگی G به z_1 و z_2 به صورت (z_1-z_2) باشد. تحت تبدیل مقیاس داریم:

$$G(\lambda(z_1-z_2),\theta_1,\theta_2)=\lambda^{-(\Delta_1+\theta_1)}\lambda^{-(\Delta_2+\theta_2)}G((z_1-z_2),\theta_1,\theta_2), \quad (۶)$$

و برای ناوردایی تحت تبدیل همدیس خاص $z\to\frac{z}{1+bz}$ در کلی‌ترین حالت باید $\Delta_1=\Delta_2$ و G شامل جملاتی از مرتبه صفر θ_1 و θ_2 نباشد و θ_1 و θ_2 با ضرایب یکسان در G ظاهر شوند، یعنی:

$$\langle\Phi(z_1,\theta_1)\Phi(z_2,\theta_2)\rangle = \frac{1}{(z_1-z_2)^{2\Delta+(\theta_1+\theta_2)}}\left(a_1(\theta_1+\theta_2)+a_{12}\,\theta_1\theta_2\right). \quad (۷)$$

بسط طرفین این معادله برحسب θ_1 و θ_2 منجر به توابع بستگی دونقطه‌ای زیر می‌شود:

$$\langle\phi(z_1)\phi(z_2)\rangle = 0$$
$$\langle\psi(z_1)\phi(z_2)\rangle = \frac{a_1}{(z_1-z_2)^{2\Delta}}$$
$$\langle\psi(z_1)\psi(z_2)\rangle = \frac{1}{(z_1-z_2)^{2\Delta}}\left(-2a_1\ln(z_1-z_2)+a_{12}\right) \quad (۸)$$

که با [۳] سازگار است.

اکنون به محاسبه توابع بستگی سه‌نقطه‌ای می‌پردازیم.

$$G(z_1,z_2,z_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3)= \langle\Phi_1(z_1,\theta_1)\Phi_2(z_2,\theta_2)\Phi_3(z_3,\theta_3)\rangle. \quad (۹)$$

پس از محاسبه تابع بستگی سه نقطه‌ای اخیر، کلیه توابع بستگی سه نقطه‌ای شامل ϕ_i و ψ_iها به سادگی با بسط معادله (۹) برحسب θ_1 ، θ_2 و θ_3 به دست می‌آیند. برخلاف توابع بستگی دو نقطه‌ای، توابع بستگی سه نقطه‌ای می‌توانند شامل میدانهایی متعلق به سلولهای جوردن مختلف باشند. مشابه با آنچه در مورد توابع بستگی دونقطه‌ای انجام شد، ناوردایی تحت تبدیلات همدیس ایجاب می‌کند:

$$G(z_1,z_2,z_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3)= f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)z_{12}^{-a_{12}}z_{23}^{-a_{23}}z_{31}^{-a_{31}}, \quad (۱۰)$$

که $z_{ij}=(z_i-z_j)$ و $a_{ij}=\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k+(\theta_i+\theta_j-\theta_k)$. برای یک سلول جوردن رتبه ۲:

$$f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)= \sum_{i\neq j\neq k}^{3}C_i(\theta_j+\theta_k)+ \sum_{1\le i<j\le 3}C_{ij}\theta_i\theta_j+C_{123}\,\theta_1\theta_2\theta_3. \quad (۱۱)$$

توجه کنید که $f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ فاقد جمله مستقل از θ است. البته این خصوصیت از ملاحظات تقارن تحت تبدیلات همدیس نتیجه نمی‌شود، بلکه قیدی است که سازگاری OPEها تحمیل می‌کند [٦ و ٨] (برای توضیح بیشتر به ضمیمه مراجعه شود). با قرار دادن معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۹) و بسط برحسب θ_1 ، θ_2 و θ_3، کلیه توابع بستگی سه‌نقطه‌ای ممکن به دست می‌آیند. از جمله اینکه $\langle\phi_1\phi_2\phi_3\rangle=0$ (چنانکه در کلیه LCFTهایی که می‌شناسیم باید برقرار باشد).

۲. بردارهای تکین در LCFT و توابع بستگی چهارنقطه‌ای

تبدیل بی‌نهایت کوچک و سازگار با معادله (۳)

$$\delta\Phi = -\varepsilon\left(z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+(n+1)(\Delta+\theta)z^{n}\right)\Phi \qquad (۱۲)$$

را در نظر بگیرید که اثر مولدهای جبر ویراسورو را روی میدانهای اولیه تعریف می‌کند. اگر $|\Delta+\theta\rangle$ بالاترین وزن با ویژه‌مقدار وابسته به متغیر پوچ توان باشد، داریم:

$$L_0|\Delta+\theta\rangle=(\Delta+\theta)|\Delta+\theta\rangle,$$
$$L_n|\Delta+\theta\rangle=0,\qquad n\geq 1. \qquad (۱۳)$$

حال اگر $|\Delta+\theta\rangle$ را به صورت:

$$|\Delta+\theta\rangle=|\phi\rangle+\theta|\psi\rangle \qquad (۱۴)$$

تعریف کنیم اثر L_0 روی $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ از مقایسه دو معادله اخیر به دست می‌آید.

$$L_0|\phi\rangle=\Delta|\phi\rangle,$$
$$L_0|\psi\rangle=\Delta|\psi\rangle+|\phi\rangle. \qquad (۱۵)$$

علاوه بر بالاترین حالت $|\Delta+\theta\rangle$، حالتهای ثانویه‌ای وجود دارند که با اعمال L_{-n} ها روی بالاترین حالت به دست می‌آیند. این حالتها را با $|\Delta+n+\theta\rangle=L_{-\vec{n}}|\Delta+\theta\rangle$ نمایش می‌دهیم که $n=n_1+\cdots+n_k$ و $L_{-\vec{n}}=L_{-n_1}L_{-n_2}\dots L_{-n_k}$. می‌توان از ترکیبات مختلف n_1، n_2، ... و n_k که منجر به یک مقدار n می‌شوند، p(n) حالت متفاوت در سطح n ساخت. از هر ترکیب خطی دلخواه این p(n) حالت، یک حالت عمومی فضای هیلبرت در سطح n به صورت

$$|\chi^n_{\Delta,c}(\theta)\rangle=\sum_{\{n_1+n_2+\cdots+n_k=n\}} b^{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_k}|\Delta+\theta\rangle =\sum_{|\vec{n}|=n} b^{\vec{n}}L_{-\vec{n}}|\Delta+\theta\rangle \qquad (۱۶)$$

ساخته می‌شود.

یک بردار (حالت) تکین در سطح n در LCFTs را با $|\chi^n_{\Delta,c}\rangle_S$ نمایش می‌دهیم و آن را به این صورت تعریف می‌کنیم که بر کلیه بردارهای هم‌سطح خودش عمود باشد که در نتیجه دارای نرم صفر هم خواهد بود:

$$\left\langle \chi^n_{\Delta,c}\middle|\chi^n_{\Delta,c}\right\rangle_S=0. \qquad (۱۷)$$

با توجه به معادله (۱۶) شرط برقراری معادله اخیر این است که:

$$\langle\Delta'+\theta|L_{\vec{n}'}|\chi^n_{\Delta,c}\rangle_S=0,\qquad \forall\,\vec{n}':|\vec{n}'|=n. \qquad (۱۸)$$

یک بردار تکین در سطح n نه تنها بر تمام بردارهای دلخواه در سطح n بلکه بر کلیه بردارهای سطوح بالاتر نیز عمود است.

از آنجا که تعداد $L_{\vec{n}'}$ها p(n) تا است شرط (۱۸) برای تکین بودن بردار $|\chi^n_{\Delta,c}\rangle_S$ معادل p(n) تا شرط است. از طرف دیگر در سطح n یک بردار تکین دارای p(n) ضریب مجهول $b^{\vec{n}}$ است که باید تعیین شوند. برای چگونگی تعیین آنها معادله (۱۸) را به صورت:

$$\langle\Delta'+\theta|L_{\vec{n}'}|\chi^n_{\Delta,c}\rangle_S=\sum_{|\vec{n}'|=n} b^{\vec{n}}\langle\Delta'+\theta|L_{\vec{n}'}L_{-\vec{n}}|\Delta+\theta\rangle=0,\quad \forall\,\vec{n}':|\vec{n}'|=n \qquad (۱۹)$$

می‌نویسیم. از آنجا که (برای k≥1) $L_k|\Delta+\theta\rangle=0$، با استفاده از جبر ویراسورو می‌توان $L_{\vec{n}'}L_{-\vec{n}}|\Delta+\theta\rangle$ را به شکل $\sum_{m=0}\alpha_m^{\vec{n}',\vec{n}}(c)L_0^m|\Delta+\theta\rangle$ تبدیل کرد. ضرایب $\alpha_m^{\vec{n}',\vec{n}}(c)$ که اعداد ثابت یا وابسته به c هستند، معلوم‌اند. بنابراین معادله (۱۹) منجر به یک دستگاه p(n) معادله همگن، با p(n) مجهول $b^{\vec{n}}$ خواهد شد:

$$\sum_{|\vec{n}|=n} b^{\vec{n}}\left(\sum_{m=0}\alpha_m^{\vec{n}',\vec{n}}(c)(\Delta+\theta)^m\right)\langle\Delta'+\theta|\Delta+\theta\rangle=0$$
$$\forall\,\vec{n}':|\vec{n}'|=n \qquad (۲۰)$$

شرط جواب غیر صفر برای $b^{\vec{n}}$ها این است که دترمینان ضرایب $\sum_{m=0}\alpha_m^{\vec{n}',\vec{n}}(c)(\Delta+\theta)^m$ صفر شود که دقیقاً همان دترمینان کچ در LCFTs است. بنابراین در اینجا نیز همانند CFTs بردار تکین برای مقادیری از Δ و c که دترمینان کچ به ازای آنها صفر می‌شود وجود دارد. واضح است که به خاطر همگن بودن دستگاه معادلات (۲۰) حداقل یکی از ضرایب اختیاری خواهد بود. به عنوان مثال در سطح ۲ (n =۲):

$$|\chi^2_{\Delta,c}(\theta)\rangle_S=\left(b^{(1,1)}L_{-1}^2+b^{(2)}L_{-2}\right)|\Delta+\theta\rangle, \qquad (۲۱)$$

و برای برقراری معادله (۲۰) باید $\Delta=0$، $\Delta=\frac{1}{4}$ و $\Delta=-\frac{5}{4}$ که به ترتیب متناظر با c=۰، c=۱ و c=۲۵ است. قدم بعدی به دست آوردن ضرایب $b^{(1,1)}$ و $b^{(2)}$ است. برای $\Delta=\frac{1}{4}$ و $\Delta=-\frac{5}{4}$

$$b^{(1,1)} = 3, \qquad b^{(2)} = -\left[4(\Delta+\theta)+2\right]. \qquad (22)$$

برای $\Delta = 0$ ضرایب $b^{(1,1)}$ و $b^{(2)}$ فقط می‌توانند متناسب با θ باشند و لذا منجر به بردار تکین لگاریتمی نمی‌شوند. این نتایج با [۷] توافق دارد. به طور مشابه می‌توان بردارهای تکین در سطوح بالاتر را به دست آورد. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتری از نظریه‌ای که با آن سر و کار داریم دانستن توابع بستگی چهارنقطه‌ای ضروری است. مانند قبل و در تشابه با CFTها شکل کلی توابع بستگی چهارنقطه‌ای به صورت:

$$\begin{aligned} &G\left(z_1, z_2, z_3, z_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right) \\ &= \left\langle \Phi_1(z_1,\theta_1)\cdots\Phi_4(z_4,\theta_4)\right\rangle \\ &= f\left(\eta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right) \prod_{1\le i<j\le 4} z_{ij}^{\mu_{ij}}. \end{aligned} \qquad (23)$$

است که:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4}(\Delta_k+\theta_k) - (\Delta_i+\theta_i) - (\Delta_j+\theta_j),$$
$$\eta = \frac{z_{41}\, z_{23}}{z_{43}\, z_{21}} \qquad (24)$$

و G در معادله (۲۳) تحت کلیه تبدیلات همدیس ناوردا است. اگرچه ملاحظات مربوط به تقارن قید دیگری را روی G ایجاب نمی‌کند ولی سازگاری OPEها لازم می‌دارد که $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ صفر شود [٦ و ٨]. بنابراین f باید فاقد جمله مستقل از θ باشد. به واسطه وجود یک بردار تکین در سطح ۲، f در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. بنا بر معادلات (۲۱) از $\Phi_4(z_4,\theta_4)$ می‌توان یک میدان ثانویه مانند:

$$\begin{aligned} &\chi^{(2)}\left(z_4,\theta_4\right) = \\ &\left[3L_{-1}^{2} - \left(2(2\Delta_4+1)+4\theta_4\right)L_{-2}\right]\Phi_4(z_4,\theta_4). \end{aligned} \qquad (25)$$

ساخت که بنا بر خاصیت بردارهای تکین داریم:

$$\left\langle \Phi_1\Phi_2\Phi_3\chi^{(2)}\right\rangle = 0. \qquad (26)$$

شکل توابع بستگی چهارنقطه‌ای در معادله (۲۳) به همراه قید (۲٦) ایجاب می‌کند:

$$\eta(1-\eta)\frac{d^2H}{d\eta^2} + \left[c-(a+b+1)\eta\right]\frac{dH}{d\eta} - abH = 0. \qquad (27)$$

که در آن

$$\begin{aligned} &H\left(\eta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right) \\ &= \eta^{-\beta_1+\mu_{12}}\,(1-\eta)^{-\beta_2+\mu_{23}}\, f\left(\eta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right), \end{aligned} \qquad (28)$$

و β_1، β_2، a ، b و c در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{3}\left[2(2\Delta_4+1)+4\theta_4\right],\ \beta_i(\beta_i-1)+\alpha(\alpha_i-\Delta_i-\theta_i) = 0 \\ &i = 1,2 \\ &ab = (\beta_1+\beta_2)(\beta_1+\beta_2+2\alpha-1) \\ &\quad +\alpha(\Delta_4-\Delta_3+\theta_4-\theta_3), \\ &a+b+1 = 2(\beta_1+\beta_2+\alpha), \\ &c = 2\beta_1+\alpha \end{aligned} \qquad (29)$$

معادله (۲۷) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ فوق هندسی است که جواب آن برحسب سری فوق هندسی به صورت زیر قابل بیان است:

$$H(a,b,c;\eta) = K\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\right)h(a,b,c;\eta), \qquad (30)$$

که

$$\begin{aligned} &h(a,b,c;\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}\eta^n, \\ &(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1), (x)_0 = 1 \\ &K\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\right) = \sum_{i=1}^{4}k_i\theta_i + \sum_{1\le i<j\le 4}k_{ij}\theta_i\theta_j \\ &+ \sum_{1\le i<j<k\le 4}k_{ijk}\theta_i\theta_j\theta_k + k_{1234}\ \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4. \end{aligned} \qquad (31)$$

چنانچه از معادلات (۲۹) دیده می‌شود، ضرایب a، b و c در معادله (۳۱) بستگی به پارامترهای پوچ توان θ_i دارند. بنابراین معادله اول (۳۱) در بردارنده ١٦ تابع وابسته به η است که طبیعی است. زیرا رابطه (۲۳)، خود شامل ١٦ تابع بستگی چهارنقطه‌ای مختلف است. همچنین K در معادله (۳۱) فاقد جمله مستقل از θ است زیرا همان طور که قبلاً ذکر شد تابع بستگی چهارنقطه‌ای که فقط شامل ϕ_iها است صفر می‌باشد. همچنین معادله (۲۷) معادل ١٦ معادله دیفرانسیل است که به چهار دسته کلی تقسیم می‌شوند. یک دسته شامل چهار معادله فوق‌هندسی همگن و سه دسته دیگر شامل معادلات فوق هندسی غیرهمگن است.

به عنوان مثال در حالت خاص $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \frac{1}{4}$ پس از محاسبه ضرایب β_1، β_2، a ، b و c برحسب Δ_iها و θ_iها از مجموعه معادلات (۲۹)، شکل صریح توابع بستگی چهارنقطه‌ای شامل ϕ_iها و ψ_iها به دست می‌آید. به عنوان نمونه:

$$\left\langle \psi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_3)\phi(z_4) \right\rangle = k_1 \eta^{\frac{2}{3}} (1-\eta)^{\frac{2}{3}} h_0(\eta) \prod_{1\le i<j\le 4} z_{ij}^{-\frac{1}{6}} \qquad (۳۲)$$

که $h_0(\eta) = F_{hyp}(2,1,2,\eta)$. سایر توابع چهارنقطه‌ای شامل ۲، ۳ یا ٤ تا ψ، به روش مشابهی به دست می آیند. قابل ذکر است که بسته به اینکه چه تعداد ψ در تابع همبستگی ظاهر شـود، توابـع مختلفی در سمت راسـت ظـاهر می‌شـود. همـان طـور کـه در ضمیمه به آن اشاره شده است، تـابع همبسـتگی فـاقد ψ برابـر صفر است. اگر تابع همبسـتگی فقـط شـامل یـک ψ باشـد، در طرف راست فقط H_i ظاهر می‌شـود و اگر تـابع بسـتگی فقـط شامل دو تا از ψها باشد، در طرف راست، H_i و H_{ij} ظـاهر می‌شـود و الـی آخـر (H_i، H_{ij}، H_{ijk} و H_{1234} بـه ترتیـب ضرایـب θ_i، $\theta_i\theta_j$، $\theta_i\theta_j\theta_k$ و $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$ در بسـط معادلـه (۳۰) هسـتند). همـان طـور کـه از معادلـه (۳۲) دیـده می‌شـود همیشه تکنیگی‌های لگاریتمی در توابع بستگی چهارنقطـه‌ای در بستگی‌هایی که شامل بیش از یک ψ باشند ظاهر می‌شوند. ایـن گفته در مورد توابع بستگی n نقطه‌ای هم صحیح است.

۳. دترمینان کج در LCFT

به طور کلی در نظریه میدانهای غیر همدیس غیرلگاریتمی CFT شرط وجود بردار تکین فقط وجود رابطـه خـاصی بیـن c و Δ است [۱]. برحسـب دترمینـان کـج، ایـن رابطـه خـاص همـان ریشه‌های دترمینان کج می‌باشند. در LCFT همـان طـور کـه در سطح ۲ دیدیم (و البتـه بـرای سـطوح بـالاتر)، بـه ازای مقـادیر خاصی از c و Δ بردار تکین وجود دارد. بنابراین انتظار مـی‌رود که این مقادیر خاص c و Δ از یک دترمینان کج در LCFT قابل استنتاج باشد.

در نظریه میدانهای همدیس معمولی، عناصر دترمینان کج به صورت $\left\langle \Delta \middle| L_{\vec{n}'} L_{-\vec{n}} \middle| \Delta \right\rangle$ است که با استفاده از جبر ویراسـورو قابل تبدیل به $\sum_{m=0} \alpha_m^{\vec{n}',\vec{n}}(c)\Delta^m$ است. در LCFT نیز چنین اسـت بـا ایـن تفـاوت کـه عنـاصر دترمینـان کـج بــه شــکل $\left\langle \Delta+\theta \middle| L_{\vec{n}'} L_{-\vec{n}} \middle| \Delta+\theta \right\rangle$ می‌باشـند. از آنجـا کـه $L_0 \left| \Delta+\theta \right\rangle = (\Delta+\theta)\left| \Delta+\theta \right\rangle$، کـافی اسـت در دترمینـان کـج مربوط به CFT معمولی Δ را با $\Delta+\theta$ جایگزین کنیم. بنـابراین در سطح n، دترمینان کج به صورت:

$$\det_n(c,\Delta+\theta) = \prod_{r,s=1;1\le rs\le n}^{n} (\Delta+\theta-\Delta_{r,s}(c))^{p(n-rs)}, \qquad (۳۳)$$

است که:

$$\Delta_{r,s}(c) = \frac{1}{96}\left[(r+s)\sqrt{1-c}+(r-s)\sqrt{25-c}\right]^2 - \frac{1-c}{24}. \qquad (۳٤)$$

و p(n-rs) تعداد تقسیمهای n-rs برحسب اعـداد صحیـح مثبـت است. برای داشتن بردار تکین لازم است دترمینان کج صفر شود که این صفر شدن ممکن است (برای سلولهای جوردن رتبـه ۲) به دو صورت اتفاق افتد.

الف) اگر برای مقادیری از r و s داشته باشیم $p(n-rs) \ge 2$ آنـگاه به ازای همه مقـادیر Δ کـه $\Delta = \Delta_{r,s}(c)$، دترمینـان کـج صفـر است.

ب) اگر به ازای جفتهایی از (r,s) مانند (r_1,s_1)، (r_2,s_2) و ... داشته باشیم p(n-rs)=1 دترمینان کج صفــر می‌شـود اگر لااقـل $\Delta = \Delta_{r_i,s_i}(c) = \Delta_{r_j,s_j}(c)$. در این حالت برخــلاف الـف) بـه ازای مقادیر خاصی از c و Δ شرط صفر شدن دترمینـان محقـق می‌شود. این نتایج با [۷] سازگار است.

٤. مرز

در این بخش به بررسی LCFT نزدیک مرز مـی‌پردازیـم. بـرای CFT معمولی نشان داده شده است [۹] که اگر محور حقیقـی را به عنوان مرز در نظر بگیریم با شرط مرزی $T=\overline{T}$ روی محـور حقیقی، معادله دیفرانسیل حاکم بر یک تابع بســتگی n نقطـه‌ای در حضور مرز، همان معادله دیفرانسـیلی اسـت کـه یـک تـابع بستگی 2n نقطه‌ای در غیاب مرز، در آن صدق می‌کنـد. بـا ایـن ترفند می‌توان توابع بستگی یک LCFT را نزدیک مرز به دسـت آورد [۱۰ و ۱۱]. در اینجا این نتـایج را بـا اسـتفاده از فرمـالیزم پارامتر پوچ‌توان و برای یک سـلول جـوردن رتبـه ۲ بـه دسـت می‌آوریم. ابتدا توابع بسـتگی تک‌نقطـه‌ای را بـرای یـک میـدان اسکالر $\Delta = \overline{\Delta}$ در نزدیکی مرز به دست می‌آوریم. با اعمال L_0 و $L_{\pm 1}$ بر این توابع بستگی به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\left(\partial_z+\partial_{\bar z}\right)\left\langle \Phi(z,\bar z,\theta) \right\rangle = 0,$$
$$\left(z\partial_z+\bar z\partial_{\bar z}+2(\Delta+\theta)\right)\left\langle \Phi(z,\bar z,\theta) \right\rangle = 0,$$
$$\left(z^2\partial_z+\bar z^2\partial_{\bar z}+2z(\Delta+\theta)+2\bar z(\Delta+\theta)\right)\left\langle \Phi(z,\bar z,\theta) \right\rangle = 0. \qquad (۳۵)$$

از دو معادله اول خواهیم داشت:

$$\langle\Phi(y,\theta)\rangle = \frac{f(\theta)}{y^{2(\Delta+\theta)}}, \tag{36}$$

که $y=z-\bar z$ و $\langle\Phi(y,\theta)\rangle$ خود به خود در معادله سوم نیز صدق می‌کند. اما $\Phi(y,\theta)=\phi(y)+\theta\psi(y)$ و $f(\theta)=a+b\theta$. بنابراین:

$$\langle\phi(y,\theta)\rangle=\frac{a}{y^{2\Delta}}$$

$$\langle\psi(y,\theta)\rangle=\frac{1}{y^{2\Delta}}(b-2a\ln y). \tag{37}$$

در ادامه این بخش به ارزیابی توابع بستگی دونقطه‌ای $G(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\theta_1,\theta_2)=\langle\Phi(z_1,\bar z_1,\theta_1)\Phi(z_2,\bar z_2,\theta_2)\rangle$ در حضور مرز می‌پردازیم. ناوردایی تحت L_{-1} ایجاب می‌کند:

$$\left(\partial_{z_1}+\partial_{\bar z_1}+\partial_{z_2}+\partial_{\bar z_2}\right)G=0. \tag{38}$$

کلی‌ترین جواب G به صورت $G=G(y_1,y_2,x_1,x_2,\theta_1,\theta_2)$ است که در آن $y_i=z_i-\bar z_i$ و $x_i=z_i+\bar z_i$ است. برای ناوردایی تحت L_0 باید:

$$\left[y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+x\frac{\partial}{\partial x}+2(\Delta+\theta_1)+2(\Delta+\theta_2)\right]G=0, \tag{39}$$

که $x=x_2-x_1$ است. با معرفی $\alpha_1=\frac{y_1}{x}$ و $\alpha_2=\frac{y_2}{x}$ جواب معادله اخیر به صورت زیر است:

$$G=\frac{1}{x^{4\Delta+2\theta_1+2\theta_2}}f\left(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\right). \tag{40}$$

اما ناوردایی تحت L_1 لازم می‌دارد که G در معادله دیفرانسیل

$$\left[xy_1\frac{\partial}{\partial y_1}-xy_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\left(y_1^2-y_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x}+2x(\theta_1-\theta_2)\right]G=0, \tag{41}$$

صدق کند که از اینجا شکل f تعیین می‌شود. سرانجام تابع بستگی دونقطه‌ای

$$\langle\Phi(z_1,\bar z_1,\theta_1)\Phi(z_2,\bar z_2,\theta_2)\rangle = \frac{1}{(y_1y_2)^{2\Delta+\theta_1+\theta_2}}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\theta_1-\theta_2} h\left(\frac{x^2+y_1^2+y_2^2}{y_1y_2}\right), \tag{42}$$

برحسب تابع اختیاری h به دست می‌آید که همان عبارت به دست آمده برای تابع بستگی دونقطه‌ای در [۱۰] در نزدیکی مرز است.

۵. جبر جریان وابسته به LCFT

تانسور انرژی تکانه T_0 با وزن همدیس $\Delta=2$ و عملگر یکانی Ω با وزن همدیس $\Delta=0$ میدانهایی هستند که در هر CFT وجود دارند. T_0 یک میدان ثانویه است زیرا $T_0=L_{-2}\Omega$. در یک LCFT عملگرهای تبهگنی وجود دارند که تحت تبدیلات همدیس یک سلول جورد تشکیل می‌دهند. بنابراین طبیعی است که برای T_0 و Ω نیز جفتهای لگاریتمی در نظر بگیریم [۲، ۱۲ و ۱۳]. در اینجا این مفهوم را تعمیم بیشتری می‌دهیم و یک ابر میدان چهار مؤلفه‌ای وابسته به متغیر گراسمونی η را به صورت:

$$\Phi(z,\eta)=\phi(z)+\bar\alpha(z)\eta+\bar\eta\alpha(z)+\bar\eta\eta\psi(z). \tag{43}$$

معرفی می‌کنیم که $\alpha(z)$ یک میدان فرمیونی با وزن همدیس یکسان با ϕ و ψ است. $\bar\eta\eta$ در اینجا نقش متغیر پوچ توان θ را دارد. توجه کنید که α و $\bar\alpha$ هر دو متعلق به قسمت هولومورفیک نظریه می‌باشند. اگر تحت تبدیل مقیاس، $\Phi(z,\eta)$ به صورت:

$$\Phi(\lambda z,\theta)=\lambda^{-(\Delta+\bar\eta\eta)}\Phi(z,\eta). \tag{44}$$

رفتار کند، ϕ و ψ مانند معادله (۱) تبدیل می‌شوند و $\alpha(z)$ و $\bar\alpha(z)$ که دارای وزن همدیس Δ هستند مانند ϕ رفتار می‌کنند. چنین مدلهایی در یک نظریه $c=-2$ نیز معرفی شده است [۱۴].

برای ساختن یک ابر میدان با وزن همدیس $\Delta=0$، علاوه بر Ω و جفت لگاریتمی آن یعنی ω به دو میدان دیگر با وزن همدیس صفر نیازمندیم که آنها را با $\xi(z)$ و $\bar\xi(z)$ معرفی می‌کنیم.

$$\Phi_0(z,\eta)=\Omega+\bar\xi(z)\eta+\bar\eta\xi(z)+\bar\eta\eta\omega(z). \tag{45}$$

Ω دارای این خاصیت است که برای هر میدان S داریم: $\Omega S=S$. $\Phi_0(z,\eta)$ تحت تبدیل مقیاس، به صورت $\Phi_0(\lambda z,\theta)=\lambda^{-\bar\eta\eta}\Phi_0(z,\eta)$ تبدیل می‌شود و دارای خاصیت $\langle\Phi_0(z,\eta)\rangle=\bar\eta\eta$ نیز می‌باشد زیرا $\langle\Omega\rangle=\langle\xi\rangle=\langle\bar\xi\rangle=0$ و $\langle\omega\rangle=1$. وجود Φ_0، یک میدان ثانویه با وزن همدیس $\Delta=2$ مانند $T(z,\eta)$ $\left(T(z,\eta)=L_{-2}\Phi_0(z,\eta)\right)$ را به دنبال دارد که آن را به عنوان ابر تانسور انرژی تکانه به صورت

$$T(z,\eta)=T_0(z)+\bar\eta\zeta(z)+\bar\zeta(z)\eta+\bar\eta\eta t(z) \tag{46}$$

نمایش می‌دهیم. اکنون با توجه به خاصیت $\Phi_0(z,\eta)$ تحت تبدیل مقیاس و از آنجا که OPE میدان Φ_0 با خودش تا پایینترین مرتبه مجبور است متناسب با خودش باشد، می‌توان نوشت:

$$\Phi_0(z_1,\eta_1)\Phi_0(z_2,\eta_2) \sim z^{\bar{\eta}_1\eta_2+\bar{\eta}_2\eta_1}\Phi_0(z,\eta_3) \qquad (٤٧)$$

که $\eta_3=\eta_1+\eta_2$ و $z_1=z$ و $z_2=0$ انتخاب شده است. پس از بسط طرفین، علاوه بر خاصیت بدیهی $\Omega S=S$ به سایر OPEهای ممکن یعنی:

$$\bar{\xi}(z)\xi(0)=2i(\omega+\Omega\log z)$$
$$\xi(z)\omega(0)=-\xi\log z$$
$$\omega(z)\omega(0)=-\log z(2\omega+\Omega\log z) \qquad (٤٨)$$

می‌رسیم که با [١٤] سازگار است.

همچنین در تشابه با CFT معمولی و سازگار با معادله (٤٧) حاصلضرب عملگری زیر را برای ابر تانسور انرژی تکانه پیشنهاد می‌کنیم:

$$T(z,\eta_1)T(0,\eta_2)=z^{\bar{\eta}_1\eta_2+\bar{\eta}_2\eta_1}\left\{\frac{\frac{c(\eta_3)}{2}\Phi_0(\eta_3)}{z^4}+\frac{d(\eta_3)\chi(\eta_3)}{z^3}+\frac{e(\eta_3)T(\eta_3)}{z^2}+\frac{f(\eta_3)T(\eta_3)}{z}\right\} \qquad (٤٩)$$

چند نکته در مورد این OPE لازم به ذکر است. الف: برعکس OPE تانسور انرژی تکانه در نظریه میدانهای همدیس معمولی، در اینجا جمله $\frac{1}{z^3}$ وجود دارد. در OPEهای معمولی این جمله وجود ندارد زیرا $L_{-1}\Omega=0$. در اینجا دلیلی وجود ندارد که $L_{-1}\omega$ ، $L_{-1}\xi$ و $L_{-1}\bar{\xi}$ همگی صفر باشند. همچنین در معادله (٤٩) $\chi(\eta)$ را با $L_{-1}\Phi_0(\eta)$ $\left(\chi(\eta)=\bar{\eta}\sigma+\bar{\sigma}\eta+\bar{\eta}\eta J\right)$ تعریف کرده‌ایم. ب: ثابت $c(\eta)$ را به صورت $c(\eta)=c_1+c_2\bar{\eta}\eta$ اختیار می‌کنیم تا از مواجهه با ثابتهای غیراسکالر جلوگیری کرده باشیم. توجه کنید c_1 همان بار مرکزی است که در CFT معمولی وارد می‌شود. ثابت $e(\eta)$ به صورت $e(\eta)=2+\bar{\eta}\eta$ انتخاب می‌شود تا هم با بعد همدیس $T_0(z)$ سازگار باشد و هم نشان‌دهنده این واقعیت باشد که $t(z)$ جفت لگاریتمی $T_0(z)$ است. همچنین $f(\eta)$ را برابر واحد می‌گیریم تا به روابط آشنای حاصل از اثر T_0 روی سایر اعضای ابر تانسور T برسیم. پس از بسط طرفین معادله (٤٩):

$$T_0(z)T_0(0)=\frac{\frac{c_1}{2}\Omega}{z^4}+\frac{2T_0}{z^2}+\frac{\partial_z T_0}{z}$$

$$T_0(z)t(0)=\frac{\frac{c_2}{2}\Omega+\frac{c_1}{2}\omega}{z^4}+\frac{d_1 J}{z^3}+\frac{2t+T_0}{z^2}+\frac{\partial_z t}{z}$$

$$T_0(z)\zeta(0)=\frac{1}{2}\frac{c_1\xi}{z^4}+\frac{d_1\sigma}{z^3}+\frac{2\zeta}{z^2}+\frac{\partial_z\zeta}{z}$$

$$\zeta(z)t(0)=-\frac{1}{2}\frac{c_1\xi\log z}{z^4}-\frac{d_1\log z\sigma}{z^3}-\frac{2\zeta\log z}{z^2}-\frac{\partial_z(\zeta\log z)}{z}$$

$$\bar{\zeta}(z)\zeta(0)=-\frac{1}{2}\frac{c_1(\omega+\Omega\log z)+c_2\Omega}{z^4}-\frac{d_1 J}{z^3}-\frac{2(t+T_0\log z)+T_0}{z^2}-\frac{\partial_z(t+T_0\log z)}{z}. \qquad (٥٠)$$

و

$$t(z)t(0)=-\frac{1}{2}\frac{\log z\left((c_1\log z+2c_2)\Omega+2c_1\omega\right)}{z^4}-\frac{2d_1\log zJ}{z^3}-\frac{2\log z(2t+T_0\log z)+2\log zT_0}{z^2}-\frac{\partial_z\left(\log z(2t+T_0\log z)\right)}{z} \qquad (٥١)$$

از آنجا که $\langle\Omega\rangle=0$ و $\langle\omega\rangle=1$ از روابط فوق داریم:

$$\left\langle T_0(z)T_0(0)\right\rangle=0 \qquad (٥٢)$$

$$\left\langle T_0(z)t(0)\right\rangle=\frac{c_1}{2z^4} \qquad (٥٣)$$

که با [١٥] سازگاری دارد.

٦. جمعبندی

در این مقاله مشاهده کردیم که کلیه نتایج شناخته شده در نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی را می‌توان با استفاده از ابزار متغیرهای پوچ‌توان به دست آورد. ممکن است این نتیجه صرفاً ابزاری باشد ولی از طرف دیگر احتمال دارد که این توانایی ناشی از وجود ساختاری در پشت نظریه میدانهای همدیس لگاریتمی باشد.

٧. ضمیمه

در یک نظریه میدان همدیس لگاریتمی با سلول جردن رتبه n که $\phi_{(\Delta,0)}(z)$ یک میدان معمولی با بالاترین وزن Δ و $\phi_{(\Delta,k)}(z)$ $(0<k<n)$ شریکهای لگاریتمی آن می‌باشند تابع همبستگی تک‌نقطه‌ای $G_{(\Delta,k)}(z)=\langle\phi_{(\Delta,k)}(z)\rangle$ را در نظر می‌گیریم. اتحاد وارد در LCFT تنها امکان $G_{(0,n-1)}\neq 0$ را می‌دهد و منجر به صفر شدن سایر توابع همبستگی تک‌نقطه‌ای می‌شود. اتحادهای وارد در LCFT برای $G_{(\Delta,k)}(z)$ به صورت زیر است:

$$L_{-1}G_{(\Delta,k)}(z)=\partial_z G_{(\Delta,k)}(z)=0$$
$$L_0 G_{(\Delta,k)}(z)=\left(z\partial_z+\Delta+\hat{\delta}_\Delta\right)G_{(\Delta,k)}(z)=0$$
$$L_1 G_{(\Delta,k)}(z)=\left[z^2\partial_z+2z(\Delta+\hat{\delta}_\Delta)\right]G_{(\Delta,k)}(z)=0 \qquad (۵۴)$$

که $\hat{\delta}_\Delta\phi_{(\Delta,k)}(z)=(1-\delta_{k_0})\phi_{(\Delta,k-1)}(z)$.

اتحاد اول ایجاب می‌کند که $G_{(\Delta,k)}(z)=\text{const.}$ از اتحاد دوم داریم:

$$\Delta G_{(\Delta,k)}+(1-\delta_{k0})G_{(\Delta,k-1)}=0 \qquad (۵۵)$$

که به ازای $k=0$:

$$\Delta G_{(\Delta,0)}=0 \qquad (۵۶)$$

و به ازای $0<k<n$:

$$\Delta G_{(\Delta,k)}+G_{(\Delta,k-1)}=0 \qquad (۵۷)$$

اگر $\Delta\neq 0$ آنگاه $G_{(\Delta,k)}=0$ $(0\le k<n)$ و اگر $\Delta=0$ آنگاه فقط امکان $G_{(0,n-1)}\neq 0$ وجود دارد و بقیه $G_{(0,k)}=0$ $(0\le k<n-1)$. اتحاد سوم منجر به قید دیگری نمی‌شود.

اکنون یک سلول جردن رتبه $n=2$ در نظر می‌گیریم. مطابق با نمادگذاری به کار رفته در معادله (۸) $\phi(z)=\phi_{(\Delta,0)}$ و $\psi(z)=\phi_{(\Delta,1)}$. بنابراین OPEهای سازگار با معادله (۸)، با توجه به اینکه فقط $<\phi_{(0,1)}(z)>=G_{(0,1)}\neq 0$ به صورت زیر خواهند بود:

$$\phi_{(\Delta,0)}(z)\phi_{(\Delta,0)}(0)\sim\sum_{\Delta'}a_1(\Delta,\Delta',0)\phi_{(\Delta',0)}(0)z^{\Delta'-2\Delta}$$
$$\phi_{(\Delta,0)}(z)\phi_{(\Delta,1)}(0)\sim$$
$$\sum_{\Delta'}\left[a_1(\Delta,\Delta',0)\phi_{(\Delta',1)}(0)+a_2(\Delta,\Delta',0)\phi_{(\Delta',0)}(0)\right]z^{\Delta'-2\Delta}$$
$$\phi_{(\Delta,1)}(z)\phi_{(\Delta,1)}(0)\sim$$
$$\sum_{\Delta'}\left\{\left[a_{12}(\Delta,\Delta',0)-2a_1(\Delta,\Delta',0)\ln z\right]\phi_{(\Delta',1)}(0)\right.$$
$$\left.+a_3(\Delta,\Delta',z)\phi_{(\Delta',0)}(0)\right\}z^{\Delta'-2\Delta}. \qquad (۵۸)$$

پس سازگاری OPEها در LCFT ایجاب می‌کند که

$$G(z_1,\cdots,z_n)=\left\langle\phi_{(\Delta,0)}(z_1),\cdots,\phi_{(\Delta,0)}(z_n)\right\rangle=0. \qquad (۵۹)$$

مراجع

1. A A Belavin, A M Polyakov and A B Zamolodchikov, Nucl. Phys. B**241** (1984) 333.
2. V Gurarie, Nucl. Phys. B**410** (1993) [hep-th/9303160].
3. J S Caux, I I Kogan and A M Tsevelik, Nucl. Phys. B**466** (1996) 444 [hep-th/9511134].
4. M R Rahimi-Tabar, A Aghamohammadi and M Khorrami, Nucl. Phys. B**497** (1997) 555 [hep-th/9610168].
5. A M Ghezelbash and V Karimipour, Phys. Lett. B**402** (1997) 2.
6. S Moghimi-Araghi, S Rouhani and M Sadaat, Lett. Math. Phys. **55** (2001) 71 [hep-th/0012149].
7. M Flohr, Nucl. Phys. B**514** (1998) 523 [hep-th/9707090].
8. M Flohr, [hep-th/0009137].
9. J Cardy, Nucl. Phys. B**240** [FS12] (1984) 514.
10. S Moghimi-Araghi and S Rouhani, Letters in Math. Phys. **53** (2000) 49 [hep-th/0002142].
11. I I Kogan and J F Wheater [hep-th/0003184].
12. I I Kogan and A Lewis, Nucl. Phys. B**509** (1998) 687 [hep-th/9705240].
13. J S Caux, I I Kogan, A Lewis and A M Tsevelik, Nucl. Phys. B**489** (1997) 469 [hep-th/9606138].
14. H G Kausch, Nucl. Phys. B**583** (2000) 513.
15. V Gurarie, A W W Ludwig, [cond-mat/9911392].