مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۳، شمارهٔ ٤، تابستان ۱۳۸۲

الکترواستاتیک در فضازمانهای کرمچاله‌ای

بهرام نصر اصفهانی
گروه فیزیک دانشگاه کاشان
e-mail: nasr@kashanu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۰/۹/۲۱ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۱/۲٦)

چکیده
با در نظر گرفتن حالت ایستای معادلات ماکسول دریک هندسهٔ پس زمینهٔ کرمچاله‌ای، شکل تعمیم یافتهٔ معادلهٔ لاپلاس برای پتانسیل الکترواستاتیکی به دست آمــده است. بـه دلیل هندسهٔ خاص گلوگاه، خطوط میدان از یک سو همگرا و از سوی دیگر واگرا می شوند. از این رو، برای ناظر دور، کرمچاله به مانند یک توزیع بار رفتار می کند و انتظار داریــم که این رفتار پتانسیل را به طرز محسوسی در اطراف گلوگاه اصلاح کند. با یافتن پاسخهای دقیق پتانسیل در حالتهای در نظر گرفته شده و همچنین با در نظر گرفتن یک محیـط دی‌الکتریک هم ارز و محاسبهٔ بار های قطبیده، این موضوع تحقیق شده است.

واژه‌های کلیدی: کرمچاله‌های گذرپذیر، معادلات ماکسول، شرایط مرزی، محیط دی‌الکتریک

۱. مقدمه

کرمچاله ها فضازمانهایی هستند با توپولوژی غیر بدیهی کــه می توانند دو ناحیه از یک فضازمان را بــه هــم وصـل کننـد یـا پلهایی باشند بین فضازمانهای متفاوت. تقریبا یـک سـال بعـد از ارائهٔ فرمولبندی نهایی نظریهٔ نسبیت عام توسط آلبرت اینشـتین، لودویگ فلام با مطالعهٔ جواب شوارتسشیلد معادلات اینشتین که به تازگی ارائه شده بود اندیشهٔ وجود جواب کرمچاله ای را بنـا نهاد [۱]. این بدان معنی است که کرمچاله ها پیش از سـیاهچاله ها معرفی شده اند. مفهوم کرمچاله ها بعداً توسط هرمان ویل در دههٔ ۱۹۲۰، اینشتین و ناتان روزن در دههٔ ۱۹۳۰ و جان ویلـر در دههٔ ۱۹۵۰ مورد بررسی قرار گرفت و توسعه یافت [۲]. اما ایـن موضوع علاقهٔ زیادی را جلـب نکـرد تـا اینکـه در سـال ۱۹۸۸ موریس و تورن در مقاله ای دستهٔ جدیدی از کرمچاله هـا را بـا عنوان کرمچاله های گذر پذیر معرفی کردند. ویـژگی مـهم ایـن کرمچاله ها (در مقایسه با سیاهچاله ها) نداشتن افـق اسـت کـه عبور دو طرفهٔ نور و ذرات مادی را از آنها امکان پذیر می سـازد [۳]. کار موریس و تورن سرآغاز تحقیقات دامنه داری در مـورد جنبه های مختلف کرمچاله ها شد که شاید جالبترین آنها امکـان ساختن ماشین زمان باشد. چنانچه قوانین فیزیک اجازه دهنـد و تمدن پیشرفته ای بتواند کرمچاله ای گذر پذیر را در فضا بـر پـا کند، آنگاه می توان آن را به یـک ماشـین زمـان بـرای سـفر بـه گذشته تبدیل کرد [۲]. مرور کوتاهی بـر برخـی از دیـگر جنبـه های کرمچاله ها را می توان در مرجع شمارهٔ [۵] دید.

در حال حاضر تعدادی از جوابهای کرمچاله ای ایسـتا و یـا در حال تحول در چارچوب نظریهٔ نسـبیت عـام و همیـن طـور نظریهٔ برانس دیکی پیدا شده اند [٦-۱۰].

یکـی از مسـایل بحـث بـر انگیـز در مـورد کرمچالـه هـای گذرپذیر، مسئلهٔ نقض شرایط انرژی توسط مـاده ای اسـت کـه

آنها را ایجاد کرده است [۳]. برای مادهٔ نقض کنندهٔ شرایط انرژی تنش از چگالی جرم-انرژی بزرگتر است و بنابراین می‌توان اثبات کرد که ناظر هایی وجود دارند که چگالی جرم-انرژی را منفی اندازه می گیرند [۵و۹]. از این رو این یک مادهٔ نامتعارف است. میدانهای کوانتومی می توانند شرایط انرژی را نقض کنند و بنا بر این به وجود آمدن کرمچاله ها در لحظه های آغازین جهان ممکن بوده است. مسئلهٔ نقض شرایط انرژی، برای کرمچاله های گذرپذیر ایستا و همین طور وابسته به زمان به طور مفصل بررسی شده است [۱۱]. بررسیها نشان می دهند که فقط برای کرمچاله های ایستا ماده به طور کلی نقض کنندهٔ شرایط انرژی است. در حالی که برای کرمچاله های در حال تحول (اما غیر تورمی) ماده می تواند به طور کلی یا در بازه های زمانی معینی شرایط انرژی را بر آورده سازد [۱۲]. این مطلب احتمال وجود کرمچاله ها را در دوره های بعدی جهان افزایش می دهد.

نمونه های زیادی از دستگاه هایی که به دلیل اثر های کوانتومی شرایط انرژی را نقض می کنند معرفی شده اند [۱۳]. اما، هنوز مسئلهٔ وجود مادهٔ نا متعارف به طور کلی حل نشده است. با این حال، برخی از افراد نوعی نگرش به موضوع را مطرح کرده اند که در آن فرض می شود کرمچاله ها وجود دارند و سپس پیامدهای آنها مورد توجه قرار می گیرند. از سال ۱۹۹۰ تاکنون مطالعات زیادی از این نوع انجام گرفته است که شاید مهمترین آنها از نظر مشاهده‌ای، مسئلهٔ انتشار انواع مختلف آشفتگیها در این گونه هندسه ها باشد. مطالعهٔ بازتاب و عبور امواج نرده‌ای بی جرم و نیز انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک هندسهٔ کرمچاله ای ایستا نمونه های مشخص این مطالعات هستند [١٤و١٥].

در این مقاله ابتدا شکل تعمیم یافتهٔ معادلهٔ لاپلاس برای پتانسیل الکتروستاتیکی را در یک هندسهٔ کرمچاله ای بدست می آوریم و سپس با یافتن پاسخهایی دقیق و اعمال شرایط مرزی مناسب، تاثیر این هندسه را بر پتانسیل حاصل از توزیعهای بار واقع در خارج کرمچاله مورد بررسی قرار می‌دهیم. به دلیل هندسهٔ خاص گلوگاه کرمچاله انتظار داریم که پتانسیل بیشتر در این ناحیه اصلاح گردد. فرض بر این است که میدان حاصل از این توزیعهای بار در تانسور تنش-انرژی کرمچاله بی تاثیر است. شرایطی که در آنها این تقریب برقرار است را تعیین خواهیم کرد. این بحثی است آموزنده که به طور بنیادی نقش یک هندسهٔ پس زمینهٔ کرمچاله ای را بر پدیده های الکترومغناطیسی نشان می دهد.

۲. معادلات ماکسول در یک میدان گرانشی

در یک میدان گرانشی و در غیاب چشمه های بار و جریان، معادلات ماکسول را می توان چنین نوشت

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \qquad , \qquad F^{*\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{۱}$$

که در آن $F_{\mu\nu}$ مؤلفه های تانسور الکترومغناطیس است و $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. اکنون در یک دستگاه مختصات دکارتی مشخص با متریک $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ تعریف می کنیم $H^{\mu\nu} = \sqrt{-g}F^{\mu\nu}$. به سادگی می توان دید که بر حسب این تانسورجدید، معادلات ماکسول (۱) به شکل زیر در می‌آیند [۱۲]

$$H^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad , \qquad H^{*\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{۲}$$

توجه کنید که این معادلات به معادلات ماکسول در یک فضای تخت شباهت دارند. هندسهٔ پس زمینه حذف نشده است، بلکه در روابط سازگاری $H^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ نهفته است. دستگاه مختصات مورد نظر را چنان بر می گزینیم که در آن بتوان مؤلفه های تانسور های پاد متقارن **F** و **H** را به شکل زیر بر حسب مؤلفه های بردار های **E**، **D**، **B** و **H** نوشت

$$F^{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$H^{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{۳}$$

با این انتخاب، معادلات ماکسول (۲) در حالت ایستا می‌شوند

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\ &\nabla\times\mathbf{E} = 0 \\ &\nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \\ &\nabla\times\mathbf{H} = 0 \end{aligned} \tag{٤}$$

همراه با روابط سازگاری

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k - (\mathbf{G}\times\mathbf{H})_i \, , \tag{۵}$$

و

$$B_i = \mu_{ik} H_k + (\mathbf{G}\times\mathbf{E})_i \,, \tag{٦}$$

که در اینجا

$$\varepsilon_{ik} = \mu_{ik} = -\sqrt{-g}\,\frac{g^{ik}}{g_{00}} \,, \tag{٧}$$

و

$$G_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} \,. \tag{٨}$$

اکنون می‌بینیم که معادلات ماکسول در یک میـدان گرانشـی به طور صوری با معادلات ماکسول در یک فضازمـان تخـت در حضور یک *محیط* هم ارزند. خواص این محیط توسط ضرایـب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی داده شده در رابطـهٔ (٧) توصیف می شود. در اینجا بحث خود را به فضازمانــهای ایسـتا محدود می کنیم. به علاوه، دستگاه مختصات دکارتی را چنان بر می گزینیم کـه مـتریک g در آن قطـری باشـد. در ایـن شـرایط روشـن اسـت کـه $\mathbf{G}=0$ و ضرایـب گذردهـــی الکـتریکی و مغناطیسی قطری خواهند بود به طوری که می توان نوشت

$$\varepsilon_{ik} = \mu_{ik} = \varepsilon\,\delta_{ik} \,. \tag{٩}$$

همچنین روابط سازگاری (٥) و (٦) به ترتیب به شکلهای سادهٔ

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} \tag{١٠}$$

و

$$\mathbf{B} = \varepsilon\,\mathbf{H} \tag{١١}$$

در می آیند.

۳. معادلات الکترواستاتیک در یک هندسهٔ کرمچاله‌ای

به عنوان هندسهٔ پس زمینه، متریک زیر را بر می گزینیم

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{B(r)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{١٢}$$

که در واقـع عبـارت اسـت از شـکل کلـی مـتریک بـرای یـک کرمچالهٔ گذر پذیر ایستا در یک مختصات کـروی (r,θ,ϕ) [١]. در اینجا $\Phi(r)$ تابع جابه جایی به سرخ و $B(r)$ تـابع شـکل نامیده می شود. تابع شکل، شکل فضـایی کرمچالـه را مشـخص می کند و باید شـــرط $B(r) \le r$ را بـــرآورده سـازد تـا هندسـهٔ کرمچالـه ای ممکـن باشـد. معادلـهٔ $B(r) = r$ مکـــان گلـــوگاه کرمچاله را مشخص می کند که در واقع کـران پـایین مختصـهٔ r است. در اینجا کرمچاله هایی را در نظر می گیریم کـه بـه طـور مجانبی تخت هستند. در این صورت باید شرط $\lim_{r\to\infty}\frac{B(r)}{r}=0$ برقرار باشد. در هر متریک متقارن کروی و ایستا مـــانند مـتریک (١٢)، رویه هایی که در آنها ، $g_{00} = -e^{2\Phi} \to 0$، افـق نـامیده می‌شوند. کرمچاله های گذر پذیر نباید افقی داشته باشند چرا که وجود افق مانع عبور دو طرفه از آنها می شـــود. از ایـن رو لازم است که تابع $\Phi(r)$ همه جا محدود باشد. در ادامه برای سادگی قرار می دهیم $\Phi(r)=0$.

مطابق با مطالب بخش قبل لازم است که متریک (١١) را در دسـتگاه مختصـات دکـارتی بنویسـیم. بـه ایـن منظـور تبدیـــل $r = f(\rho)$ را اعمـال مـی کنیـم. پـس از جـــایگذاری و انجـــام محاسبات لازم، نتیجه می شود که اگر تابع $f(\rho)$ معادلهٔ

$$\rho\frac{df}{d\rho} = \sqrt{f^2 - f\,B(f)} \,, \tag{١٣}$$

را برآورده سازد آنگاه متریک (١٢) به شکل زیر در می آید

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(\rho)\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right], \tag{١٤}$$

که درآن $A(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho}$. سپس با استفاده از تعریفهای معمول

$$x = \rho\cos\phi\sin\theta \;\;, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta \;\;, \quad z = \rho\cos\theta$$

در متریک (١٤)، به دست می آوریم

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(\rho)\left(\delta_{ij}dx^i dx^j\right), \tag{١٥}$$

که عبارت است از نمایش متریک کرمچاله ای (١٢) در دســتگاه مختصات دکارتی.

اکنـون مـتریک (١٥) را در رابطـهٔ (٧) بـه کـار مـی بریـم و ضریب گذردهی الکتریکی ε را محاسبه می کنیم

$$\varepsilon(\rho) = A(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho} \,. \tag{١٦}$$

با توجه به رفتار مجانبی متریک کرمچاله ای به سادگی می تـوان دید که $\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)=1$.

از سوی دیگر، از قـانون گاوس $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$ همـراه بـا رابطـهٔ سازگاری (١٠) و تعریف پتانسـیل الکـتریکی $\mathbf{E}=-\nabla\psi$ نتیجـه می گیریم

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{\varepsilon(\rho)}\frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = 0 \,, \tag{١٧}$$

که می توانیم آن را تعمیـم معادلـهٔ لاپـلاس در میـدان گرانشـی بنامیم. با توجه به اینکه معادلهٔ (١٧) در دستگاه مختصات کروی (ρ,θ,ϕ) جدا می شود، جواب کلی آن را چنین می نویسیم

$$\psi(\rho,\theta,\phi) = \sum_l\sum_m a_{lm}R_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi) \,, \tag{١٨}$$

که در آن $R_l(\rho)$ یک تابع نا معلوم و a_{lm} ضریب بسط است. با جایگذاری ایـن جـواب در معادلـهٔ (۱۷)، معادلـهٔ زیـر بـرای $R_l(\rho)$ حاصل می شود

$$R_l'' + \left(\frac{2}{\rho}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)R_l' - \frac{l(l+1)}{\rho^2}R_l = 0 \qquad (19)$$

این معادله ای است که رفتار شـعاعی پتانسـیل را توصیـف مـی کند.

در حالت سادهٔ $l=0$ ، بـه راحتـی مـی توانیـم انتـگرال اول معادلهٔ (۱۹) را به شکل زیر حساب کنیم

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{a_{00}R_0}{\sqrt{4\pi}}\right) = \frac{Q}{\varepsilon(\rho)\rho^2} , \qquad (20)$$

کـه در آن بـرای اسـتفاده هـای بعـدی ضریـب $\frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}}$ را وارد کرده‌ایم و Q یک ثابت انتـگرال گیـری اسـت کـه آن را مثبـت می‌گیریم. این عبارت یـادآور میـدان الکـتریکی خـارج از یـک توزیع بار متقارن کروی واقع در یک محیـط اسـت. بنـا برایـن، می‌توان نتیجه گرفت که برای یـک نـاظر دور دسـت فضازمـان کرمچاله ای مانند یک جسم باردار رفتار می کند. البته این نتیجه برای هر فضازمان همسانگرد مانند (۱۲) درسـت اسـت. امـا در مورد فضازمان کرمچاله ای چون $\rho \neq 0$، میـدان فـاقد تکینـگی است.

در حالت کلی می توان معادلهٔ (۱۹) را بـه دومعادلـهٔ مرتبـه اول زیر تبدیل کرد

$$R_l'(\rho) = \frac{T_l(\rho)}{\rho^2\varepsilon(\rho)} \quad , \quad T_l'(\rho) = l(l+1)\varepsilon(\rho)R_l(\rho) \qquad (21)$$

که برای حل کردن آنها لازم است عبارت صریحی بـرای $\varepsilon(\rho)$ داشته باشیم. به عبارت دیگر باید هندسـهٔ پـس زمینـه بـه طـور کـامل معلـوم باشـد. در ادامـه، دو هندسـهٔ ویـژه کـه در واقـع ساده‌ترین کرمچاله های گذرپذیر هستند را در نظر می‌گیریم.

٤. ۱. کرمچاله‌ای با تابع شکل ثابت

به عنـوان سـاده تریـن انتخـاب، تـابع شـکل را در مـتریک کرمچاله ای (۱۲) ثابت می گیریم $B(r) = B_0$. بـا ایـن تـابع شکل، جواب معادلهٔ(۱۳) عبارت است از

$$\frac{f(\rho)}{\rho} = \varepsilon(\rho) = \frac{(\rho+\rho_0)^2}{\rho^2} , \qquad (22)$$

که در آن $\rho_0 = \frac{B_0}{4}$.

اکنـون از معادلـهٔ بـالا $\varepsilon(\rho)$ را در دسـتگاه معـادلات (۲۱) جایگذاری می کنیم. پس از حل به دست می آوریم

$$R_l(\rho) = \frac{A_l\,\rho^{l+1} + C_l\,\rho^{-l}}{\rho+\rho_0} , \qquad (23)$$

که در آن A_l و C_l ثابتهایی هستند که با شرایط مـرزی تعییـن می‌شوند. در اینجا ما یـک مسئلهٔ داخلـی را بـا شـرایط مـرزی $\psi(\rho_0,\theta,\phi) = 0$ و $\psi(S,\theta,\phi) = V(\theta,\phi)$ در نظر می‌گیریم کـه در آن S یک مرز دلخواه در اطـراف کرمچالـه اسـت. بـر ایـن اساس جواب کلی پتانسیل را می توان چنین نوشت.

$$\psi(\rho,\theta,\phi) = \sum_l \sum_m a_{lm}\left[1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2l+1}\right]\left(\frac{\rho^{l+1}}{\rho+\rho_0}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (24)$$

همراه با

$$a_{lm} = \left(\frac{S+\rho_0}{S^{l+1}}\right)\left[1-\left(\frac{\rho_0}{S}\right)^{2l+1}\right]^{-1}\int Y^*_{lm}(\theta,\phi)V(\theta,\phi)d\Omega \qquad (25)$$

همان طور که انتظار داریـم در حـالت $\rho_0 = 0$ یعنـی در غیـاب کرمچاله، جواب بالا بـه جـواب در فضـای تخـت [۱۳] تبدیـل می‌گردد. گرچه در جواب کلی (۲٤) توانهای منفی وجود دارنـد اما این جواب تکین نیست، چون همواره $\rho \geq \rho_0 > 0$. به عنوان ساده‌ترین انتخاب قرار می‌دهیم $V(\theta,\phi) = V_0$، آنگاه فقط a_{00} غیر صفر است و یک جواب متقارن کروی به شکل زیرداریم

$$\psi(s) = V_0\left(\frac{S+\rho_0}{S-\rho_0}\right)\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho+\rho_0}\right) . \qquad (26)$$

٤. ۲. کرمچاله‌ای با $B(r) = \frac{B_0^2}{r}$

بـه عنـوان انتخـابی دیـگر تـابع شـکل را در مـتریک (۱۲) می‌گیریم $B(r) = \frac{B_0^2}{r}$ که در آن B_0 ثابت است. آنگاه این تابع شکل را در معادلهٔ (۱۳) قرار می‌دهیم و از آن انتگرال می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\rho^2+\rho_0^2}{\rho^2} , \qquad (27)$$

که در آن $\rho_0 = \frac{B_0}{2}$. بنا بر این دستگاه معادلات (۲۱) می‌شود

$$R_l'(\rho)=\frac{T_l(\rho)}{(\rho^2+\rho_0^2)}\quad,\quad T_l'(\rho)=l(l+1)\left(\frac{\rho^2+\rho_0^2}{\rho^2}\right)R_l(\rho) \qquad (۲۸)$$

بررسی نشان می دهد که این دستگاه را تنها پس از انتخاب l می‌توان به طور دقیق حل کرد. برای مثال تعدادی از جوابهای به دست آمده چنین‌اند

$$R_0(\rho)=a_0+b_0\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$R_1(\rho)=\left(\rho-\frac{\rho_0^2}{\rho}\right)\left(a_1+b_1\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)+b_1\rho_0$$

$$R_2(\rho)=\frac{1}{6}\left\{\left[3\left(\rho-\frac{\rho_0^2}{\rho}\right)^2+4\rho_0^2\right]\left[a_2+3b_2\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]+9b_2\rho_0\left(\rho-\frac{\rho_0^2}{\rho}\right)\right\}.$$

روشن است که با افزایش l جوابها به مراتب پیچیده‌تر می‌شوند.

در این مورد نیز مانند زیر بخش قبل، یک مسئلهٔ داخلی را با شرایط مرزی $\psi(\rho_0,\theta,\phi)=0$ و $\psi(S,\theta,\phi)=V(\theta,\phi)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم $a_{lm}=R_l(S)^{-1}\int Y_{lm}^*(\theta,\phi)V(\theta,\phi)d\Omega$ همراه با شرط $R_l(\rho_0)=0$. به عنوان مثال، در حالت $V(\theta,\phi)=V_0$ جواب متقارن کروی زیر را به دست می‌آوریم

$$\psi(\rho)=V_0\,\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)-\frac{\pi}{4}}{\tan^{-1}\left(\frac{S}{\rho_0}\right)-\frac{\pi}{4}}\,. \qquad (۲۹)$$

٤. ۳. چگالی انرژی الکتریکی

در آغاز فرض کردیم که میدان حاصل از توزیع بار خارجی در تانسور تنش-انرژی کرمچاله بی تاثیر است. در اینجا می‌خواهیم با محاسبهٔ چگالی انرژی الکتریکی و مقایسه با چگالی جرم-انرژی مادهٔ پس زمینه، شرایط لازم برای این فرض را تعیین کنیم. این چگالیها را فقط در گلوگاه محاسبه می‌کنیم. در این صورت برای چگالی انرژی الکتریکی می نویسیم

$$u_E=\left(\frac{1}{8\pi}\varepsilon(\rho)\,\mathbf{E}^2\right)_{\rho=\rho_0}\,, \qquad (۳۰)$$

و در ادامه برای سادگی تنها میدان الکتریکی با تقارن کروی را در نظر می گیریم. از سوی دیگر، با توجه به معادلات اینشتین، چگالی جرم-انرژی مادهٔ پس زمینه برای متریک کرمچاله ای (۱۲) را در گلوگاه می توان چنین نوشت [۳]

$$u_M=\left(\frac{1}{8\pi G}\frac{1}{r^2}\frac{dB(r)}{dr}\right)_{r=B(r)}\,, \qquad (۳۱)$$

که در آن r طبق (۱۳) به ρ مربوط می شود.

در مورد کرمچالهٔ با تابع شکل ثابت، با استفاده از رابطهٔ (۲٦) چگالی انرژی الکتریکی (۳۰) به صورت زیر می‌شود

$$u_E=\frac{2}{\pi}\left(\frac{4S+B_0}{4S-B_0}\right)\frac{V_0^2}{B_0^2}\,, \qquad (۳۲)$$

در حالی که چگالی جرم-انرژی u_M همه جا صفر است. بنابراین، حتی یک میدان الکتریکی کوچک می تواند اختلال بزرگی را ایجاد کند که باعث می شود کرمچالهٔ مورد نظر محو شود. با اینکه کرمچالهٔ با تابع شکل ثابت نمونهٔ ساده‌ای است و جوابهای پتانسیل به طور دقیق برای آن به دست می آیند اما متاسفانه به طور شدید تحت تاثیر میدان خارجی ناپایدار است. با وجود این، چنان که (۳۲) نشان می دهد هرچه شعاع گلوگاه بزرگتر باشد اختلال کمتر است. به علاوه، اگر V_0 خیلی کوچک باشد و مرز S خیلی دور از گلوگاه واقع شود باز هم از مقدار اختلال کاسته می شود.

برای کرمچالهٔ زیربخش ۵ .۲، چگالی انرژی الکتریکی (۳۰) با استفاده از رابطهٔ (۲۹) به صورت، $u_E=\frac{4V_0^2}{\pi^3B_0^2}$، می‌شود که در آن شرط $S\gg\rho_0$ را اعمال کرده ایم. همچنین چگالی جرم-انرژی مادهٔ پس زمینه می شود $u_M=\frac{-1}{8\pi GB_0^2}$ که منفی است. نسبت این دو چگالی از شعاع گلوگاه B_0 مستقل و با V_0^2 متناسب است. بنابر این تنها با کوچک انتخاب کردن V_0 می توان اختلال ناشی از میدان الکتریکی را کاهش داد. روشن است که این کرمچاله نسبت به کرمچالهٔ با تابع شکل ثابت پایدارتر است.

۵. محیط دی الکتریک هم ارز

با توجه به ضریب گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\rho)$ که پیشتر

معرفی شد، می توانیم یک محیط دی الکتریک هم ارز متناظر با هندسهٔ پس زمینه در نظر بگیریم [۱۵]. چنین محیط دی الکتریکی یک محیط خطی، همسانگرد ولی ناهمگن است و هرچه از گلوگاه دورتر شویم خواص آن به خواص خلاء نزدیکتر می شود. به این ترتیب، با محاسبهٔ بارهای قطبیده، می توانیم تاثیر هندسهٔ کرمچاله ای بر پتانسیل را به طریق دیگری توجیه کنیم.

به منظور بررسی خواص این محیط، بردار قطبش

$$\mathbf{P} = -\left[\frac{\varepsilon(\rho)-۱}{۴\pi}\right]\nabla\psi \ , \qquad (۳۳)$$

را در نظر می گیریم. بنابراین، چگالی بار قطبیدهٔ حجمی چنین به دست می آید

$$\rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{۱}{۴\pi}\nabla^۲\psi = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon(\rho)}\frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \ , \qquad (۳٤)$$

که در آن از (۱۷) استفاده کرده ایم. اکنون ψ را از (۱۸) در (۳٤) جایگذاری می کنیم و با انتگرالگیری در کل فضا بار قطبیدهٔ حجمی به دست می آوریم. داریم

$$Q_V = \frac{۱}{۴\pi}\sum_l\sum_m a_{lm}\left[\int_{\rho_\circ}^{\infty}\frac{۱}{\varepsilon(\rho)}\frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho}\frac{dR_l}{d\rho}\rho^۲ d\rho\int Y_{lm}(\theta,\phi)d\Omega\right]$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۴\pi}}a_{\circ\circ}\int_{\rho_\circ}^{\infty}\frac{۱}{\varepsilon(\rho)}\frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho}\frac{dR_\circ}{d\rho}\rho^۲ d\rho = -Q\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon(\rho_\circ)}\right), \qquad (۳۵)$$

که در آن در تساوی آخر از (۲۰) استفاده کرده ایم. علاوه بر این، بار قطبیدهٔ سطحی درست در مرز گلوگاه می شود

$$Q_s = \left[\frac{\varepsilon(\rho_\circ)-۱}{۴\pi}\right]\rho_\circ^۲\int\frac{\partial\psi}{\partial\rho}d\Omega =$$

$$a_{\circ\circ}\left[\frac{\varepsilon(\rho_\circ)-۱}{۴\pi}\right]\rho_\circ^۲\frac{dR_\circ}{d\rho}\Big|_{\rho_\circ} = Q\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon(\rho_\circ)}\right) \ , \qquad (۳٦)$$

که در اینجا نیز از (۱۸) و (۲۰) استفاده شده است. البته همان طور که انتظار داشتیم بار قطبیدهٔ کل محیط صفر است. باید توجه نمود که $\varepsilon(\rho_\circ)$ برای هر انتخاب تابع شکل در متریک (۱۲) عددی است مستقل از $\rho_\circ$. از این رو بار های قطبیدهٔ بالا برای هر کرمچاله به اندازهٔ شعاع گلوگاه بستگی ندارند. بدیهی است که با عوض کردن تابع شکل مقدار این بار ها نیز تغییر می کند.

٦. نتیجه گیری

با بررسی جوابهایی که در بخش چهارم برای $R_l(\rho)$ به دست آمده‌اند به این ویژگی مهم آنها پی می‌بریم که با وجود توانهای منفی، هیچکدام تکین نیستند، چون همواره $\rho \geq \rho_\circ > ۰$. این مطلب نقش توپولوژی غیر بدیهی کرمچاله‌ای را به خوبی نشان می دهد. برای روشن شدن این موضوع، نمودار $R_l(\rho)$ مربوط به کرمچالهٔ زیر بخش ٤-۲ (در یک مسئلهٔ داخلی) در شکلهای ۱- الف، ۱- ب و ۱-ج به ترتیب به ازای $l=۰$، $l=۱$ و $l=۲$ ترسیم شده است (منحنیهای توپر). برای مقایسه، بخش شعاعی پتانسیل در غیاب متریک کرمچاله‌ای نیز نشان داده شده است (منحنیهای خط چین). دیده می‌شود که بیشترین تاثیر بر پتانسیل در نزدیکی گلوگاه رخ می‌دهد.

علاوه بر این، می‌توانیم نتایجی را به صورت کلی برای متریک (۱۲) در مورد رفتار میدان الکتریکی و میدان جابه جایی به دست آوریم. با توجه به مطالب بخش ۵ ، به دلیل وجود بار های قطبیده، شار میدان الکتریکی در اطراف کرمچاله ناپیوسته خواهد بود. بخشی از خطوط $\mathbf{E}$ قبل از رسیدن به گلوگاه توسط بارهای قطبیدهٔ حجمی جذب می شوند و خطوط باقیمانده همراه با خطوط تولید شده توسط بار مثبت قطبیدهٔ گلوگاه، از گلوگاه عبور می کند. این در حالی است که مطابق با رابطهٔ $\nabla\cdot\mathbf{D}=۰$ ، شار خالص میدان جابه جایی برای هر سطح بستهٔ دلخواه Σ صفر است. اما باید توجه کرد که به دلیل توپولوژی غیر بدیهی کرمچاله، همواره بخشی از سطح Σ یک کره به شعاع گلوگاه خواهد بود. به طوری که می توان نوشت

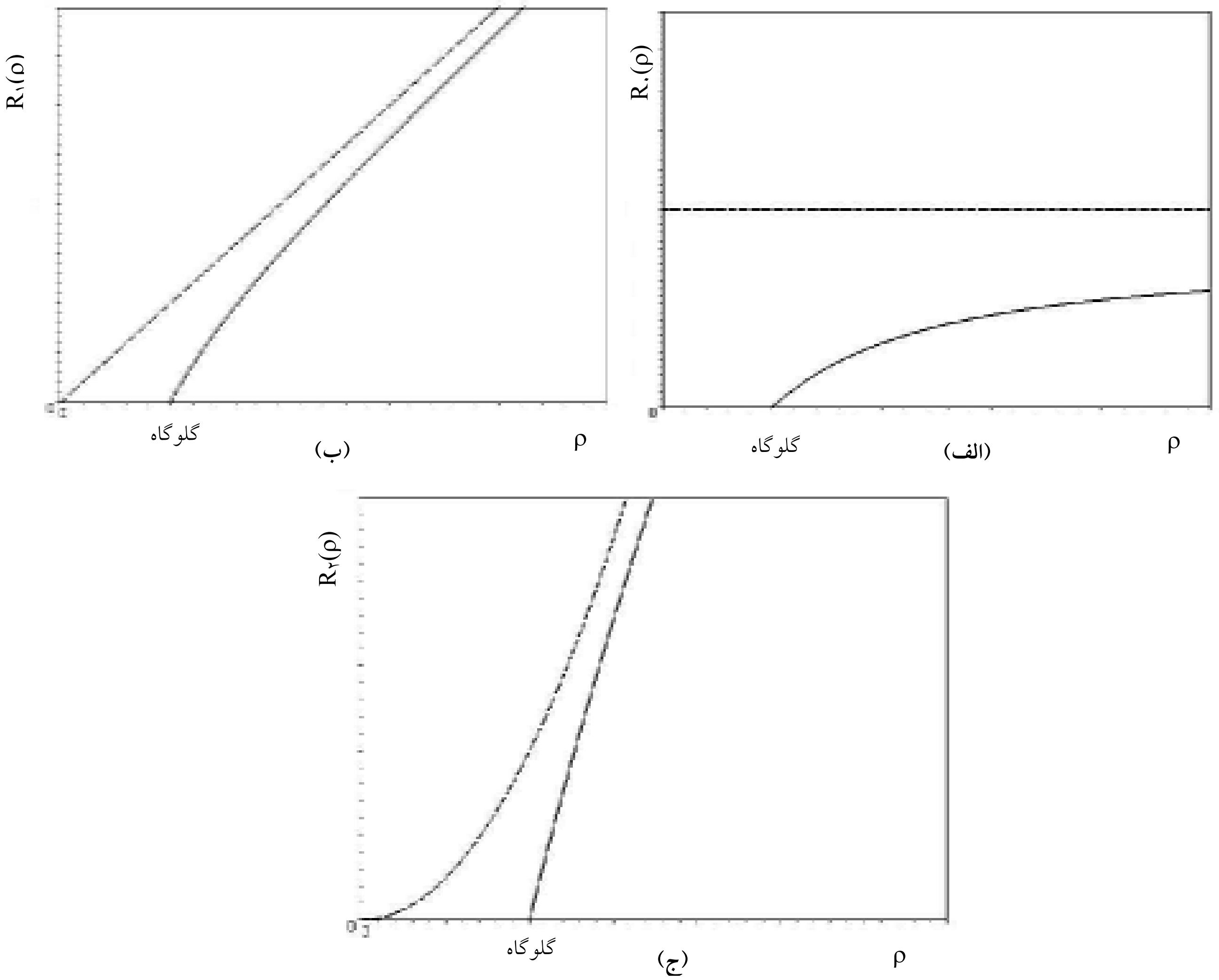
$$\oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da = \oint_{\Sigma'}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da + \oint_{\Sigma_\circ}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da = ۰$$

که در آن Σ' سطح دلخواهی است که کرمچاله را احاطه کرده است و $\Sigma_\circ$ کره ای است به شعاع گلوگاه. به کمک رابطهٔ بالا و روابط بخش ۵ می توان شاری که به سطح Σ' وارد و از گلوگاه خارج می شود را حساب کرد

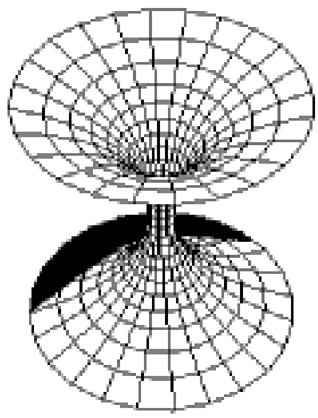
$$\oint_{\Sigma'}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da = -\oint_{\Sigma_\circ}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da = \oint_{\Sigma_\circ}\varepsilon(\rho)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\rho^۲ d\Omega$$

$$= \sqrt{۴\pi}a_{\circ\circ}\varepsilon(\rho_\circ)\rho_\circ^۲\left(\frac{dR_\circ}{d\rho}\right)_{\rho_\circ} = ۴\pi Q \ . \qquad (۳۷)$$

به عنوان مثال، در شکل ۲ طرحی دو بعدی از خطوط $\mathbf{D}$ و همین طور سطوح همپتانسیل در حالتی که پتانسیل تقارن کروی دارد نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودارهای $R_l(\rho)$ مربوط به کرمچالهٔ زیر بخش ٤-۲ در یک مسئلهٔ داخلی به ازای $l=0$ ، $l=1$ و $l=2$ توسط منحنیهای توپر نشان داده شده اند. به منظور مقایسه، رفتار پتانسیل در غیاب کرمچاله نیز توسط منحنیهای خط چین نمایش داده شده است.



شکل ۲. طرحی دوبعدی از خطوط **D** (یالها) و سطوح همپتانسیل (دایره‌ها) در یک هندسهٔ کرمچاله‌ای در حالتی که پتانسیل تقارن کروی دارد.

در اینجا نکتهٔ مهمی وجوددارد. با بررسی رابطه های (۳۵)، (۳٦) و (۳۷) می بینیم که بارهای قطبیدهٔ حجمی و سطحی و همین طور شار میدان جابجایی به درون کرمچاله فقط به ضریب a_{00} بستگی دارند و بنابراین اگر پتانسیل را چنین بنویسیم

$$\psi(\rho,\theta,\phi)=\frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}}R_0(\rho)+\sum_{l=1}\sum_{m}a_{lm}R_l(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi), \qquad (۳۸)$$

تنها جملهٔ اول منجر به مقدار های غیر صفر برای آنها خواهد شد. چنانچه شرایط مرزی را بگونه ای برگزینیم که a_{00} صفر شود آنگاه شار خالص میدان جابه جایی حاصل برای هر کدام از سطوح Σ' و Σ_0 به تنهایی صفر است. در مورد میدان

الکتریکی، گرچه هر کدام از بارهای قطبیدهٔ سطحی و حجمی صفر است اما چگالی این بار ها صفر نیست و ناپیوستگی شار به طور موضعی وجود دارد. .

مراجع

1. L Flamm, *Physik Z* **17** (1916) 448.
2. J A Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic, NY (1962).
3. M S Morris, K S Thorne, *Am. J. Phys.* **56**(5) (1988) 395.
4. M S Morris, K S Thorne, U Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1446.
5. B Nasr-Esfahani, *Ph.D. Thesis*, Shiraz University, Shiraz (1999).
6. N Riazi, B Nasr-Esfahani, *Astrophysics and Space Science*, **271**(3) (2000) 237.
7. K K Nandi, A Islam, J Evans, *Phys. Rev. D***55** (1997) 2497.

۸. ب. نصر اصفهانی، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران*، **۲**، ٤ (۱۳۷۹) ۲۲۹.

۹. ب. نصر اصفهانی، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران*، **۲**، ٥ (۱۳۸۰) ۲٥۹.

10. S W Kim, *Phys. Rev. D***58** (1998).
11. D Hochberg, M Visser, *Phys. Rev. D***58** (1998) 4421.
12. T A Romman, *Phys. Rev. D***47** (1993) 1370.
13. S Kim, H Lee, *Phys. Lett. B***458** (1999) 245.
14. S Kar, D Sahdev, B Bhawal, *Phys. Rev. D***49** (1994) 853.
15. S E P Bergliaffa, K E Hibberd, *Phys. Rev. D***62** (2000).
16. J D Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1989.