مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۳، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۱

فرمولبندی هندسی کوانتش تغییر شکل برزین

رسول رکنی‌زاده
دانشگاه اصفهان–گروه فیزیک

دریافت مقاله: ۸۰/۴/۱۰ دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۲/۹

چکیده

در این مقاله سعی می‌شود تا کوانتش برزین روی فضای هیلبرت تصویری $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ مجدداً فرمولبندی شود تا ازاین طریق رابطهٔ (پاد) کوانتش برزین با فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی آشکار شود. خواهیم دید از این طریق بروشنی می‌توان دینامیک در کوانتش برزین را مورد مطالعه قرار داد و از کوانتش برزین حد کلاسیک فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: کوانتش برزین، هندسهٔ‌مکانیک کوانتومی، کوانتش تغیرشکل

۱ مقدمه

کوانتش کلیدواژه‌ای برای بیان انگیزهٔ تلاشهایی است که در صدد توصیف همهٔ انواع برهم‌کنشها، به خصوص گرانش، در چارچوب ریاضی هندسی واحدی می باشند. درکوانتش برزین از یک نمایش جبر–C^* مشاهده‌پذیرهای کوانتومی، سمبلهای هموردای متناظر با آنها تعریف می‌شود. این سمبلهامقادیر چشم داشتی مشاهده پذیرهادر حالت‌های همدوس برزین هستند. حالت‌های همدوس برزین توابع هولومورفیک روی فضای فاز کلاسیک M می باشند که فرض می‌شود یک چند گونای کیلری است. برزین نشان داد که که سمبلهای هموردا یک جبر $*_\hbar$ تشکیل می دهند که این جبردر حد $\hbar \to 0$ به براکتهای پوآسون بین مشاهده پذیرهای متناظر کلاسیک منجر می‌شود. هر چند وجود جبر $*_\hbar$ برای همهٔ‌چند گوناهای سیمپلکتیک اثبات شده است [۴] اما ساختار این جبرها عمومی نمی‌باشد.

در این مقاله خواهیم دید که در واقع جبر $*_\hbar$ یک جبر پوآسون است که از طریق دو فرمی فوبینی–استادی روی فضای حالتهای همدوس تعریف می‌شود. فضای حالتهای همدوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

حالتهای همدوس یک زیر فضای چگال $\widetilde{\mathcal{H}}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را می‌پوشانند. $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$، فضای برافکنشی حالتهای همدوس را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{M}$ یک خمینهٔ کیلری با دو فرمی سیمپلکتیک فوبینی—استادی است. می‌توان سمبلهای هموردا رابه عنوان توابعی روی این فضا در نظر گرفت که از طریق دو فرمی سیمپلکتیک یک جبر پوآسون تشکیل می دهند.

با نشان دادن اینکه بین M و $\mathcal{M}$ یک نگاشت نشانندگی وجوددارد که هر حالت $z \in M$ را به یک حالت $Z \in \mathcal{M}$ بطور پیوسته می نگارد، روشن می‌شود که در واقع کوانتش برزین رابطهٔ این دو جبرپوآسون می باشد. به این ترتیب به یک فرمولبندی هندسی مشترک برای مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک دست می یابیم. بویژه این فرمولبندی روی خمینهٔ فضای فاز، که ضرورتاً خطی نیست، انجام می‌شود. دینامیک کوانتومی در این فرمولبندی از طریق معادلات هامیلتون، به جای معادلهٔ شرودینگر، داده می‌شود. دینامیک در کوانتش برزین نیزبه صورت رابطهٔ معادلات هامیلتون در M و $\mathcal{M}$ تعریف می‌شود.

آنچه گفته شدرا می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود

ساختار مکانیک کلاسیک

محیط ریاضی : فضای فاز M که یک‌خمینهٔ سیمپلکتیک عموماً غیرخطی است

حالتها: نقاط (q,p) در فضای فاز M

مشاهده‌پذیرها: توابع f روی M

نتایج اندازه گیری :مقادیر دقیق توابع در نقاط M: $f(q,p)$

دینامیک : از طریق تابع هامیلتونی به صورت معادلات

هامیلتون : $\dot{q}^i = \partial H/\partial p_i$ و $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q^i$

ساختار مکانیک کوانتومی

محیط ریاضی : فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، که یک فضای برداری خطی نرم دار کامل است

حالتها: بردارهای $\psi \in \mathcal{H}$

مشاهده‌پذیرها: عملگرهای خود الحاق A روی $\mathcal{H}$

نتایج اندازه گیری : مقادیر چشم داشتی عملگرها در حالتهای مختلف $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$

دینامیک : از طریق عملگر هامیلتونی H در معادلهٔ شرودینگر $H\psi = i\hbar\partial_t\psi$

کوانتش

کوانتش عبارت است از فرایندی که در آن این دو ساختار به هم مربوط می‌شوند.

۲ کوانتش برزین

برزین [۲] در سالهای ۱۹۷۴—۱۹۷۵ یک روش جالب برای کوانتش سیستم‌های کلاسیک بر اساس حالتهای همدوس ارائه نمود. رویکرد اساسی در این روش آن است که فضای فاز کلاسیک $M^{2f}(q_1,\cdots,p_f)$ با f درجهٔ آزادی رابا فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به هم مربوط کنند. اینکار با استفاده از حالتهای همدوس $\Phi_z \in \mathcal{H}$ انجام می‌شود که از طریق نقاط فضای فاز M پارامتریزه می‌شوند. حال اگر مقدار چشم داشتی یک عملگر کراندار را در حالتهای همدوس محاسبه کنیم یک تابع دارای مقدار مختلط روی فضای فاز بدست می‌آید. برای یک زیر فضا از توابع روی فضای فاز، یعنی سمبلهای هموردا، یک نگاشت کوانتش ساخته می‌شود. به این ترتیب به هر عملگر یک سمبل هموردا نسبت داده می‌شود که این سمبلها در یک جبر شرکت پذیر ناجابه‌جایی با ضرب $*_\hbar$، که به $\hbar$ وابسته است شرکت می‌کنند. تغییر $\hbar$ مطابق با تغییر شکل این جبر است. ضرب $\hbar$ بایستی در حد $\hbar \to 0$ به حاصلضرب نقطه به نقطهٔ معمولی بین توابع تبدیل شود و اصل انطباق نیز برآورده شود

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \hbar^{-1}(f *_\hbar g - g *_\hbar f) = -i\{f_0, g_0\} \qquad (۱.۲)$$

که در اینجا

$$f_0 = \lim_{\hbar\to 0^+} f, g_0 = \lim_{\hbar\to 0^+} g.$$

به این ترتیب کوانتش برزین یک کوانتش برای حالتهاو پاد کوانتش برای عملگرهاست

$$M \ni z \to \Phi_z \in \mathcal{H}, \quad A \to \frac{\langle\Phi_z|A|\Phi_z\rangle}{\langle\Phi_z,\Phi_z\rangle} \qquad (۲.۲)$$

۱.۲ کوانتش برزین روی یک خمینهٔ کیلری

فرض می‌کنیم M یک خمینهٔ کیلری با فرم سیمپلکتیک ω و براکت پوآسون $\{\cdot,\cdot\}$ باشد. منظور از کوانتش برزین (M,ω) یک جبر شرکت پذیر $\mathcal{U}$ با خودوارونی است که شرایط زیر را برآورده می‌کند

۱) یک خانواده $\mathcal{A}_\hbar$ از جبرهای شرکت پذیرو ضرب $*_\hbar$ با تعریفی که در بالا داده شده است یعنی

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \hbar^{-1}(f*_\hbar g - g*_\hbar f) = -i\{f_0,g_0\} \qquad (۳.۲)$$

که در اینجا

$$f_0=\lim_{\hbar\to 0^+} f,\ g_0=\lim_{\hbar\to 0^+} g.$$

وجود دارد که برای آن داریم

- (۱.الف)هر $\mathcal{A}_\hbar$ یک جبر از توابع روی M با جمع نقطه به نقطه‌و ضرب در اسکالر و مزدوج مختلط به عنوان خودوارونی می باشد؛
- (۱.ب) $\hbar\in\Delta\subset(0,\infty)$ و $0\notin\Delta$؛
- (۱.ج) $\mathcal{U}$ یک زیر جبرمستقیم $\oplus\mathcal{A}_\hbar$ از جبرهای $\mathcal{A}_\hbar$ است که برای آن $\hbar\in\Delta$ می باشد. عناصر $\mathcal{U}$ به شکل $f(\hbar|\cdot)$ نوشته می‌شوند که برای آنها $\hbar\in\Delta$ و $z\in M$ و $f(\hbar|\cdot)\in\mathcal{A}_\hbar$؛

۲) برای $f\in\mathcal{U}$ و $z\in M$ حد زیر وجود دارد

$$\lim_{\hbar\to 0} f(\hbar|z)=\varphi(f)(z), \qquad (۴.۲)$$

نگاشت $\varphi:\mathcal{U}\to\mathcal{F}(M)$ که $\mathcal{F}(M)$ مجموعهٔ توابع هموار روی M است، دارای این ویژگی است که برای جبر خطی $\tilde{\mathcal{U}}\subset\mathcal{U}$

- (۲.الف) $\varphi(f_1*f_2)=\varphi(f_1).\varphi(f_2)$
- (۲.ب)

$$\varphi\left(\frac{1}{\hbar}(f_1*f_2-f_2*f_1)\right)=-i\{\varphi(f_1),\varphi(f_2)\}$$

دراینجا $f_1,f_2\in\tilde{\mathcal{U}}$

- (۲.ج) برای هر دو نقطهٔ $z_1,z_2\in M$ یک $f\in\tilde{\mathcal{U}}$ وجود دارد به طوری که $\varphi(f)(z_1)\neq\varphi(f)(z_2)$.

شرایط (۲.الف) و (۲.ب)اصل انطباق ضعیف نامیده می‌شوند. اگر $\mathcal{U}=\tilde{\mathcal{U}}$ آنگاه به آن اصل انطباق قوی می گویند. (۲.ج) تضمین می‌کند که به اندازهٔ‌کافی توابع کوانتش پذیر وجود دارد.

۲.۲ جبر سمبلهای هموردا

ابتدا فضای برگمن وزندار $\mathcal{H}_\hbar$ را معرفی می‌کنیم

$$\mathcal{H}_\hbar=\{f|\int|f(z)|^2 e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi(z,\bar z)}d\nu(z,\bar z)=||f||_\hbar^2<\infty\} \qquad (۵.۲)$$

این فضا یک زیر فضای $L^2(M,e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi})$ است. در واقع $\mathcal{H}_\hbar$ فضای توابع تحلیلی مربعاً انتگرال پذیر روی‌خمینهٔ کیلری M با سنجهٔ زیر است

$$d\mu(z,\bar z)=e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi(z,\bar z)}d\nu(z,\bar z) \qquad (۶.۲)$$

دیگر ویژگی‌های این فضا در [۱۳] و[۱۵] آمده است. حالتهای همدوس برزین $\Phi_{\bar z}$ یک مجموعهٔ فوق کامل در این فضا می سازند. با توجه به تعریف حاصلضرب داخلی دراین فضا داریم

$$\Phi^\hbar_{\bar\zeta}(z)=\langle\Phi^\hbar_{\bar z},\Phi^\hbar_{\bar\zeta}\rangle_\hbar=:K_\hbar(\bar\zeta,z) \qquad (۷.۲)$$

که دراینجا $K_\hbar(\bar\zeta,z)$ کرنل برگمن است [۱۵] که دارای ویژگی مهم بازآفرینی است

$$f(\zeta)=\langle\Phi^\hbar_{\bar\zeta},f\rangle_\hbar \qquad (۸.۲)$$

به عبارت دیگر

$$\Phi^\hbar_{\bar\zeta}(z)=K_\hbar(\bar\zeta,z)=\int_M K_\hbar(\bar\zeta,\zeta')K_\hbar(\bar\zeta',z)d\mu(\bar\zeta',\zeta') \qquad (۹.۲)$$

واز اینرو داریم

$$1=\int|\Phi^\hbar_{\bar z}\rangle\langle\Phi^\hbar_{\bar z}|d\mu(\bar z,z) \qquad (۱۰.۲)$$

همچنین کرنل برگمن هرمیتی است یعنی

$$K_\hbar(\bar\zeta,z)=\overline{K_\hbar(\bar z,\zeta)} \qquad (۱۱.۲)$$

با توجه به دو ویژگی فوق کرنل برگمن به طور یگانه برای هر فضا تعیین می‌شود. در واقع کرنل برگمن حامل ساختار

هندسی فضای فاز به (فضای هیلبرت) حالتهای همدوس است.

حال عملگر برافکنشی $P_\hbar$ از $L^2(M, e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi})$ به $\mathcal{H}_\hbar$ را تعریف می‌کنیم

$$(P_\hbar f)(z) = \int f(\bar{\zeta},\zeta) K_\hbar(\bar{\zeta},z) e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi(\bar{\zeta},z)} d\nu(\bar{\zeta},\zeta)$$
(۱۲.۲)

برای یک عملگر کراندار A روی $\mathcal{H}_\hbar$ داریم

$$\begin{aligned}(Af)(z) &= \langle K_\hbar(\bar{z},\cdot), Af\rangle_\hbar = \langle A^\dagger K_\hbar(z,\cdot), f\rangle_\hbar \\ &= \int_M \overline{A^\dagger K_\hbar(\bar{z},\cdot)(\zeta)} f(\zeta)\, d\mu(\zeta) \\ &= \int_M f(\zeta) K_A(\bar{\zeta},z)\, d\mu(\bar{\zeta},\zeta),\end{aligned}$$
(۱۳.۲)

که در اینجا

$$\begin{aligned}K_A(\bar{\zeta},z) &= \overline{(A^\dagger K_\hbar(\bar{z},\cdot))(\zeta)} \\ \overline{\langle K_\hbar(\zeta,\cdot), A^\dagger K(\zeta,\cdot)\rangle_\hbar} &= \langle A^\dagger K_\hbar(\bar{z},\cdot), K_\hbar(\bar{\zeta},\cdot)\rangle_\hbar \\ &= \langle K_\hbar(\bar{z},\cdot), AK_\hbar(\bar{\zeta},\cdot)\rangle_\hbar\end{aligned}$$
(۱۴.۲)

لذا هر عملگر کراندار A روی $\mathcal{H}_\hbar$ یک عملگر انتگرالی با کرنل K_A می باشد. فرض می‌کنیم A و B عملگرهای کراندار باشند. با توجه به تعریف کرنل به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}K_{A+B} &= K_A + K_B \quad , \quad K_{cA} = cK_A, \quad c\in\mathbb{C} \\ K_{A^\dagger}(\bar{\zeta},z) &= \overline{K_A(\bar{z},\zeta)}, \qquad K_I(\bar{\zeta},z) = K_\hbar(\bar{\zeta},z) \\ K_{AB}(\bar{\zeta},z) &= \int K_A(\bar{\xi},z) K_B(\bar{\zeta},\xi)\, d\mu(\bar{\xi},\xi).\end{aligned}$$

(برای سادگی در نوشتن، شناسهٔ $\hbar$ در بعضی موارد نوشته نمی‌شود).

تابع

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(\bar{\zeta},z) &= \frac{K(\bar{\zeta},z)}{K_A(\bar{\zeta},z)} = \frac{\langle K_\hbar(\bar{z},\cdot), AK_\hbar(\bar{\zeta},\cdot)\rangle_\hbar}{K_\hbar(\zeta,z)} \\ &= \frac{\langle \Phi^\hbar_{\bar{z}}, A\Phi^\hbar_{\bar{\zeta}}\rangle_\hbar}{\langle \Phi^\hbar_{\bar{z}}, \Phi^\hbar_{\bar{\zeta}}\rangle_\hbar}\end{aligned}$$
(۱۵.۲)

یک تابع مروموروفیک در z و پادمروموروفیک در ζ است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$\widetilde{I}(\bar{\zeta},z) = 1 \quad , \quad (\widetilde{A+B}) = \widetilde{A} + \widetilde{B}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A^*}(\bar{\zeta},z) &= \overline{\widetilde{A}(\bar{z},\zeta)} \quad , \quad \widetilde{cA} = c\widetilde{A}, c\in\mathbb{C} \\ (Af)(z) &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta},z) K_\hbar(\bar{\zeta},z) f(\zeta)\, d\mu(\bar{\zeta},\zeta).\end{aligned}$$
(۱۶.۲)

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \widetilde{A} *_\hbar \widetilde{B}(z) \\ &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta},z)\widetilde{B}(\bar{z},\zeta)\frac{|K_\hbar(\bar{\zeta},z)|^2}{K_\hbar(\bar{z},z)} \\ &\times \quad e^{-\frac{1}{\hbar}\Psi(\bar{\zeta},z)}\, d\mu(\bar{\zeta},\zeta)\end{aligned}$$
(۱۷.۲)

تحدید $\widetilde{A}(\bar{\zeta},z)$ به عناصر قطری

$$\widetilde{A}(z) = \widetilde{A}(\bar{z},z), \qquad z\in M$$
(۱۸.۲)

سمبل همموردای عملگر A نامیده می‌شود. $\widetilde{A}(z)$ مقدار چشم داشتی A در حالت همدوس $\Phi_{\bar{z}}$ است که توسط z پارامتریزه می‌شود و لذا تابعی روی خمینهٔ M است. بنا بر قضیهٔ شوارتز داریم

$$|\widetilde{A}(z,\bar{z})| \leq ||A||, \qquad \forall z\in M,$$
(۱۹.۲)

یعنی $\widetilde{A}(z)$ یک تابع کراندار روی M است.

به این ترتیب ما به یک تحقق از جبر $\mathcal{A}$ می رسیم

$\mathcal{A} = \{\widetilde{A}(z) :$ $\mathcal{H}$ عملگر خود الحاق روی $A\}$
(۲۰.۲)

از آنجایی‌که یک تابع تحلیلی از دو متغیر z و ζ به طور یگانه از طریق تحدید به عناصر پاد قطری یعنی $\bar{\zeta} = z$ معین می‌شود [۸] در نتیجه $\widetilde{A}(z)$ به طور یگانه $\widetilde{A}(\bar{\zeta},z)$ را و بنابراین $K_A(\bar{\zeta},z)$ و بالاخره A را تعیین می کند؛ لذا تناظر $A \leftrightarrow \widetilde{A}(z)$ یک به یک است. از اینرو می‌توان جمع را از طریق $(\widetilde{A}+\widetilde{B})(z) = (\widetilde{A+B})(z)$، ضرب در یک اسکالر را از طریق $c\widetilde{A} = \widetilde{cA}$ و خودوارونی را از طریق $\widetilde{A^*} = (\widetilde{A})^*$ و حاصلضرب در $\mathcal{A}$ را از طریق (۱۷.۲) تعریف کرد.

بنابر این $\mathcal{A}_\hbar$ یک جبر$-*$ شرکت پذیر روی M است که عنصر همانی آن $1 = \widetilde{I}$ می باشد. $\mathcal{A}_\hbar$ جبر سمبلهای همموردای $\mathcal{H}_\hbar$ نامیده می‌شود و با جبر همهٔ عملگرهای خودالحاق روی $\mathcal{H}_\hbar$ یکریخت است.

بنابر این در اینجا نیز به تحققی از جبر مجرد $\mathcal{A}_\hbar$ رسیدیم که برای بدست آوردن مشاهده‌پذیرهای کوانتومی نیاز داشتیم.

۳.۲ فرضیات واصل انطباق

در اینجا بایستی نشان داد که می‌توان از طریق جبر $\mathcal{A}_\hbar$ در حد $\hbar \to 0$ جبر پوآسون بین مشاهده پذیرهای کلاسیک متناظر با عملگرهای خودالحاق را بدست آورد. برای اینکار نیاز به فرضیات زیر است

- **فرض** A یک زیر مجموعه $\Delta \subset \mathbb{R}^+$ که $0 \notin \Delta$، وجود دارد که برای همهٔ $\hbar \in \Delta$ یک ثابت $\lambda_\hbar$ طوری وجود دارد که

$$K_\hbar(\bar{z}, z) = \lambda_\hbar e^{\frac{1}{\hbar}\Psi(\bar{z},z)} \qquad (۲۱.۲)$$

- **فرض** B یک نقطهٔ $\hbar_0 \in \Delta$ وجود دارد که برای $\hbar \le \hbar_0$، توابع $f(z) \in \mathcal{H}_\hbar$ نقاط M را جدا می‌کنند، یعنی برای $z_1, z_2 \in M$ و $z_2 \neq z_1$، یک تابع $f(z) \in \mathcal{H}_\hbar$ وجود دارد که $f(z_1) \neq f(z_2)$.
- **فرض** C اگر (z_n) یک دنباله در M باشد و حد $\lim_{n\to\infty}$ برای هر $f \in \mathcal{H}_\hbar$ وجود داشته باشد، آنگاه z_n به یک نقطهٔ $z_0 \in M$ همگرا می‌شود.
- **فرض** D یک نقطهٔ $z_0 \in M$ طوری وجود دارد که $\Psi(\bar{z}_0, \cdot)$ برابر با یک ثابت است.

فرض D یک شرط بهنجارش است؛ می‌توان بدون ایجاد محدودیت قرار داد $\Psi(z_0, z) = 0$. فرض B تضمین می‌کند که $\mathcal{H}_\hbar$ در $C^\infty(M)$ چگال است. فرض A در بعضی ازخمینه‌ها می تواند مسئله ساز باشد اما در بسیاری از خمینه‌های جالب توجه در فیزیک می‌توان آن را بکاربرد[۶].

در ابتدای این بخش جبر سمبلهای هموردا $\mathcal{A}_\hbar$ برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\hbar$ تبیین گردید. فرض می‌کنیم $\mathcal{U}$ مجموعهٔ توابع $f(\hbar|z)$ باشد، که در اینجا $\hbar \in \Delta$ و $z \in M$، طوری که $f(\hbar|\cdot) \in \mathcal{A}_\hbar$ و حد

$$\lim_{\hbar\to 0} f(\hbar|z) =: f(0|z) \qquad (۲۲.۲)$$

برای هر $z \in M$ وجود داشته باشد. با توجه به عملیات زیر $\mathcal{U}$ یک جبر شرکت پذیراست

$$(f+g)(\hbar|z) = f(\hbar|z) + g(\hbar|z)$$
$$(cf)(\hbar|z) = cf(\hbar|z)$$
$$(f*g)(\hbar|z) = (f(\hbar|\cdot) * g(\hbar|\cdot))(z). \qquad (۲۳.۲)$$

فرض می‌کنیم $\widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ مجموعهٔ همهٔ توابعی باشد که بتوان آنها را به صورت زیر بسط داد

$$f(\hbar|z) = f(0|\bar{z}, z) + \hbar f_1(\hbar|\bar{z}, z) + \hbar^2 f_2(\hbar|\bar{z}, z) \qquad (۲۴.۲)$$

که در اینجا $f(0|\bar{z}, z)$، $f_1(\bar{z}, z)$ و $f_2(\hbar|\bar{z}.z)$ توابع یک و نیم خطی (sesquilinear) روی $M \times \overline{M}$ هستند و یک گسترش تحلیلی روی آن دارند. با این فرضیات می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد

قضیه. ۱.۲ اگر فرضیات C،B،A و D برقرار باشند و $\hbar \in \Delta'$ در حد $\hbar \to 0$ داریم

$$(f*g)(\hbar|z) = f(0|z)g(0|z) + \mathcal{O}(\hbar) \qquad (۲۵.۲)$$

$$\frac{1}{\hbar}(f*g - g*f)(\hbar|z) = -i\{f(0|.), g(0|.)\}(z) + \mathcal{O}(\hbar). \qquad (۲۶.۲)$$

که در اینجا Δ' زیر مجموعه‌ای از Δ است که $f(\hbar|z)$ با توجه به تعریف نرم در $\mathcal{H}_\hbar$ مربعاًانتگرال پذیر است.

اثبات . [۲]

خلاصه. با توجه به فرایند (پاد)کوانتش برزین ما فضای هیلبرت حالتهای همدوس را روی‌خمینهٔ کیلری فضای فاز کلاسیک بنا کردیم به طوری که هر حالت با یک نقطه در فضای فاز به هم مربوط می‌شود (کوانتش حالتها) و جبر مشاهده پذیرهای کلاسیک را از سمبلهای هموردای مشاهده پذیرهای کوانتومی بدست آوردیم (پادکوانتش مشاهده پذیرها).

حال می خواهیم از روش فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی برای یک فرمولبندی هندسی کوانتش برزین استفاده کنیم.

۳ فضای فاز کوانتومی

فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. فضای پرتوها در فضای هیلبرت را با $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ نشان می دهیم و به آن فضای هیلبرت برافکنشی می گوییم. $\pi : \mathcal{H}\backslash 0 \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک برافکنش کانونیک است. هر نقطه در فضای برافکنشی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را با $[\psi]$ نشان می دهیم که متناظر با زیر فضای یک بعدی $\mathbb{C}\psi$ در $\mathcal{H}$ است. فضای $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک‌خمینهٔ کیلری با دو فرمی فوبینی—استادی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]

$$\Omega^{\hbar}_{[\psi]}(T_\psi\pi(\phi_1), T_\psi\pi(\phi_2)) = -2\hbar(\langle\phi_1, \phi_2\rangle) \qquad (1.3)$$

که در اینجا $\phi \in (\mathbb{C}\psi)^{\perp}$ و $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک نقطه در فضای برافکنشی و $T_\psi\pi(\phi)$ فضای مماسی در نقطهٔ $[\psi]$ بر $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که با $\mathcal{H}\backslash\mathbb{C}\psi$ یکریخت می باشد

$$T_\psi\pi : \mathcal{H} \to T[\psi]\mathbb{P}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H}/\mathbb{C}\psi$$

وبه صورت زیر تعریف می‌شود

$$(T_\psi\pi)(\phi) = \frac{d}{dt}\pi(\psi + t\phi)\mid_{t=0}$$

۱.۳ اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$

فرض می‌کنیم $\{\varphi_n\}$ یک دستگاه راست هنجار دلخواه در $\mathcal{H}$ باشد. ضرایب فوریهٔ بردار ψ در این پایه عبارتند از $\lambda_k = \langle\varphi_k, \psi\rangle$. برای هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \mid \lambda_k = \langle\phi_k, \psi\rangle \neq 0\} \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \to l^2(\mathbb{C}) \\ \varphi_k([\psi]) &:= (\frac{\lambda_1}{\lambda_k}, \frac{\lambda_2}{\lambda_k}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}, \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}, \dots) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

که در اینجا $l^2(\mathbb{C})$ فضای هیلبرت دنباله‌های مربعاً انتگرال پذیر از اعداد مختلط است. مختصات $[\psi]$ در رابطه با مختصات $(\mathcal{V}_k, \varphi_k)$ را با Z^k_n نشان می دهیم. به طوری که

$$Z^k_n = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} & : \quad n < k \\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k} & : \quad n \geq k \end{cases} \qquad (3.3)$$

در این مختصات خواهیم داشت $\langle\psi, \psi\rangle = (1 + \sum_n Z^k_n \bar{Z}^k_n)$. می‌توان نشان داد $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$ یک نگاشت هولومورف دو سویه است. بنابراین $\{\mathcal{V}_k, \varphi_k\}$ یک اطلس هولومورف است. می‌توان این اطلس را به صورت دیگری نیز بنا نمود. بنا بر تعریف

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \; : \; \lambda_k = \langle\phi_k, \psi\rangle \neq 0\} \\ \mathcal{W}_k &:= [\phi_k]^{\perp} \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \to \mathcal{W}_k \; , \; [\psi] \mapsto \varphi_k([\psi]) = \frac{\psi}{\langle\phi_k, \psi\rangle} - \phi_k . \end{aligned} \qquad (4.3)$$

بنابراین برای $[\psi] \in \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_{k'}$ داریم

$$\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}[\psi] = \frac{\psi + \phi_{k'}}{\langle\phi_k, \psi + \phi_{k'}\rangle} - \phi_k . \qquad (5.3)$$

برای اثبات اینکه این یک اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می سازد به طریق زیر عمل می‌کنیم

مخرج کسر طرف راست برای هر $[\psi]$ متعلق به $\mathcal{V}_k$ غیر صفر است، بنابراین $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$ تابع هموار روی حوزهٔ تعریف خود می باشد.

فرض می‌کنیم $\frac{\psi}{\langle\phi_k, \psi\rangle} - \phi_k = \frac{\psi'}{\langle\phi_k, \psi'\rangle} - \phi_k$؛ آنگاه

$$\psi' = \frac{\langle\phi_k, \psi'\rangle}{\langle\phi_k, \psi\rangle}\psi = c\psi$$

و بنا براین $[\psi'] = [\psi]$. یعنی φ_k یک به یک است. چون برای $\chi \in \mathcal{W}_k$ داریم $\langle\phi_k, \chi\rangle = 0$ و $\langle\phi_k + \chi, \phi_k\rangle = 1 \neq 0$ بنا براین $\phi_k + \chi \in \mathcal{V}_k$. حال می‌توان نشان داد هر عنصر $\mathcal{W}_K$ به صورت تصویر یک عنصر از $\mathcal{V}_k$ می‌تواند نوشته شود. $\varphi_k(\phi_k + \chi) = \frac{\phi_k + \chi}{\langle\phi_k, \phi_k + \chi\rangle} - \phi_k = \chi$. بنابراین φ_k پوشا[1] می باشد. ازاینرو $(\mathcal{V}_k, \mathcal{W}_k; \varphi_k)$ یک اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می سازد.

۲.۳ میدان‌های برداری هامیلتونی روی فضای فاز کوانتومی

ابتدا یک میدان برداری هامیلتونی را روی یک خمینهٔ سیمپلکتیک (M, ω) تعریف می‌کنیم. میدان A را هامیلتونی

[1] surjective

می نامیم اگر بتوان همواره روی M تابع هموار f را پیدا کرد که برای آن داشته باشیم

$$i_A\omega = df \qquad (۶.۳)$$

که در اینجا i_A ضرب درونی دوفرمی ω نسبت به A است.

مشاهده پذیرهای H مکانیک کوانتومی عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت اند. مقادیر چشم داشتی یک عملگر $\langle H\rangle$ در حالتهای مختلف $\psi\in\mathcal{H}$ می توانند توابعی روی‌خمینهٔ سیمپلکتیک $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ در نظر گرفته شوند. A یک میدان برداری هامیلتونی است اگر یک عملگر خودالحاق H_A طوری وجودداشته باشد که با دوفرمی فوبینی—استادی رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$i_A\Omega_{FS} = d\langle H_A\rangle. \qquad (۷.۳)$$

که در اینجا $\langle H_A\rangle$ مقدار چشم داشتی H_A می باشد

$$\langle H_A\rangle = \frac{\langle\psi, H_A\psi\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle}. \qquad (۸.۳)$$

H_A را عملگر هامیلتونی مربوط به A می گویند. مسئله‌ای که در اینجا مطرح می‌شود آن است که وقتی عملگر هامیلتونی بیکران باشد مقدار چشم داشتی آن فقط روی یک زیر مجموعهٔ چگال در $\mathbb{P}(\mathcal{H})$، ونه روی کل $\mathbb{P}(\mathcal{H})$، یک تابع هموار تعریف می کند. در اینجا به مورد عملگرهای بیکران نمی پردازیم. حال می‌خواهیم نشان دهیم [۱۳، ۳]

قضیه. ۱.۳ فرض می‌کنیم A یک میدان برداری هامیلتونی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و H_A عملگر هامیلتونی مربوط به آن باشد. معادلهٔ شرودینگر روی فضای هیلبرت با هامیلتونی H_A هم ارز با معادله ای است که توسط A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ داده می‌شود.

اثبات . فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}$ یک پایهٔ راست هنجار در $\mathcal{H}$ و $\psi\in\mathcal{H}-\{0\}$ باشد. ضرایب فوریه دراین پایه عبارتند از $\lambda_n = \langle\phi_n,\psi\rangle$ و عناصر ماتریسی H_A از رابطهٔ $h^A_{mn} = \langle\phi_m, H_A\phi_n\rangle$ معین می‌شوند. معادلهٔ شرودینگر

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_A\psi \qquad (۹.۳)$$

به صورت زیر در خواهد آمد

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_n \lambda_n\phi_n = H_A\sum\lambda_n\phi_n \qquad (۱۰.۳)$$

ویا

$$i\hbar\dot\lambda_n = \sum_m h^A_{nm}\lambda_m \qquad (۱۱.۳)$$

که در اینجا $\dot\lambda_n = \partial\lambda_n/\partial t$. ازاینجا به بعد ما $k\in\mathbb{N}$ را ثابت در نظر می گیریم و علامتگذاری زیر را معرفی می کنیم

$$\hat n = \begin{cases} n & : \quad n<k \\ n+1 & : \quad n\geq k \end{cases} \qquad (۱۲.۳)$$

و بنابراین می توانیم مختصات جدید روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را تعریف کنیم

$$Z^k_n = \frac{\lambda_{\hat n}}{\lambda_k}. \qquad (۱۳.۳)$$

در مختصات جدید معادلهٔ شرودینگر(۹.۳) به صورت زیر در می آید

$$i\hbar\dot Z^n_k = \sum_m h^A_{\hat n\hat m}Z^k_m + h^A_{\hat n k} - \sum_m h^A_{k\hat m}Z^k_m Z^k_n - h^A_{kk}Z^k_n. \qquad (۱۴.۳)$$

در اینجا از رابطهٔ

$$\sum_m h^A_{nm}\lambda_m = \sum_m h^A_{n\hat m}\lambda_{\hat m} + h^A_{nk}\lambda_k \qquad (۱۵.۳)$$

استفاده کرده ایم. می خواهیم رابطهٔ (۱۴.۳) را با معادلهٔ که از A بدست می آید مقایسه کنیم. همان‌طورکه در ابتدای این بخش گفته شد مقدار چشم داشتی H_A تابع هامیلتونی میدان برداری A است

$$\langle H_A\rangle = \frac{\langle\psi, H_A\psi\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle} = \frac{\sum_{n,m}\bar\lambda_n h^A_{nm}\lambda_m}{\sum_n\bar\lambda_n\lambda_n} \qquad (۱۶.۳)$$

در مختصات Z^k_m مقدار چشم داشتی H_A به صورت زیر در خواهد آمد

$$\begin{aligned}\langle H_A\rangle &= \Big[\sum_{m,n}\bar Z^k_n h^A_{\hat n\hat m}Z^k_m + \sum_n h^A_{k\hat n}Z^k_n \\ &+ \sum_m \bar Z^k_m h^A_{\hat m k}h^A_{kk}\Big]\Big(1+\sum Z^k_i\bar Z^k_i\Big)^{-1}\end{aligned} \qquad (۱۷.۳)$$

که در اینجا رابطهٔ زیر بکار رفته است

$$\sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n = \sum_n \bar{\lambda}_{\hat{n}} \lambda_{\hat{n}} + \bar{\lambda}_k \lambda_k = (\bar{\lambda}_k \lambda_k)\left(1 + \sum \bar{Z}_i^k Z_i^k\right)$$

می‌توان معادلهٔ زیر را از روابط بالا بدست آورد

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k} &= \sum G_{np}^k \Big(\sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A \\ &- \sum h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \Big) \end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

که در اینجا G_{np}^k همان دوفرمی فوبینی — استادی $\Omega_{np}^k/(\hbar)$ روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که در مختصات موضعی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \Omega_{np}^k &= \hbar \Big[(1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k)^{-1} \delta_{np} \\ &- (1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k)^{-2} Z_n^k \bar{Z}_p^k \Big]. \end{aligned} \qquad (۱۹.۳)$$

در مختصات موضعی می‌توان میدان برداری A در رابطهٔ (۶.۳) رابه صورت زیر نوشت

$$A = -i \sum_{n,p} \Omega^{k,np} \left(\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k} \frac{\partial}{\partial Z_n^k} - \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_n^k} \right) \qquad (۲۰.۳)$$

که در اینجا $\Omega^{k,np}$ وارون Ω_{np}^k در مختصات موضعی است. چون $\langle H_A \rangle$ حقیقی است

$$\overline{\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k}} = \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \qquad (۲۱.۳)$$

بنا براین دراین مختصات A به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{\hbar} \sum_n \Big(\sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A \\ &- \sum h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \Big) \frac{\partial}{\partial Z_n^k} + c.c. \end{aligned} \qquad (۲۲.۳)$$

با استفاده از (۱۴.۳) داریم $A(Z_n^k) = -\frac{i}{\hbar}(i\hbar)\dot{Z}_n^k = \dot{Z}_n^k$ که از اینجا نتیجه می‌شود

$$\{\mathcal{H} \text{ روی } \frac{-i}{\hbar} H_A\} \equiv \{\mathbb{P}(\mathcal{H}) \text{ روی } A = X_{\langle H_A \rangle}\} \qquad (۲۳.۳)$$

به عبارت دیگر

$$A[\psi] = \frac{1}{i\hbar} \frac{H_A \psi}{\|\psi\|}. \qquad (۲۴.۳)$$

در اینجا $A[\psi]$ یک بردار مماسی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ در نقطهٔ $[\psi]$ است. ■

بخش مزدوج مختلط A معادلهٔ شرودینگر را برای ψ^* نتیجه می دهد.

به عنوان یک نتیجهٔ خاص می‌توان گفت تحول زمانی یک دستگاه کوانتوم مکانیکی به صورت معادلات هامیلتونی مکانیک کلاسیک می تواند نوشته شود، که تابع هامیلتونی مقدار منتظرهٔ‌عملگر هامیلتونی است.

به این ترتیب می‌توان انتظار داشت که روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک ساختار پوآسون وجود داشته باشد. در گزارهٔ زیر خواهیم دید که این ساختار پوآسونی بر حسب دو فرمی فوبینی—استادی تعریف می‌شود. روی یک‌خمینهٔ سیمپلکتیک با دو فرمی Ω رابطهٔ زیر برقرار است

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) \qquad (۲۵.۳)$$

که در اینجا X_f و X_g به ترتیب میدانهای برداری هامیلتونی f و g هستند. ثابت می‌کنیم

گزاره. ۲.۳ اگر $A, B : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \to T\mathbb{P}(\mathcal{H})$ دو میدان برداری هامیلتونی خطی که به‌توابع $\langle H_A \rangle$ و $\langle H_B \rangle$ روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ باشند، آنگاه

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} = \langle \frac{1}{i\hbar}[H_A, H_B] \rangle \qquad (۲٦.۳)$$

اثبات . چون $A = X_{\langle H_A \rangle}$، بنابراین

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} = \Omega(A, B)$$

و ازطرف دیگر با توجه به تعریف دو فرمی فوبینی—استادی (۳.۱) داریم

$$\Omega_{[\psi]}(A, B) = -2\hbar Im \langle A[\psi], B[\psi] \rangle \qquad (۲۷.۳)$$

با استفاده از (۲۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} \{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} \cdot &= \Omega(A, B) \\ &= \frac{-2\hbar}{\|\psi\|^2} Im \langle \frac{1}{i\hbar} H_A \psi, \frac{1}{i\hbar} H_B \psi \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{i\hbar||\psi||^2}\langle H_A\psi, H_B\psi\rangle \\
&- \langle H_B\psi, H_A\psi\rangle \\
&= \frac{1}{i\hbar||\psi||^2}\langle [H_A, H_B]\psi, \psi\rangle \\
&= \langle \frac{1}{i\hbar}[H_A, H_B]\rangle.
\end{aligned}
$$

■

برای آنکه دینامیک روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را از نزدیک مورد مطالعهٔ قرار دهیم، فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}$ ویژه حالتهای عملگر هامیلتونی H باشند و بردار ψ را با نرم واحد انتخاب می‌کنیم یعنی $\langle\psi,\psi\rangle = 1$، آنگاه

$$H\phi_k = E_k\phi_k \qquad \langle H\rangle = \langle H\psi,\psi\rangle = \sum_k |\lambda_k|^2 E_k. \tag{۲۸.۳}$$

اعداد مختلط λ_k را می‌توان به صورت حاصل‌جمع دو بخش حقیقی و مو هومی نوشت

$$\lambda_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}}. \tag{۲۹.۳}$$

در اینجا q_k, p_k مختصات روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می باشند. بنابراین

$$\langle H\rangle = \sum \frac{1}{2\hbar}E_k(q_k^2 + p_k^2). \tag{۳۰.۳}$$

که شبیه به معادلهٔ هامیلتونی نوسانگر ساده‌است! شرط بهنجارش در این مختصات به صورت زیر است

$$\sum (q_k^2 + p_k^2) = 2\hbar. \tag{۳۱.۳}$$

وقتی معادلهٔ (۲۸.۳) در مختصات q_k, p_k بیان شود خواهیم داشت

$$i\hbar\left(\frac{\dot q_k + i\dot p_k}{\sqrt{2\hbar}}\right) = \sum E_k\left(\frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}}\right) \tag{۳۲.۳}$$

بنابراین

$$\dot q_k = \frac{E_k p_k}{\hbar} \quad , \quad \dot p_k = -\frac{E_k q_k}{\hbar}. \tag{۳۳.۳}$$

با استفاده از (۲۸.۳) بدست می آوریم

$$\dot q_k = \frac{\partial\langle H\rangle}{\partial p_k} \quad , \quad \dot p_k = -\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial q_k}. \tag{۳۴.۳}$$

که همان معادلات هامیلتون در مکانیک کلاسیک است. در رابطه با دو فرمی سیمپلکتیک روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و مختصات $x^a = (q_i, p_i)$ می‌توان معادلات هامیلتونی را به شکل زیر نوشت

$$\frac{dx^a}{dt} = \sum_b \Omega^{ab}\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial x^b}, \tag{۳۵.۳}$$

که Ω^{ab} وارون دو فرمی فوبینی—استادی است. براکت پوآسون در رابطه با توابع روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\{f, g\} = \sum_{ab}\Omega^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial x^b}, \tag{۳۶.۳}$$

و از اینجا تحول زمانی یک تابع دلخواه f به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{df}{dt} = \{f, \langle H\rangle\}. \tag{۳۷.۳}$$

در فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی به صورت فوق تمایز بین تصویر شرودینگر و هایزنبرگ برداشته می‌شود، زیرا در هر دو تصویر مقدار چشم داشتی یک مشاهده پذیر در شکل یکسان (۳۷.۳) داده می‌شود.

نکته. ساختار پوآسونی که در اینجا مطرح گردید، یک ساختار کوانتوم مکانیکی است زیرا جبر پوآسون روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و نه روی فضای فاز کلاسیک M تعریف شده‌است.

مشابهاً می توانیم ساختار دیگری در رابطه با متریک فوبینی—استادی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را مطالعه کنیم. همانطور که گفته شد این متریک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{[\psi]}(A, B) = \frac{2\hbar}{||\psi||^2}Re\Big(\langle\frac{H_A}{i\hbar}\psi, \frac{H_A}{i\hbar}\psi\rangle||\psi||^2\Big) \tag{۳۸.۳}$$

که در اینجا A و B روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و H_A و H_B روی $\mathcal{H}$ عمل می‌کنند و $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$. چون H_A و H_B خودالحاق اند بنابراین

$$
\begin{aligned}
Re\langle\frac{H_A}{i\hbar}\psi, \frac{H_A}{i\hbar}\psi\rangle &= \frac{1}{2\hbar^2}(\langle H_A\psi, H_B\psi\rangle \\
&+ \langle H_B\psi, H_A\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{2\hbar^2}(\langle (H_AH_B + H_BH_A)\psi, \psi\rangle) \\
&= \frac{1}{2\hbar^2}\langle [H_A, H_B]_+\psi, \psi\rangle.
\end{aligned}
$$

به این ترتیب می‌توان متریک رابه صورت زیر نوشت

$$g_{[\psi]}(A,B)=\frac{۱}{\hbar}\frac{\langle[H_A,H_B]_+\psi,\psi\rangle}{||\psi||^۲} \qquad (۳۹.۳)$$

در نتیجه

$$\frac{\hbar}{۲}g_{[\psi]}(A\eta,B\eta)=\frac{۱}{۲}\langle[H_A,H_B]_+\rangle(\psi). \qquad (۴۰.۳)$$

علاوه براین برای پراکندگی یک عملگر داریم

$$(\Delta H_A)^۲=\langle H_A^۲\rangle-\langle H_A\rangle^۲. \qquad (۴۱.۳)$$

بنا براین نتیجه می‌شود

$$(\Delta H_A)^۲=\frac{\hbar}{۲}g(A,A)+\langle H_A\rangle^۲. \qquad (۴۲.۳)$$

تعریف. **۳.۳** فرض می‌کنیم $\langle H_B\rangle,\langle H_A\rangle$ متعلق به $C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}),\mathbb{R})$ باشند. براکت ریمان $\{\langle H_A\rangle,\langle H_B\rangle\}_R$ یک تابع حقیقی هموار روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{\langle H_A\rangle,\langle H_B\rangle\}_R=\frac{\hbar}{۲}g(X_{\langle H_A\rangle},X_{\langle H_B\rangle})=\frac{\hbar}{۲}g(A,B). \qquad (۴۳.۳)$$

متریک ریمانی هیچ مشابهی در مکانیک کلاسیک ندارد، زیرا فضای فاز کلاسیک در حالت کلی دارای یک ساختار ریمانی طبیعی نیست. می‌توان رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ را بر حسب متریک ریمانی به صورتِ زیر بیان نمود [۱۳]

$$\begin{aligned}&(\Delta H_A)^۲(\Delta H_B)^۲\geq\langle\frac{-i}{۲}[H_A,H_B]\rangle^۲\\ +\quad&\langle\frac{۱}{۲}[H_A,H_B]_+\rangle^۲=\Big(\frac{\hbar}{۲}\{\langle H_A\rangle,\langle H_B\rangle\}_\Omega\Big)^۲\\ +\quad&\Big(\{\langle H_A\rangle,\langle H_B\rangle\}_R-\langle H_A\rangle\langle H_B\rangle\Big)^۲.\end{aligned} \qquad (۴۴.۳)$$

ازاینرو

وجود یک ساختار ریمانی کانونیک با مشخصهٔ احتمالی مکانیک کوانتومی متناظر است. از طریق این متریک می‌توان احتمال گذار بین دو حالت را بیان نمود. به این لحاظ می‌توان $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را فضای فاز کوانتومی دارای یک احتمال گذار طبیعی دانست. به این ترتیب می‌توان گفت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نتیجه ای از ساختار هندسی فضای هیلبرت و $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است.

با توجه به مباحث فوق به طور خلاصه می‌توان فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را به صورت زیر بیان نمود:

یک میدان برداری حقیقی A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک میدان برداری هامیلتونی است که از طریق دو فرمی Ω با مقادیر چشم داشتی یک عملگر خودالحاق H_A در فضای $\mathcal{H}$ متناظر است. معادلهٔ شرودینگری که H_A در $\mathcal{H}$ تعریف می‌کند متناظر با معادلهٔ حرکت تعریف شده توسط A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می باشد. مقادیر چشم داشتی عملگرهای هامیلتونی توابعی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می باشند.

حال می‌خواهیم در مورد شار بردارهای هامیلتونی بحث کنیم. فرض می‌کنیم $X_{\langle H_A\rangle}$ یک میدان برداری هامیلتونی روی خمینهٔ سیمپلکتیک $(\mathbb{P}(\mathcal{H}),\Omega)$ با تابع هامیلتونی $\langle H\rangle:\mathbb{P}(\mathcal{H})\to\mathbb{R}$ باشد. شار $X_{\langle H_A\rangle}$ مجموعهٔ نگاشتهای $\varphi_t:\mathbb{P}(\mathcal{H})\to\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(z)=X_{\langle H\rangle}(\varphi_t(z)) \qquad (۴۵.۳)$$

که در اینجا $z\in\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $t\in\mathbb{R}$ است. بنا براین قضیه زیر برقرار است

قضیه. **۴.۳** یک میدان برداری حقیقی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک میدان برداری هامیلتونی است اگر و فقط اگر شار آن یک گروه یک پارامتری دیفرانسیل پذیر از ایزومتری‌های کیلری روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ باشد.[۳]

این قضیه به معنی آن است که وقتی A یک میدان برداری هامیلتونی است آنگاه عملگر $U_A(t)=\exp(-iH_At)$ شار A را تعریف می کند، که در اینجا H_A عملگر هامیلتونی مربوط به $A=X_{\langle H_A\rangle}$ است. برای میدان برداری هامیلتونی A داریم $\mathcal{L}_Ag=0$، که در اینجا g متریک فوبینی—استادی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{L}_A$ مشتق لی در امتداد A است. ازاینرو

تعریف. **۵.۳** فرض می کنیم $f\in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}),\mathbb{R})$ یک تابع هموار حقیقی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و X میدان برداری باتعریف $i_{X_f}\Omega_{FS}=df$ باشد. تابع f کیلری نامیده می‌شود اگر $\mathcal{L}_Ag=0$ باشد. وقتی $f\in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}),\mathbb{C})$ باشد، آنگاه f کیلری است اگر $Re\,f$ و $Im\,f$ کیلری باشند.

به عنوان یک نتیجه از قضیهٔ فوق می‌توان نشان داد

گزاره. ۶.۳ فرض کنید f یک تابع دارای مقدار مختلط روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ باشد؛ آنگاه f کیلری است اگر و فقط اگر یک عملگر کراندار B وجود داشته باشد که $f = \langle B\rangle$.

نتیجه

> می‌توان عملگرهای خودالحاق یعنی مشاهده پذیرهای کوانتومی را از طریق یک ردهٔ منتخب از توابع هموار روی فاز کوانتومی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$، یعنی توابع کیلری، نمایش داد. چون ساختار هندسی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ (متریک و دوفرمی سیمپلکتیک) تحت کنش شارهای هامیلتونی پایسته می ماند، می‌توان گفت که مشاهده پذیرها، مولدهای تقارنهای ساختاری فضای فاز کوانتومی اند.

۳.۳ خمینهٔ حالتهای همدوس

یک دستگاه کوانتومی دارای تقارن سه مؤلفه دارد: یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر $\mathcal{H}$، یک گروه لی G و یک نمایش کاهش ناپذیر از G روی $\mathcal{H}$. حالتهای همدوس تعمیم یافته [ر.ک. [۱۵] و مراجع معرفی شده در آن] عبارتنداز عناصر یک $G-$مدار که از کنش نمایش اعضای گروه روی یک حالت مرجع $\Phi_\circ \in \mathcal{H}$ بدست می آیند. حالتهای همدوسی که به این ترتیب بدست می آیند به انتخاب حالت مرجع بستگی دارند. در مورد گروه‌های نیم‌ساده بردار با بالاترین وزن انتخاب می‌شود. زیر گروه G که عناصر آن حالت مرجع را، با صرف‌نظر از یک ضریب فاز ناوردا می گذارند، زیر گروه پایداری ماکزیمال $\mathcal{K}$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$h.\Phi_\circ = \Phi_\circ e^{i\varphi(h)}, \quad h \in \mathcal{K}. \qquad (۴۶.۳)$$

به این ترتیب $G-$مدار $\Phi_\circ$ یک زیر فضای $\widetilde{\mathcal{H}}$ چگال در $\mathcal{H}$ می سازند به طوری که $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$. از رابطهٔ فوق پیداست خمینهٔ حالتهای همدوس $\mathcal{M} \equiv \mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ ایزومورف با فضای خارج قسمت $G/\mathcal{K}$ است و حالتهای همدوس از طریق نقاط $G/\mathcal{K}$ پارامتریزه می‌شود، یعنی برای $g \in G$ داریم

$$[U_g\Phi_\circ] = [\Phi_g] \in \mathcal{M} \qquad (۴۷.۳)$$

در اینجا $[U_g\Phi_\circ]$ برافکنش نمایش U_g روی فضای $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است. نشان داده شده است[۱۰] که در مورد گروه‌های نیم‌ساده(فشرده یا غیر فشرده) این مدارها زیرخمینهٔ کیلری، یعنی خمینهٔ سیمپلکتیک با ساختار مختلط، هستند. لذا $\mathcal{M}$ در $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ نشانده می‌شود $\iota : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ وازاین طریق دو فرمی Ω_{FS} روی آن القا می‌شود

$$\Omega = \iota^*\Omega_{FS} = \Omega_{FS}|_{\mathcal{M}}$$

گاهی اوقات $\mathcal{M}$ فضای فاز کوانتومی نامیده می‌شود.

همهٔ آنچه درمورد ساحتار هندسی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ گفته‌شد در مورد $\mathcal{M}$ برقرار است، زیرا همانطور که گفته شد $\widetilde{\mathcal{H}}$ در $\mathcal{H}$ چگال و لذا $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ در $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ چگال می باشد.

۴.۳ نشاندن فضای فاز کلاسیک در فضای حالتهای همدوس

حال می خواهیم رابطهٔ بین فضای فاز کلاسیک M و فضای حالتهای همدوس $\mathcal{M}$ را مورد مطالعه قرار دهیم. این موضوع کوانتش حالتهای همدوس است [۱] همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، مدارهای حالتهای همدوس زیر فضای کیلری چگال در $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ هستند که ساختار کیلری روی آنها القا می‌شود. با توجه به اینکه می توان مدار حالتهای همدوس $\mathcal{M}$ را از طریق نقاط فضای فاز کلاسیک پارامتریزه نمود [۱۵] می‌توان از نشاندن فضای فاز کلاسیک در فضای فاز کوانتومی سخن گفت. اگر از یک دستگاه کلاسیک شروع کنیم آنگاه این نشانندگی به کوانتش دستگاه کلاسیک منجر می‌شود. با استفاده از قضیهٔ نشانندگی کودایرا[۷] می‌توان اثبات کرد که یک نگاشت نشانندگی هولومورف برای یک خمینهٔ کیلری M به صورت $\iota_\hbar : M \to \mathcal{M}$ وجود دارد[۱۲]. دو ویژگی مهم این نشانندگی عبارت است از اینکه این نگاشتها یک به یک و همه جا دارای دیفرانسیل غیر صفرند. ازبیانات فوق نتیجه می‌شود که یک نقطه در فضای فاز کلاسیک (M,ω) به یک حالت همدوس در فضای فاز کوانتومی مرتبط میشود و رابطهٔ ساختارهای سیملکتیک آن دو به صورت $\omega = \lim_{\hbar\to\circ} \iota_\hbar^*\Omega_{FS}$ به هم مربوط می‌شود، یعنی $\iota_\hbar$ یک سیمپلکتومورفیزم تقریبی است. اگر حالتهای همدوس از نمایش یک گروه لی G تولید شده باشند (M,Ω_{FS}) نیز یک خمینهٔ سیمپلکتیک همگن است

که گروه حرکت آن گروه لی G می باشد.

۴ جمعبندی نهایی و نتیجه گیری

تا اینجاابزار ریاضی کافی برای فرمولبندی هندسی کوانتش برزین فراهم گردید. حال می‌توان با استفاده از ویژگیهای فضای برافکنشی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{M}$ کوانتش برزین برای فضای فاز کلاسیک کیلری را به صورت زیر فرمولبندی کرد:

حالت‌ها. از طریق نگاشت نشانندگی $\iota_\hbar$ به هر نقطهٔ M یک حالت همدوس، که به صورت یک نقطه در $\mathcal{M}$ نمایش داده می‌شود، منسوب می گردد. که این یک نگاشت یک به یک و دیفرانسیل پذیر است.

سمبلهای هموردا. سمبلهای هموردا عبارتند از توابع کیلری روی $\mathcal{M}$ که در واقع مقدار چشم داشتی میدانهای برداری هامیلتونی هستند که ساختار هندسی فضای فاز کوانتومی را حفظ می‌کنند [تعریف (۵.۳)].

جبر $\hbar*$. می‌توان به سادگی نشان داد که جبر $\hbar*$ بین سمبلهای هموردا همان جبر پوآسون بین توابع کیلری روی $\mathcal{M}$ است. با استفاده از گزارهٔ (۲.۳) داریم

$$\frac{1}{i\hbar}[\widetilde{Q_1, Q_2}] = \{\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}\}_{\iota^*\Omega_{FS}} \qquad (۴۸.۴)$$

ازطرف دیگر از رابطهٔ (۱۷.۲) بدست می آید

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar}[\widetilde{Q_1, Q_2}] &= \frac{1}{i\hbar}(\widetilde{Q_1} *_\hbar \widetilde{Q_2} - \widetilde{Q_2} *_\hbar \widetilde{Q_1}) \\ &= \{\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}\}_{\iota^*\Omega_{FS}} \qquad (۴۹.۴)\end{aligned}$$

لذا ثابت می‌شود

جبر $\hbar*$ و جبر پوآسون روی $\mathcal{M}$ با هم مطابقت دارند.

دینامیک. می‌توان معادلهٔ حرکت $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[Q, H]$ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\widetilde{Q}(Z)}{dt} = \{\widetilde{Q}(Z), \widetilde{H}(Z)\}_{\iota^*\Omega_{FS}}, Z \in \mathcal{M} \qquad (۵۰.۴)$$

که همان شکل معادلهٔ حرکت کلاسیک است. لازم است مجدداً یادآوری شود که این ساختار پوآسون روی فضای فاز کوانتومی تعریف شده است و ویژگیهای کوانتومی سیستم مانند درجات آزادی داخلی، اصل طرد پاؤلی و تقارن‌های دینامیکی حفظ می‌شوند.

حد کلاسیک. با توجه به رابطهٔ نشانندگی فضای فاز کلاسیک در فضای فاز حالتهای همدوس و تشابه جبر مشاهده پذیرهای آنها، می‌توان حد کلاسیک برای یک دستگاه کوانتومی را با استفاده از رابطهٔ (۴.۲) به صورت زیر نوشت

$$\lim_{\hbar\to 0}\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\}_{\iota^*\Omega_{FS}}(Z) = \{\varphi(\widetilde{A}), \varphi(\widetilde{B})\}(z), \quad z \in M, Z \in \mathcal{M} \qquad (۵۱.۴)$$

که دراینجا φ نگاشتی است که در معادلهٔ (۴.۲) تعریف شده است.

مراجع

[1] S T Ali, J P Antoine, J P Gazeau *Coherent States, Wavelets and Their Generalization* Springer-Verlg (2000).

[2] F A Berezin, *Math.USSR-Izv.* **8**(1974)no 5, 1109-1165.

[3] R Cirelli , P Lanyavecchia, *Nuovo Cimento B* **79**(1984) 271-283.

[4] M De Wilde, P B A Lecompte, *Lett. Math.Phys.* **7**(1983), 487-496.

[5] M Englis, *Trans.Amer.Math.Soc.***348**,no 2 (1996) 411-479.

[6] M Englis, *Trans.Amer.Math.Soc.***349**,no 9(1997) 3717-3735.

[7] Ph Griffith, P Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley, New York (1978).

[8] S G Krantz,
Function Theory of Several Complex Variables, Wadsworth & Brooks, pasific Grove, California (1992).

[9] N P Landsman,
Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics, Springer (1998).

[10] W Lisiecki,
Ann.Ins. Henri Poincare **53**(1990)245-258.

[11] J E Marsden,T S Ratiu,
Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer (1994).

[12] A Odzijewicz,
Commun. Math. Phys.,**150**(1992)385-413.

[13] R Roknizadeh,
Geometrisierung der Quantenmechnik durch Berezin-Quantisierung,Phd. Thesis, Papierflieger(1999).

[14] R Roknizadeh, H D Doebner,
Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Okrain (2002) Vol. 43, Part 2, 683-687.

[۱۵] رسول رکنی زاده، *ماشین ریاضی تولید حالتهای همدوس*، آماده برای نشر.