مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۳، شمارهٔ ۳، زمستان ۱۳۸۱

جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس–دیکی با ثابت کیهانشناسی

اسماعیل احمدی آذر

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه امام حسین (ع) و بخش فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۸۰/۸/۲۹ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۶/۹)

چکیده

در این مقاله، جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس– دیکی (B-D) با ثابت کیهانشناسی برای جهانی که معادله حالت آن به صورت $p=m_{\Lambda 0}\rho$ باشد، با فرض $\phi R^{n}=C$ به طـور تحلیلی ارائه شده اند.متریک کیهان، متریک تخت (k=0) روبرتسون– واکر در نظر گرفته شده است. این جوابها که جوابهای غبار نظریه B-D بـا ثـابت کیهانشناسـی، جوابـهای نارپائی$\Lambda=0$، جوابهای خلأ اوهانلن و توپر، جوابهای تورمی ($\Lambda=0$) را در بر می گیرند، غنی هستند و می توانند به حل مشکلاتی در کیهانشناسی کمک نمایند.

واژه‌های کلیدی: ثابت کیهانشناسی، نظریهٔ برانس–دیکی، تورم

۱. مقدمه

آلبرت اینشتین در سال ۱۹۱۶ نظریهٔ نسبیت عـام را فرمولبنـدی کرد. او بعد از تدوین این نظریـه، آنـرا جـهت ارائـه یـک مـدل کیهانشناسی به کار برد و متوجه یـک ناسـازگاری در معـادلات میدان گرانش شد و به یک نتیجهٔ نادرست (جهان خالی از ماده) رسید. در حقیقت اعتقاد رایج در آن زمان مبنی بـر ایسـتا بـودن عالم، باعث شد که اینشتین به این تناقض برسد. او برای از بیـن بردن این تناقض بدون عدول از عقیده بـه ایسـتا بـودن جـهان، مجبور شد در معادلات میدان، ثابتی به نام ثابت کیهانشناسی Λ را وارد نماید و معادلات میدان گرانش را به صورت زیر اصلاح نماید [۱]

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\Lambda g_{\mu\nu}=-8\pi G T_{M\,\mu\nu}, \qquad (1)$$

که در آن، $R_{\mu\nu}$ تانسـور ریچـی، R اسـکالر انحنـاء، $g_{\mu\nu}$ تانسـور متریک فضا–زمان خمیدهٔ ریمانی، و $T_{M\,\mu\nu}$ تانسور انرژی–تکانـهٔ ماده است.

الکساندر فریدمان ریـاضیدان و فـیزیکدان روسـی در سـال ۱۹۲۲ بدون وارد نمودن ثابت کیهانشناسی در معادلات میـدان و فقط با فرض همگنی و همسانگردی فضا، با استفاده از معادلات میدان اینشتین نشان داد که جهان ایستا نیست. او مدلهایی بـرای جهان به دست آورد که مدلـهای فریدمـان نـامیده می‌شـوند. در سال ۱۹۲۹ ادوین هابل کیهانشناس آمریکائی، با بررسی سـرعت دور شدن کهکشانها و فاصلهٔ آنها از زمین نتیجه گرفت که جهان در حال انبساط است که مدلهای فریدمان را تأیید می کرد. بعـد از این کشف، اینشتین ثابت کیهانشناسـی را از معـادلات میـدان حذف کرد و موضوع ثابت کیهانشناسی را منتفی اعلام کـرد. بـا توسعه میدانهای کوانتومی معلوم شد که ثـابت کیهانشناسـی بـا چگالی انرژی خلأ و انرژی نقطه صفر این میدانها ارتباط دارد و حذف آن از معادلات میدان گرانش کـار اشـتباهی بـوده اسـت. بدین ترتیب این ثابت، مجدداً مطرح گردید و اهمیت ویـژه ای دربحثهای کیهانشناسی پیدا کرد. به نظر می‌رسـد اهمیـت آن بـه

جهت نقشی باشد که این ثابت می تواند در حل یکی از مسائل اساسی کیهانشناسی یعنی تعیین سن کیهان ایفا نماید.

ایزاک نیوتون اعتقاد داشت که فضا، مانند زمان، دارای وجودی مستقل از ماده و نحوهٔ توزیع آن است. ارنست ماخ این نظر نیوتون را قبول نداشت و برخلاف نیوتون عقیده داشت که لختی اجسام خاصیت ذاتی آنها نیست، بلکه ناشی از توزیع ماده در عالم می باشد، به گونه ای که توزیع ماده تنها چشمهٔ ساختار فضا–زمان می باشد. این اصل را اصل ماخ می نامند. مطالعات بعدی نشان داد که نظریه نسبیت عام، اصل ماخ را شامل نشده است. تلاشهایی در جهت تعمیم نسبیت عام برای در برگرفتن اصل ماخ صورت گرفت و نظریه هایی در چند دههٔ اخیر تدوین یافت که از میان آنها می توان به نظریه های اسکالر–تانسوری اشاره کرد [۲]. نظریهٔ برانس– دیکی، ساده ترین نظریهٔ اسکالر– تانسوری است که در سال ۱۹٦۱ توسط برانس و دیکی ارائه گردید [۳]. این نظریه با اصل ماخ مطابقت دارد و کمتر به خواص ذاتی فضا متکی است. در این نظریه، علاوه بر میدان تانسوری که هندسه فضا–زمان را مشخص می کند، یک میدان اسکالر ϕ نیز وارد شده است که نقش ثابت گرانش نیوتون (G) را ایفا می‌کند و اصل ماخ از طریق آن احیاء می‌گردد.

۲. معادلات میدان نظریهٔ برانس– دیکی با ثابت کیهانشناسی

معادلات میدان نظریهٔ برانس– دیکی در حضور ثابت کیهانشناسی از وردش کنش

$$A=-\frac{1}{16\pi}\int(\phi R+\omega\phi^{-1}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+2\Lambda\phi-16\pi L_M)\sqrt{g}\,d^4x, \tag{۲}$$

نسبت به متغیرهای دینامیکی $g_{\mu\nu}$ و ϕ به دست می‌آیند. این معادلات عبارت اند از

$$\Box^2\phi=\frac{8\pi}{3+2\omega}T^{\lambda}_{M\lambda}-\frac{2\Lambda\phi}{3+2\omega}, \tag{۳}$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\Lambda g_{\mu\nu}=-\frac{8\pi}{\phi}T_{M\mu\nu}-\frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}-$$
$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{\rho}_{;})-\frac{1}{\phi}(\phi_{;\mu;\nu}-g_{\mu\nu}\Box^2\phi), \tag{٤}$$

که در آنها، ω یک ثابت جفت شدگی بدون دیمانسیون (پارامتر برانس–دیکی) و $\Box^2$ و $T^{\lambda}_{M\lambda}$ به ترتیب عملگر هموردای دالامبری و رد تانسور انرژی–تکانه ماده هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Box^2=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu), \tag{۵}$$

$$T^{\lambda}_{M\lambda}=g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{M}, \tag{٦}$$

که در آن، $g=-\mathrm{Det}\,g_{\mu\nu}$.

رابطه میان توزیع ماده و میدان گرانشی در نظریهٔ برانس– دیکی به سادگی نسبیت عام نیست، بلکه از حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی جفت شده (۳) و (٤) به دست می آید که نسبت به معادلات نسبیت عام (۱) بسیار پیچیده ترند. نظریهٔ برانس– دیکی حالت خاصی از نظریه های اسکالر–تانسوری است که از عمومیت بیشتری برخوردارند. نظریهٔ برانس– دیکی تنها به ازای $\omega\geq 500$ با مشاهدات مطابقت دارد و در حد $\omega\to\infty$ به نظریهٔ نسبیت عام تبدیل می‌شود، اگرچه در این باره اختلاف نظرهایی وجود دارد.

تانسور انرژی–تکانهٔ ماده، $T_{M\mu\nu}$، که در طرف راست معادلات میدان (٤) قرار گرفته است توصیف کنندهٔ انرژی و تکانهٔ الکترومغناطیسی و ماده (به جز انرژی و تکانهٔ گرانش) در یک چارچوب مختصات عام در فضا–زمان است. این تانسور باعث انحناء فضا–زمان اطراف خود می شود و از قانون بقاء

$$T^{\mu\nu}_{M;\mu}=0, \tag{۷}$$

تبعیت می کند. با فرض اینکه چگالی لاگرانژی ماده،، به مشتقات $g_{\mu\nu}$ بستگی نداشته باشد، این تانسور به صورت زیر تعریف می شود

$$T^{\mu\nu}_{M}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}(\sqrt{g}L_M). \tag{۸}$$

۳. جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس– دیکی

بعد از فرمولبندی نظریهٔ برانس– دیکی، فیزیکدانان آن را در کیهانشناسی به کار بردند و جوابهایی برای معادلات میدان در حالتهایی مختلف ارائه دادند. ساده ترین جواب، توسط برانس و دیکی به دست آمد. آنها با فرض همگنی و همسانگردی و تخت بودن جهان، یعنی با متریک تخت روبرتسون–واکر

$$ds^2=-dt^2+R^2(t)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{۹}$$

برای فضا–زمان، برای جهانی که به صورت غبار (p=0) باشد، معادلات میدان (۳) و (٤) را در غیاب ثابت کیهانشناسی حل

کردند و ضریب مقایس کیهانی، $R(t)$، و میدان برانس-دیکی، ϕ، را به صورت زیر بر حسب زمان به دست آوردند

$$R(t) \propto t^{\frac{2(1+\omega)}{4+3\omega}} \quad , \quad \phi(t) \propto t^{\frac{2}{4+3\omega}} . \tag{۱۰}$$

نارپائی [٤]، با همان فرض برانس و دیکی، وقتی که معادلۀ حالت جهان به صورت

$$p = m\rho \quad , \quad 0 \le m \le \frac{1}{3} \quad , \tag{۱۱}$$

باشد، ضریب مقیاس R و میدان اسکالر ϕ را به صورت زیر پیدا کرد

$$R(t) \propto t^{\frac{2+2\omega(1-m)}{4+3\omega(1-m^2)}} \quad , \quad \phi(t) \propto t^{\frac{2(1-3m)}{4+3\omega(1-m^2)}} . \tag{۱۲}$$

واضح است که جوابهای برانس- دیکی (۱۰) حالت خاصی از جوابهای نارپائی (۱۲) هستند که در آن $m=0$ می‌باشد. گرینستین [٥] مدلهایی را که در آنها غلبه با میدان اسکالر ϕ است، مورد بررسی قرار داد و نشان داد که انحناء فضا-زمان و معادلۀ حالت ماده هر چه باشد، برای مقادیر به حد کافی کوچک t، اثرات انحناء فضا-زمان با تغییرات سریع میدان اسکالر ϕ از بین می رود. گیورویچ [٦] جوابهایی برای معادلات برانس-دیکی برای معادله حالت (۱۱) ارائه داد که جوابهای نارپائی حالت خاصی از آنهاست. جوابهای از نوع روبرتسون-واکر معادلات برانس-دیکی بوسیلۀ دهنن و ابریجین [۷] نیز با روش دیگری به دست آمد. باتیستا [۹]، مدلی را که به وسیله برانس و دیکی به دست آمده بود به مدلهای غیر همگن تعمیم داد و چگالی ρ و فشار p را به صورت تابعی از r و t در نظر گرفت و نشان داد که برای جهان غبار، همان جوابهایی برای R و ϕ به دست می آید که قبلاً توسط برانس و دیکی پیدا شده بود. به عبارت دیگر، فرض ناهمگنی توزیع غبار، هیچ تغییری در جوابهای برانس- دیکی ایجاد نمی کند. مک اینتوش [۱۰] نشان داد که با متریک تخت روبرتسون-واکر (۹) و ϕ، p و ρ به صورت تابعی از r و t، جوابهایی برای معادلات برانس-دیکی وجود دارد.

جوابهای خلأ معادلات برانس- دیکی برای متریک روبرتسون-واکر به وسیله اوهانلن و توپر [۱۱]، چاوت [۱۲]، سرورو و استیوز [۱۳]، لورنز-پتزولد [۱٤] به دست آمد. چاوت، جوابهای خلأ معادلات برانس-دیکی را برای جهان تخت به صورت زیر ارائه داد

$$R^3(t) = r(st+\ell)^{\frac{s-u}{s}} , \tag{۱۳}$$

$$r\phi(t) = (st+\ell)^{\frac{u}{s}} , \tag{۱٤}$$

به طوری که

$$s = \frac{u}{2}\left\{-1 \mp \left[3(3+2\omega)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} , \tag{۱٥}$$

که در آنها، u، r، s و ℓ مقادیر ثابت هستند. این جوابها، به وسیله اوهانلن و توپر نیز به دست آمده بود. برمن و سام [۱٥] نشان دادند وقتی که میدان اسکالر ϕ تابعی از r و t باشد، آنگاه بین ضریب مقیاس R و میدان اسکالر ϕ رابطۀ زیر برقرار است

$$\phi(t) = \left\{(\omega+1)\left[Ar^3R(t)+B(t)\right]\right\}^{\frac{1}{\omega+1}} , \tag{۱٦}$$

که در آن، A یک ثابت اختیاری و $B(t)$ یک تابع اختیاری از زمان است. همچنین به ازای $\omega = -\frac{3}{2}$ یک جواب نمایی برای جهان غلبه با تابش $(p = \frac{1}{3}\rho)$ به دست آوردند.

٤. جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی با حضور ثابت کیهانشناسی

معادلات برانس-دیکی با حضور ثابت کیهانشناسی Λ، (۳) و (٤) هنوز به طور کامل حل نشده اند. هدف ما در این بخش به دست آوردن جوابهای دقیق آنها در متریک تخت روبرتسون-واکر (۹) می باشد.

می‌توان نشان داد که مؤلفه های صفر-صفر و یک-یک معادلۀ (٤) در متریک تخت روبرتسون-واکر عبارتند از [۱٦]

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda = \frac{8\pi}{\phi}\rho + \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - 3\frac{\dot{R}}{R}\frac{\dot{\phi}}{\phi} , \tag{۱۷}$$

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \Lambda = \frac{8\pi}{\phi}p + \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} , \tag{۱۸}$$

و از معادلۀ (۳) داریم

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{R}}{R}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{2\Lambda}{3+2\omega} + \frac{8\pi}{\phi}\frac{\rho-3p}{3+2\omega} , \tag{۱۹}$$

که در آنها، نقطه نشان دهندۀ مشتق نسبت به زمان است.

در معادلات (۱۷)-(۱۹) میدان اسکالر برانس- دیکی ϕ به صورت زیر با ثابت گرانش مؤثر G_{eff} ارتباط دارد

$$\phi = \frac{1}{G_{eff}}\frac{4+3\omega}{3+2\omega} , \tag{۲۰}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} G_{eff} = G . \tag{۲۱}$$

در استخراج معادلات دیفرانسیل (۱۷)-(۱۹) جهان را به صورت یک سیال کامل با چگالی ρ و فشار p در نظر گرفتیم که تانسور انرژی-تکانهٔ آن به صورت زیر است

$$T_{M\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+\rho)U_{\mu}U_{\nu} \ , \qquad (۲۲)$$

که در آن، U_{μ} چار- بردار سرعت در چارچوب مختصات هم حرکت است. صورت (۲۲) برای تانسور انرژی-تکانه در مباحث کیهانشناسی وارد شده است، زیرا کیهان در مقیاسهای بزرگ با تقریب خوبی یک سیال کامل است و درنتیجه تانسور انرژی-تکانه برای آن به صورت (۲۲) خواهد بود.

معادله (۱۹) در نظریهٔ برانس- دیکی معادلهٔ مستقلی نیست و می توان آنرا از معالات (۱۷) و (۱۸) به دست آورد. پس برای تعیین توابع نامعلوم $R(t)$، $\phi(t)$، $\rho(t)$ و $p(t)$ فقط دو معادلهٔ مستقل داریم که برای پیدا کردن این مجهولها به دو معادله دیگر نیز نیاز داریم. یکی از این معادلات، می تواند معادله حالت

$$p = m_{\Lambda\circ}\rho \ , \qquad (۲۳)$$

باشد که در آن m_{Λ}. مقدار ثابت و $m_{\Lambda\circ} \in [-1,1]$ می‌باشد. معادلهٔ دیگر را یک معادلهٔ توانی بین ضریب مقیاس کیهانی R و میدان اسکالر برانس-دیکی ϕ به صورت [۷، ۸و۱۷]

$$\phi R^{n} = C \ , \qquad (۲۴)$$

در نظر می گیریم، که در آن n و C مقادیر ثابت ولی هر دو تابعی از پارامترهای $m_{\Lambda\circ}$، ω و Λ و ثابتهای G و $\varepsilon_m = \rho R^{3(m+1)}$ هستند.

معادلات (۱۷)-(۱۹) با استفاده از معادله (۲٤) به صورت زیر درمی آیند

$$\frac{8\pi p}{C}R^{n} = (n-2)\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^{2}}{2R^{2}}\left[2(n-1)-(\omega+2)n^{2}\right] + \Lambda \ , \qquad (۲۵)$$

$$\frac{8\pi R^{n}}{C}(\rho-3p) = (3+2\omega)\left[-n\frac{\ddot{R}}{R} + n(n-2)\frac{\dot{R}^{2}}{R^{2}}\right] - 2\Lambda \ , \qquad (۲٦)$$

$$\frac{8\pi\rho}{C}R^{n} = \frac{\dot{R}^{2}}{2R^{2}}(6-\omega n^{2}-6n) - \Lambda \ . \qquad (۲۷)$$

ترکیب این سه معادله دیفرانسیل بعد از عملیات جبری، منجر به معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر برای $R(t)$ می‌شود

$$2(\omega n+3)\frac{\ddot{R}}{R} + (6+4n\omega-\omega n^{2})\frac{\dot{R}^{2}}{R^{2}} = 2\Lambda \ . \qquad (۲۸)$$

با تغییر متغیر $A = \dot{R}^{2}$ معادله دیفرانسیل (۲۸) به صورت زیر در می آید

$$(\omega n+3)RA' + (6+4n\omega-\omega n^{2})A = 2\Lambda R^{2} \ , \qquad (۲۹)$$

که در آن، پریم نشان دهنده مشتق نسبت به R است. در حالت $\omega n+3\neq 0$ و $6+4n\omega-\omega n^{2}\neq 0$، معادلهٔ دیفرانسیل (۲۹) دارای جواب عمومی به صورت زیر است

$$\dot{R}^{2} = \alpha R^{-\frac{6+4n\omega-\omega n^{2}}{\omega n+3}} + \frac{2\Lambda}{12+6n\omega-\omega n^{2}}R^{2} \ , \qquad (۳۰)$$

که در آن، α یک ثابت انتگرال گیری است. معادله (۳۰) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dR}{dt} = \pm(\alpha R^{-\gamma} + \beta R^{2})^{\frac{1}{2}} \ , \qquad (۳۱)$$

که در آن

$$\beta = \frac{2\Lambda}{12+6n\omega-\omega n^{2}} \quad , \quad \gamma = \frac{6+4n\omega-\omega n^{2}}{\omega n+3} \ ,$$

علامت + (-) به ترتیب مربوط به فازهای انبساطی (انقباضی) عالم می شود. چون علامت + با مشاهدات مربوط به جهان فعلی مطابقت دارد، از این رو، از این به بعد، ما فقط علامت + را به کار می بریم.

می‌توان نشان داد که فرض $\phi R^{n} = C$ با معادله حالت $p = m_{\Lambda\circ}\rho$ به شرطی با یکدیگر سازگاری دارند که بین n و $m_{\Lambda\circ}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$n = \frac{1-3m_{\Lambda\circ}}{\omega(m_{\Lambda\circ}-1)-1} \ , \qquad (۳۲)$$

که در آن

$$m_{\Lambda\circ} = \begin{cases} 0 & \Lambda\neq 0 \\ m & \Lambda = 0 \end{cases} \ , \qquad (۳۳)$$

و m مقدار ثابت و $m\in[-1,1]$ است.

معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱)، با تغییر متغیر $u = R^{\frac{\gamma+2}{2}}$ و $a^{2} = \frac{\alpha}{\beta}$ پس از عملیات جبری منجر به جوابهای دقیق زیر برای $R(t)$، $\phi(t)$ و $\rho(t)$ خواهد شد

$$R(t) = \begin{cases} a^{\eta}\sin^{\eta}(A+Bt) & \Lambda < 0 \\ a^{\eta}\sinh^{\eta}(A+Bt) & \Lambda \geq 0 \end{cases} \ , \qquad (۳٤)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} Ca^{\zeta}\sin^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda < 0 \\ Ca^{\zeta}\sinh^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda \geq 0 \end{cases} \ , \qquad (۳۵)$$

$$\rho(t)=\begin{cases}-\dfrac{\Lambda C}{8\pi}\left[\lambda\cot^2(A+Bt)+1\right]a^{\zeta}\sin^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda<0\\ \dfrac{\Lambda C}{8\pi}\left[\lambda\coth^2(A+Bt)-1\right]a^{\zeta}\sinh^{\zeta}(A+Bt) & \Lambda\geq 0\end{cases},$$
(٣٦)

که در آنها

$$A=\begin{cases}\sin^{-1}\left(\dfrac{R_\circ^{\frac{1}{\eta}}}{a}\right) & \Lambda<0\\ \sinh^{-1}\left(\dfrac{R_\circ^{\frac{1}{\eta}}}{a}\right) & \Lambda\geq 0\end{cases},\qquad (37)$$

$$B=\left[\frac{\left[4+3\omega(1-m_{\Lambda\circ}^2)\right]|\Lambda|}{2(2\omega+3)}\right]^{\frac{1}{2}},\qquad (38)$$

$$a=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\left[\frac{\alpha\left[4+3\omega(1-m_{\Lambda\circ}^2)\right](2\omega+3)}{2|\Lambda|\left[-\omega(m_{\Lambda\circ}-1)+1\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}},\qquad (39)$$

$$\eta=\frac{2\left[1+\omega(1-m_{\Lambda\circ})\right]}{4+3\omega(1-m_{\Lambda\circ}^2)},\qquad (40)$$

$$\xi=\frac{2(1-3m_{\Lambda\circ})}{4+3\omega(1-m_{\Lambda\circ}^2)},\qquad (41)$$

$$\lambda=\frac{6(m_{\Lambda\circ}-1)^2\omega^2+(9m_{\Lambda\circ}^2-30m_{\Lambda\circ}+17)\omega+6(2-3m_{\Lambda\circ})}{\left[4+3\omega(1-m_{\Lambda\circ}^2)\right](2\omega+3)},$$
(٤٢)

و $R_\circ=R(t=0)$ است.

می توان نشان داد که ثابتهای α و C که در جوابهای (٣٤)-(٣٦) ظاهر شده اند، به صورت زیر با ثابتهای شناخته شده G و $\varepsilon_m=\rho R^{3(m+1)}$ ارتباط دارند

$$\lim_{\omega\to\infty}C=\frac{1}{G}\ ,\quad \lim_{\omega\to\infty}\alpha=\frac{8\pi G}{3}\varepsilon_m\ .\qquad (43)$$

در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ، ثابتهای α و C به صورت نسبتاً ساده زیر خواهند بود

$$C=\frac{1}{G}\ ,\quad \alpha=\frac{16\pi G\varepsilon_m}{\Gamma(m,\omega)}\ ,\qquad (44)$$

که در آن

$$\Gamma(m,\omega)=\frac{6(m-1)^2\omega^2+(9m^2-30m+17)\omega+6(2-3m)}{\left[\omega(m-1)-1\right]^2}\ .$$
(٤٥)

جوابهایی که به این ترتیب به دست آوردیم بر حسب پارامترهای $m_{\Lambda\circ}$، ω، $R_\circ$، Λ و ثابتهای α و C می‌باشند. از جمله مزایای این جوابها، آن است که می توان از روی آنها جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی برای غبار ($p=0$) در حضور ثابت کیهانشناسی Λ، جوابهای ناریائی، جوابهای خلأ اوهانلن و توپر، و جوابهای تورمی در غیاب ثابت کیانشناسی Λ را استخراج کرد.

٥. جوابهای خاص

الف) حالت $\Lambda\neq 0$. وقتی که ثابت کیهانشناسی Λ حضور دارد، بنا به معادله های (٣٢) و (٣٣)، $m_{\Lambda\circ}=0$ خواهد شد، در این صورت جوابهای (٣٤)-(٣٦)، جوابهای کیهانشناسی معادلات برانس-دیکی برای غبار با حضور ثابت کیهانشناسی هستند. جوابهای اویهارا و کیم [١٨] حالت خاصی از این جوابها هستند. این جوابها در حد $\omega\to\infty$ با جوابهای کیهانشناسی معادلات اینشتین برای غبار با حضور ثابت کیهانشناسی کاملاً مطابقت دارند.

ب) حالت $\Lambda=0$. در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ، جوابهای (٣٤)-(٣٦) به صورت زیر خواهند بود

$$R(t)=\left[R_\circ^{\frac{4+3\omega(1-m^2)}{2(1+\omega(1-m))}}+L(m,\omega)t\right]^{\frac{2(1+\omega(1-m))}{4+3\omega(1-m^2)}},\qquad (46)$$

$$\phi(t)=\frac{1}{G}R_\circ^{\frac{1-3\omega}{1+\omega(1-m)}}\left[1+L(m,\omega)R_\circ^{-\frac{4+3\omega(1-m^2)}{2(1+\omega(1-m))}}t\right]^{\frac{2(1-3m)}{4+3\omega(1-m^2)}},$$
(٤٧)

$$\rho(t)=\epsilon_m\left[R_\circ^{\frac{4+3\omega(1-m^2)}{2(1+\omega(1-m))}}+L(m,\omega)t\right]^{\frac{6(m^2-1)\omega-6(m+1)}{4+3\omega(1-m^2)}},$$
(٤٨)

که در آنها

$$L(m,\omega)=\left[\frac{4\pi G\varepsilon_m\left[4+3\omega(1-m^2)\right]^2}{6(m-1)^2\omega^2+(9m^2-30m+17)\omega+6(2-3m)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$
(٤٩)

به ازای $R_\circ=0$، جوابهای (٤٦)–(٤٨) به صورت زیر در می آیند

$$R(t) = \left[L(m,\omega)t\right]^{\frac{2(1+\omega(1-m))}{4+3\omega(1-m^2)}} , \qquad (۵۰)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{G}\left[L(m,\omega)t\right]^{\frac{2(1-3m)}{4+3\omega(1-m^2)}} , \qquad (۵۱)$$

$$\rho(t) = \varepsilon_m\left[L(m,\omega)t\right]^{\frac{6(m^2-1)\omega-6(m+1)}{4+3\omega(1-m^2)}} . \qquad (۵۲)$$

این جوابها خودشان، به عنوان حالات خاص، غبار ($m=0$)، تابش ($m=\frac{1}{3}$) و خلأ کاذب ($m=-1$) را در بر می گیرند. به ازای $m\in[0,\frac{1}{3}]$ جوابهای ناریائی (۱۲) به دست می‌آیند. علاوه بر اینها، به ازای

$$m = -\frac{(2\omega+3)\pm(\omega+1)\sqrt{3(3+2\omega)}}{\pm\,\omega\sqrt{3(3+2\omega)}}, \qquad (۵۳)$$

جوابهای خلأ اوهانلن و توپر به دست می آید

$$R(t) \propto t^{\frac{\omega+1\pm\sqrt{1+\frac{2\omega}{3}}}{3\omega+4}} , \qquad (٥٤)$$

$$\phi(t) \propto t^{\frac{1\mp\sqrt{3[3+2\omega]}}{3\omega+4}} . \qquad (۵۵)$$

این جوابها با جوابهای (۱۳) و (١٤) در حالتی که مقدار ثابت ℓ صفر باشد کاملاً مطابقت دارند.

همچنین به ازای $m=-1$، جوابها تورمی خواهند بود، به طوری که در حد $\omega\to\infty$ برای زمانهای کوچک ($\Theta t<<1$)، R و ϕ به صورت زیر تبدیل خواهند گردید

$$\lim_{\omega\to\infty} R(t) = R_\circ \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_f}\, t\right) , \qquad (٥٦)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \phi(t) = \frac{1}{G} , \qquad (۵۷)$$

که در آن

$$\Theta^2 = \frac{32\pi G\rho_f R_\circ^{-\frac{2}{\omega+\frac{1}{2}}}}{(5+6\omega)(3+2\omega)} . \qquad (۵۸)$$

در این حالت ضریب مقیاس به صورت نمایی با زمان تغییر می‌کند و میدان برانس–دیکی ϕ مقدار ثابت $\frac{1}{G}$ است که با نتایج نسبیت عام در غیاب کیهانشناسی Λ در حالتی که معادله حالت جهان به صورت $p=-\rho_f$ باشد، کاملاً مطابقت دارد.

در حالتی که ($\Theta t>>1$) باشد، R و ϕ به صورت زیر با زمان تغییر می کنند.

$$R(t) = R_\circ(\Theta t)^{\omega+\frac{1}{2}} , \qquad (۵۹)$$

$$\phi(t) = \phi_\circ(\Theta t)^2 , \qquad (٦٠)$$

که در آن، $\phi_\circ = \frac{1}{G}R_\circ^{\frac{2}{\omega+\frac{1}{2}}}$ است. در این حالت ضریب مقیاس بر خلاف حالت قبلی به صورت یک تابع توانی با زمان تغییر می کند و میدان برانس–دیکی ϕ هم ثابت نیست بلکه به صورت توان دوم با زمان تغییر می‌کند.

٦. نتیجه گیری

الف) با توجه به جوابهای (٣٤)–(٣٦) در می یابیم که به ازای $\Lambda<0$، گسترش جهان خیلی شبیه به گسترش جهان در حالت جهان بسته $k=+1$ و $\Lambda=0$ در مدلهای فریدمان می باشد. یعنی اگر $R_\circ = 0$ باشد، به ازای $\Lambda<0$، جهان از یک تکینگی در گذشته شروع به انبساط کرده، ولی ثابت کیهانشناسی منفی به صورت یک نیروی جاذبه در جهان عمل می کند و باعث کند شدن انبساط می شود. زمانی فرا خواهد رسید که این نیروی جاذبه سبب توقف انبساط جهان خواهد شد. در این زمان، یعنی

$$t_m = \frac{\pi\left[2(2\omega+3)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left[\left(-4+3\omega(m_{\Lambda\circ}^2-1)\right)|\Lambda|\right]^{\frac{1}{2}}} , \quad 3\omega(m_{\Lambda\circ}^2-1)\neq 4 ,$$

جهان از نظر وسعت در نقطه ماکزیمم خود قرار خواهد داشت. از این زمان به بعد، نیروی جاذبه بر انبساط کیهانی غالب می‌شود و جهان را منقبض خواهد کرد تا سرانجام کیهان در $t=2t_m$ به روی خودش بسته خواهد شد و حجم آن به صفر خواهد رسید.

در حالت $\Lambda>0$، ثابت کیهانشناسی به صورت یک نیروی دافعه عمل می‌کند و باعث می‌شود که جهان تا ابد انبساط پیدا بکند.

ب) برای تابش در غیاب ثابت کیهانشناسی نظریه های برانس–دیکی و نسبیت عام یکسان می باشند

$$R(t) = \left(\frac{32\pi G\varepsilon_{\frac{1}{3}}}{3}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\phi = \frac{1}{G} ,$$

$$\rho(t) = \frac{۳}{۳۲\pi G t^{۲}} .$$

ج) در حالت $m=-۱$ که جهان در یک حالت غیر عادی با فشار منفی و معادله حالت $p=-\rho_f$ (ρ_f مقدار ثابت) قرار داشته، در غیاب ثابت کیهانشناسی Λ، جواب تورمی است.

د) ما در این تحقیق، معادلات برانس-دیکی را برای جهانی که معادله حالت آن به صورت $p = m_{\Lambda\circ}\rho$ باشد، با وارد کردن فرض $\phi R^n = C$ و پیدا کردن یک رابطه بین n و $m_{\Lambda\circ}$، به دست آوردیم. این جوابها، اگر چه جوابهای غبار ($m=۰$)، تابش ($m=\frac{۱}{۳}$)، و خلأ کاذب ($m=-۱$) را شامل می شود، غنی هستند و می توانند به حل مشکلاتی در کیهانشناسی کمک نمایند ولی کاملا″ کلی نیستند. برای مثال، برای یک سیال کامل با معادله حالت $p=\alpha\rho T$ ممکن است این جوابها صادق نباشد.

جالب توجه است که در سالهای اخیر، مشاهده ابرنواختران بسیار دور نشان می دهد که ثابت کیهانشناسی بایستی غیر صفر باشد، از اینرو جواب غبار با ثابت کیهانشناسی در بین جوابهای به دست آمده اهمیت ویژه ای پیدا می کند [۱۹].

قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از استاد ارجمند و محترم جناب آقای دکتر نعمت‌اله ریاضی که متن اولیه مقاله را مطالعه و با نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود اینجانب را راهنمایی نموده، تشکر و قدردانی بنمایم. همچنین از همکار ارجمند جناب آقای حبیب‌اله قلار که در تایپ این مقاله بنده را یاری نمودند، تشکر می‌کنم.

مراجع

1. S Weinberg, *Rev. Mod. Phys*. **61**(No. 1)(1989) 1.
2. T Singh, T Singh, *Int. J. Mod. Phys.* **2** (No.3) (1987) 645.
3. C H Brans R H Dicke*, phys. Rev*. **124** (1961) 925.
4. H Nariai, *Prog. Theor. Phys*. **40** (1968) 2314.
5. G B Greenstein*, Astrophys. Space Sci*. **2** (1968) 155.
6. L E Gurevich, A M Finkelstein, V A Ruban, *Astrophys. Space Sci*. **22** (1973) 333.
7. H Dehnen, O Obrego n, *Astrophys. Space Sci*. **14** (1971) 454.
8. H Dehnen, O Obrego n, *Astrophys. Space Sci*. **15** (1972) 326.
9. A B Batista, *Phys. Rev. D***21** (1980) 2119.
10. C B G McIntosh, *Phys. Lett. A***43** (1973) 33.
11. J O Hanlon, B O J Tupper*, Nuovo Cimento*, **7B** (No. 2) (1972) 305.
12. P Chauvet, *Astrophys. Space Sci*. **90** (1983) 51.
13. J M Cervero, P G Estevez, *Gen. Rel. Grav*. **15** (1983) 351.
14. D Lorentz-Petzold, *Astrophys. Space Sci*. **96** (1983) 451.
15. M S Berman, M M Som, *Int. J. Theor. Phys*. **31** (No. 2) (1992) 325.
16. E Ahmadi-Azar, N Riazi, *Astrophys. Space Sci*. **226** (1995) 1.
17. L O Pimentel, *Astrophys. Space Sci.* **112** (1985) 175.
18. K Uehara, C W Kim, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 2575.
19. T Padmanabhan, gr-qc/0204020v1 (2002).