مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۴، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۳

مقیاسبندی طول موج لایه‌بندی و دیاگرام فاز برای شارش مخلوطهای دانه‌ای دوتایی در سلولهای هل- شاو عمودی

ناهید ملکی جیر سرایی[۱]، سمانه برادران[۱]، الهام شکریان[۱]، بهاره قانع مطلق[۱] و شاهین روحانی[۲و۳]

۱. آزمایشگاه سیستمهای پیچیده، گروه فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۳. مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات (I.P.M) ، تهران، ایران

(دریافت مقاله:۸۲/۸/۱۹ ؛ پذیرش: ۸۳/۲/۱۶)

چکیده

شارش مخلوط دو ماده دانه‌ای شامل شن و شکر در یک سلول هل- شاو عمودی موجب پیدایش کپه‌هایی می‌شود که در آنها لایه‌بندی و جداسازی مشاهده می‌شود. مطالعه تجربی ما نشان می‌دهد که نسبت آهنگ شارش به فاصله دو جدارهٔ سلولها مشخص می‌کند که کدام یک از این دو اتفاق بیفتد. ما دیاگرام فاز مورفولوژی تپه‌ها را به‌صورت تابعی از آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های سلول به‌دست آوردیم. دریافتیم که طول موج لایه‌بندی با این نسبت مقیاسبندی می‌شود. مشاهده کردیم که در هر آهنگ شارش حاصل ضرب طول موج و فاصله دیواره‌ها ثابت می‌ماند. بنابراین طول موج به صورت یک تابع هموگرافیک با فاصله دیواره‌های سلول تغییر می‌کند. لایه‌بندی دانه‌ها فقط در یک ناحیه محدود فضای پارامترها اتفاق می‌افتد. ما برای وجود این ناحیه در فضای فاز تعبیری ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: سلول هل – شاو، تاب، زاویهٔ ته‌نشست، لایه‌بندی، جدار

۱. مقدمه

مخلوطهای دانه‌ای وقتی درون سلول هل- شاو عمودی ریخته می‌شوند، رفتار عجیبی مثل جداسازی و لایه‌بندی نشان می‌دهد. مکث و دیگران[۳،۲،۱] پیشنهاد می‌کنند هر وقت یک مخلوط دانه‌ای با دانه‌هایی با اندازه‌های مختلف درون یک سلول هل- شاو عمودی ریخته شود، همیشه انتظار جداسازی می‌رود و مهم نیست که مقدار زاویه ته نشست[۱] چقدر باشد. اما آنها نشان دادند که لایه‌بندی فقط وقتی رخ می‌دهد که دانهٔ بزرگ، زاویه ته نشست بزرگتری از ذرات کوچک دارد. هرمن و همکارانش [۴] استدلال کردند که نسبت اندازهٔ دو ذره نیز مهم است و لایه‌بندی فقط وقتی می‌تواند اتفاق بیفتند که این نسبت بزرگتر از ۱/۵ باشد. مکث و هرمن هر دو توافق دارند که طول موج لایه‌های لایه‌بندی با آهنگ شارش دانه‌ها زیاد می‌شود [۵]. در صورتی که کوپ و همکارانش [۶] نشان دادند که طول موج از آهنگ شارش تأثیری نمی‌پذیرد، ولی اعتقاد دارند که یک آهنگ شارش بحرانی وجود دارد که برای آهنگهای شارش بیشتر از آن، لایه‌بندی وجود ندارد. ما در این مقاله اثر آهنگ شارش و فاصله سلولها را بررسی می‌کنیم. همچنین یک دیاگرام فاز ارائه می‌کنیم که تابعی از نسبت آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های

۱. Repose

www.SID.ir

سلولهاست. ما دریافتیم که طول موج کاملاً از آهنگ شارش تأثیر می‌پذیرد و با آن زیاد می‌شود. در واقع بر حسب نسبت آهنگ شارش و فاصله سلولها مقیاسبندی می‌شود. ما همچنین پیشبینی می‌کنیم که اگر فاصله سلولها مناسب باشد هیچ آهنگ شارش بحرانی بالایی برای تشکیل لایه‌بندی وجود ندارد.

ما همچنین مخلوطهایی از نخود و لوبیا را در سلولهای هل – شاو بزرگتر آزمایش کردیم ، نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جدایی لایه‌ها. بنابراین، به نظر می‌رسد که اندازه، خود نقشی در این پدیده بازی می‌کند. نتایج ما با نتایج کارهای قبلی [۱ تا ۵ و ۷] که حرکتهای بهمنی حاصل بین دو زاویه آستانه موجود متفاوت را مسئول لایه‌بندی می‌داند، توافق دارد.

۲. مراحل آزمایش

وسیلهٔ تجربی ما شامل دو قطعه شیشه عمودی با ضخامت۳mm و اندازه ۲۰×۳۰ cm است که با تعدادی جداکنندهٔ متغییر به صورت موازی یکدیگر و عمود بر صفحهٔ پایه در مقابل هم قرار دارند. فاصله دیواره‌ها می‌تواند از ۳ تا ۴۰ mm تغییر کند. یک مخلوط شکر (ذرات کم و بیش استوانه‌ای با ارتفاع متوسط ۰/۸mm چگالی $0/5\ g/cm^3$) و شن $1/5\ g/cm^3$) که خوب مخلوط شده‌اند از طریق قیفهایی با دهانه‌های متفاوت (که در نتیجه آهنگ شارشهای متفاوت ایجاد می‌کند) درون سلول هل- شاو ریخته می‌شود. آهنگ شارش می‌تواند از ۱/۲ g/sec تا ۶۰ تغییر کند. آزمایشها چند بار تکرار شدند. نتایجی که ارائه می‌شود حاصل میانگین‌گیری بیش از ۲۰ آزمایش است. ما این آزمایشها را در دامنه وسیعی از آهنگهای شارش و جدایی دیواره‌ها تکرار کردیم. با استفاده از یک دوربین *CCD* عکسهای لایه‌ها در کامپیوتر ثبت شد. طول موج نقش لایه‌ها را با تحلیل پیکسلی اندازه گرفتیم.

۳. تحلیل

۳. ۱. اثر آهنگ شارش

مشاهده کردیم که طول موج لایه‌بندی از آهنگ شارش تأثیر می‌پذیرد. و به طور خطی با آن زیاد می‌شود. شکل ۱ بستگی طول موج نسبت به آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها را نشان می‌دهد.

۳. ۲. اثر فاصله دیواره‌های سلول

مشاهد کردیم که فاصله دیواره‌های سلول نیز، اثر واضحی روی طول موج دارد. بنابراین با تغییر دادن این فاصله در یک سری آزمایشها و با حفظ آهنگ شارش ثابت، این اثر را بررسی کردیم. دریافتیم که با افزایش فاصله دیواره‌ها، طول موج با یک تابع هموگرافیک کاهش می‌یابد. شکل ۲ این وابستگی را نشان می‌دهد.

۳. ۳ دیاگرام فاز

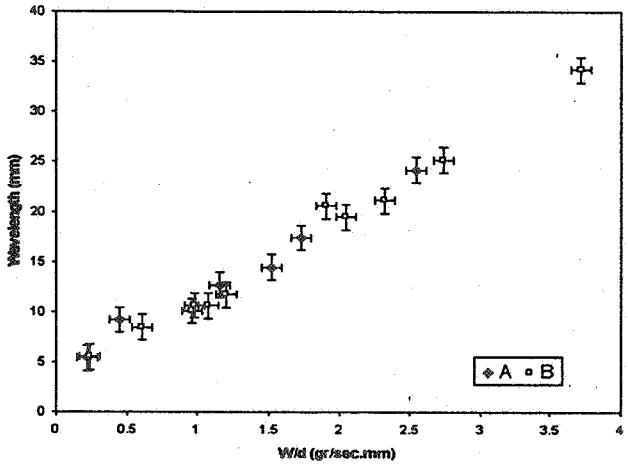
از آنجایی‌که برای یک مخلوط دانه‌ای دو پارامتر یعنی آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها وجود دارند که روی کیفیت و کمیت طبقه‌بندی اثر می گذارد، یک دیاگرام فاز از فاصله دیواره‌ها و آهنگ شارش رسم کردیم (شکل ۳). همان‌طور که این دیاگرام نشان می‌دهد برای هر دوی آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها یک ناحیه محدود وجود دارد که لایه‌بندی در آن اتفاق می‌افتد. دو خط چین شاید از مبدأ مختصات بگذرند (برای نقاط نزدیک مبدا اطلاعات موجود نیست) و شیب آنها متناسب با طول موج است. با عبور از یک مرز مشخص، گذار قاطعی ازلایه‌بندی به جداسازی وجود دارد.

٤. تفسیر داده‌ها

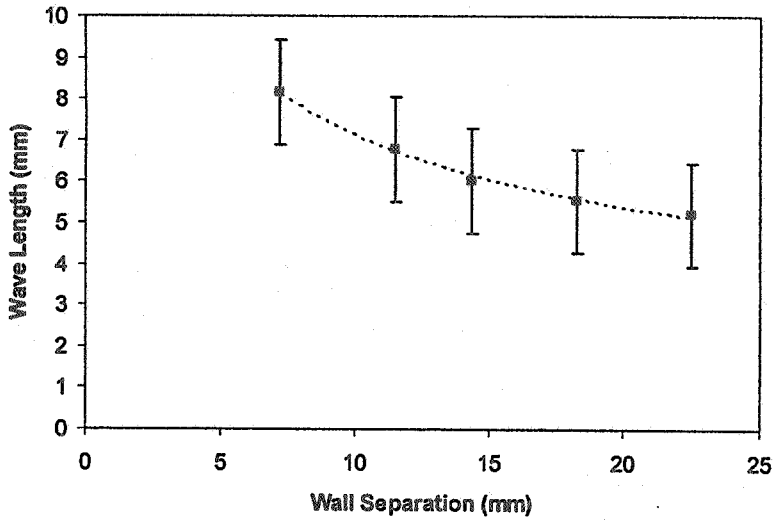
مکث و دیگران [۱ تا ۳ و ۷] وابستگی خطی λ به ضخامت بخش غلطنده در سطح تپه را پیش بینی کرده‌اند. و گراسلی و هرمن [۴] با در نظر گرفتن استدلال بقای جرم، بیان ساده‌ای برای طول موج لایه، به‌دست آوردند. آنها آهنگ شارش را به صورت $w = d\ \rho V\ (w)\ \lambda$ بیان کردند که در آن d فاصله دیواره‌های سلول و ρ میانگین چگالی ذرات و V سرعت پایین آمدن ذرات غلطنده در یک حرکت بهمنی است [۴].

در مقالات قبلی[۱تا ۷] استدلال شد که لایه‌بندی فقط وقتی می‌تواند اتفاق بیفتد که ریزش بهمنی اتفاق افتد. این بستگی به

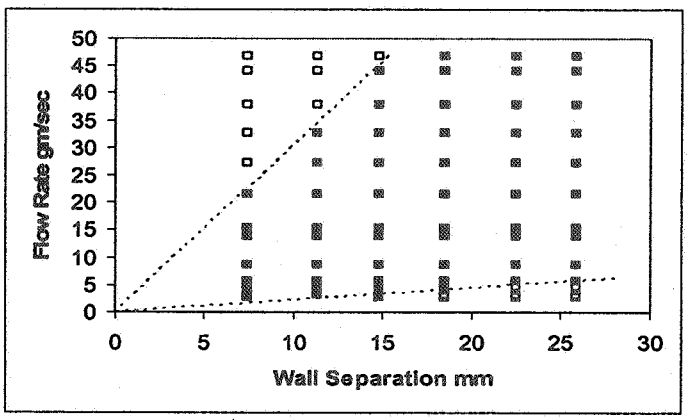
www.SID.ir



شکل ۱. بستگی خطی طول موج نسبت به نسبت آهنگ شارش به جدایی دیواره‌های سلول. فاصله دیواره‌ها برای A ۱۰/۷۵ mm است و برای B ۱۴/۲mm است.



شکل ۲. وقتی که آهنگ شارش ثابت است، طول موج با افزایش دیواره‌ها به‌طور هموگرافیک کاهش می‌یابد.



شکل ۳. دیاگرام فاز، مربعهای توپر، ناحیه لایه‌بندی هستند و مربعهای توخالی ناحیه جداسازی هستند.

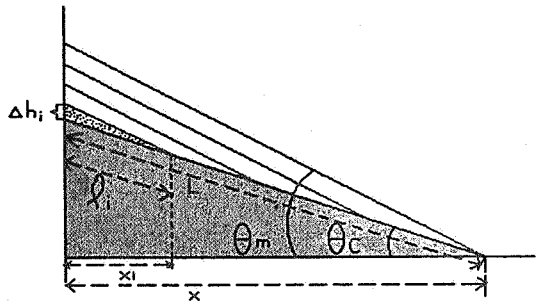
www.SID.ir

وجود دو زاویه ته نشست آستانه یعنی زاویه بحرانی θ_c و زاویه ماکزیمم θ_m دارد. زاویه θ_c مستقیماً از اندازه‌گیری شکلهای دیجیتالی تپه در سلول هل - شاو به‌دست می‌آید و θ_m از زاویه لازم برای خم کردن سلول تا زمانی که تپه ثابت شروع به ریزش کند تعیین می‌شود. شارش بهمنی دو فاز دارد، دانه‌ها روی مثلث اولیه تشکیل کپه کوچکی می‌دهند تا وقتی که زاویه θ_m به‌وجود آید. همینکه از زاویه ماکزیمم θ_m گذشتند فروریزش بهمنی کپه رخ می‌دهد که فاز دوم شارش است. همینکه کپه حرکت کرد فرآیند تکرار می‌شود. بنابراین لایه‌بندی اتفاق می‌افتد. اگر T_i زمان ریزش بهمن باشد، پس صرفاً بقای جرم مستلزم آن است

$$\lambda \sim \left(\frac{w}{d}\right)\left(\frac{T_i}{L}\right), \qquad (۱)$$

که L اندازه فیزیکی شیب است (شکل ۴ را نگاه کنید.) آهنگ شارش بیشتر صرفاً منجر به تشکیل کپه بزرگتری می‌شود. در پرتو این استدلال می‌توانیم دیاگرام فاز را به‌صورت زیر بفهمیم. هنگامی که فاصله d ثابت نگه داشته شود، وقتی آهنگ شارش w تغییر می‌کند،دو طول موج حدی وجود دارد. برای w بزرگ، کپه‌هایی بزرگ شکل می‌گیرد تا جایی که اندازه کپه به حد فیزیکی، یعنی زاویه آستانه شیب محدود شود (شکل۴). برای wهای خیلی کوچک کپه‌های کوچک شکل می‌گیرد و حد پائینی اندازه کپه به اندازهٔ دانه‌ها محدود می‌شود. از طرف دیگر وقتی w ثابت است و اندازه سلول متغییر، وقتی d (فاصلهٔ دیواره‌ها) تغییر می‌کند، دوباره دوطول موج حدی وجود دارد، برای d کوچک ، باز کپه‌های بزرگ شکل می‌گیرد تا اندازه کپه به شیب محدود شود و برای d بزرگ کپه های کوچک شکل می‌گیرد چون دانه‌ها در جهت d بسط می‌یابند. به همین صورت باز این ارتفاعهای کوچکتر کپه را نتیجه می‌دهد. باز اندازهٔ دانه‌ها حد پایینی ارتفاع کپه را محدود می‌کند. این فرآیند وابستگی λ به $\frac{۱}{d}$ را نتیجه می‌دهد. همان‌طور که گراسلی و هرمن اشاره کردند، داریم:

$$W \approx \lambda d V , \qquad (۲)$$



شکل ۴. زاویه‌های آستانه θ_c و θ_m، متغیرهای X_i ، l_i ، Δh_i بر حسب موقعیتهای متغیر آهنگ شارش و فاصله دیواره ها نشان داده شده اند.

از طرف دیگر از شکل ۴ وقتی کپه به زاویه ته نشست ماکزیمم می‌رسد داریم:

$$\frac{\Delta h_i}{۲t_i} l_i d \cong \lambda dV \cong W , \qquad (۳)$$

که t_i زمان لازم برای شکل‌گیری کپه بین θ_c و θ_m است. زیرا این کپه ریزش بهمنی می‌کند و لایه را شکل می‌دهد. و ما داریم:

$$l_i \cong \frac{X_i}{\cos\theta_c} . \qquad (۴)$$

همچنین می دانیم که زاویه‌های آستانه طبق رابطه زیر به وضعیت هندسی شکل بستگی دارد:

$$\Delta h_i \cong X_i(tg\theta_m - tg\theta_c) . \qquad (۵)$$

با ترکیب روابط (۳ و ۴ و ۵) داریم:

$$\frac{X_i^۲(tg\theta_m - tg\theta_c)d}{۲t_i\cos\theta_c} \approx \frac{\Delta h_i x_i d}{۲t_i\cos\theta_c} \approx \frac{\Delta h_i^۲ d}{۲t_i\cos\theta_c(tg\theta_m - tg\theta_c)} \approx \lambda dV \approx W \qquad (۶)$$

یا به طور خلاصه:

$$W \approx \frac{۱}{۲\cos\theta_c(tg\theta_m - tg\theta_c)} \frac{d\Delta h_i^۲}{t_i} . \qquad (۷)$$

در حالت w ی ثابت وقتی d زیاد می‌شود، $\frac{\Delta h_i^۲}{t_i}$ باید کم شود تا w ثابت نگه داشته شود. در حالت عمومی، هر دوی Δh_i و

www.SID.ir

t_i می‌توانند به نحوی تغییر کنند، که $\frac{\Delta h_i^2}{t_i}$ کاهش یابد تا w ثابت بماند به عبارت دیگر هیچ دلیلی (به دلایل منطقی یا شهود تجربی) وجود ندارد که (فقط) t_i تغییر کند بنابراین در حالت w ی ثابت، با افزایش d، Δh_i کاهش می‌یابد و برعکس. اما Δh_i تغییراتش محدود است و این کلید درک حدود ناحیه‌ای در دیاگرام فاز است که لایه‌بندی در آن اتفاق می‌افتد. برای d ی کوچک وقتی آهنگ شارش ثابت است، Δh_i و همچنین x_i خیلی زیاد است (از آنجا که $\Delta h_i \cong X_i(tg\theta_m - tg\theta_c)$) و وقتی X_i بزرگتر از X است، هیچ لایه‌بندی وجود ندارد، زیرا هیچ تابی (*kink*) نمی‌تواند وجود داشته باشد [۷،۴]. اما جدا سازی[1] همیشه می‌تواند اتفاق بیفتد، پس در این ناحیه فقط جداسازی داریم و لایه‌بندی وقتی شروع می‌شود که $X_i = X$ باشد و مادامی معتبر است که X_i کوچکتر از X بماند. این امر وجود آستانه چپ برای آهنگ شارش ثابت در دیاگرام فاز را توجیه می‌کند. برای d بزرگ (دوباره وقتی w ثابت است) Δh_i کوچک است و وقتی d خیلی زیاد شود Δh_i آن قدر کوچک می‌شود که ممکن است مقدار دانه‌هایی که یک کپه مثلثی شکل بین دو زاویه آستانه تشکیل می‌دهند، برای شکل‌گیری یک لایه به ضخامت اندازه ذره کافی نباشد و باز هم در این ناحیه فقط جداسازی داریم. این همچنین کاهش طول موج با فاصله دیواره‌ها را توضیح می‌دهد.

از طرف دیگر وقتی فاصلهٔ دو دیوار سلول d، ثابت بماند به هنگام افزایش w، Δh_i یا X_i باید افزایش یابد تا همان‌طور که در بالا اشاره شده d ثابت نگه داشته شود. باز به طور کلی هردوی X_i و t_i ممکن است تغییر کنند، بنابراین X_i باید با w زیاد شود. بازهم شرط $X_i \le X$ تغییرات آن را محدود می‌کند و کاهشش همان‌طور که قبلاً هم گفته شد به‌وسیلهٔ اندازه ذرات محدود می‌شود.

به معادلهٔ (۱) بر می‌گردیم،داریم:

$$\frac{\Delta h_i x_i d}{2 t_i \cos\theta_c} \approx w \approx \lambda d v \quad , \qquad (۸)$$

همچنین:

$$\lambda = \frac{\Delta h_i x_i}{2 t_i v \cos\theta_c} = \frac{\Delta h_i}{2}\frac{x_i}{x}\frac{T_i}{t_i} \quad , \qquad (۹)$$

که T_i زمان فرو ریزش بهمن و t_i زمان لازم برای شکل‌گیری کپه بین θ_c و θ_m قبل از ریزش بهمن است، بنابراین λ با Δh_i تغییر می‌کند (که لزوماً خطی نیست). این امر بستگی به w و d را توجیه می‌کند (دیدیم که Δh_i وقتی d ثابت است با w تغییر می‌کند و وقتی w ثابت است با d تغییر می‌کند.) و همچنین به درک ناحیه لایه‌بندی در دیاگرام فاز کمک می‌کند.

۵. نتیجه‌گیری

نتیجه می‌گیریم که، طول موج بافاصله به‌صورت $\frac{1}{d}$ کاهش می‌یابد و این به خوبی با داده‌ها سازگار است. طول موج با آهنگ شارش افزایش می‌یابد و در حقیقت به‌صورت خطی با نسبت آهنگ شارش به فاصله دیواره‌ها افزایش می‌یابد. در نهایت این یعنی طول موج لایه‌بندی با این آهنگ مقیاسبندی می‌شود.

اعتقاد داریم که مکانیسم شکل‌گیری لایه‌بندی، به وجود دو زاویه آستانه و بهمنهای تناوبی ناشی از آن، و نیز وجود امکان تشکیل تاب(*kink*) وابسته است. لایه‌بندی فقط درآن ناحیه‌ای از فضای فاز(آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های سلول) اتفاق می‌افتد که بهمنهای تناوبی داشته باشیم. مشاهده کردیم که برای آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها، ناحیه محدودی وجود دارد که بهمنهای تناوبی در آن می توانند اتفاق افتند.

ما همچنین حدس می‌زنیم که ایجاد یک کپه بحرانی بدون توجه به آهنگ شارش و فاصله دیواره، مدت زمان ثابتی لازم دارد. البته این در صورتی است که درون حدودی که دیاگرام فاز تعیین می‌کند باشیم. مکانیزم این پدیده برای ما روشن نیست به نحوی شهودی می‌توان استدلال کرد که سرعتهای افقی و عمودی دانه‌ها، در حالی که این گونه کپه‌ها شکل می‌گیرند با آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها به نحوی رابطه

۱. Segregation

www.SID.ir

دارند که تشکیل یک کپهٔ بحرانی همیشه مدت زمان ثابتی طول می‌کشد. البته مقیاس زمانی با سرعت یک تاب در حال پیش آمدن رابطه دارد. ما امیدواریم این مکانیزم را در آینده بررسی کنیم.

سرانجام چنین حدس می‌زنیم که برای آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها در تشکیل لایه‌ها حد مطلقی وجود ندارد و می‌توانیم در همهٔ آهنگهای شارش لایه‌بندی داشته باشیم، به این شرط که فاصله مناسب این دیواره‌ها را انتخاب کنیم، و برعکس، به‌این معنی که در سه بعد می‌توانیم لایه‌بندی داشته باشیم، همان‌گونه که در طبیعت داریم.

ما همچنین همهٔ مخلوطهای ممکن نخود با شکل تقریباً کروی، لوبیا سفید، لوبیا چشم بلبلی، لوبیا قرمز، عدس، ماش و لپه به اندازه‌های ۸/۷۵ و ۱۰/۲۵ و ۸/۵ و ۳/۸۷ و ۴/۸ میلیمتر را بررسی کردیم، نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جداسازی. برای بالا بردن مقیاسها، این مخلوطها را در سلولهای هل- شاو خیلی بزرگتری آزمایش کردیم. بزرگترین سلول هل- شاوی که مورد آزمون قرار گرفت دارای اندازه‌های ۵ cm × ۹۲/۵ × ۱۰۰ بود. بازهم نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جداسازی آزمایشهای ما روی حبوبات نشان داد که احتمالا برای تشکیل جداسازی ، نیز شرایطی وجود دارد. شاید برای تشکیل جدا سازی بین اندازهٔ ذرات و اندازه کپه رابطه‌ای وجود دارد. از طرف دیگر برخی نویسندگان نشان داده‌اند که برای آن که لایه‌بندی صورت گیرد دانه‌ها باید سطح زبری داشته باشند و شاید زبری حبوبات کافی نباشد. اما جداسازی باید حتماً بدون زبری هم رخ داده باشد. البته می‌پذیریم که آزمایشهای انجام شده ممکن است کافی نبوده باشند و کار بیشتری باید انجام شود.

قدردانی

مایلیم از آقای اسامه مشتاق عسکری به خاطر کمک ایشان در بر نامه نویسیهای رایانه‌ای تشکر کنیم .

مراجع

1. H A Makse, S Havlin, P R King and H E Stanley, *Nature* 386 (1997) 379-381.
2. H A Makse, P Cizeau and H E Stanley, *Phys. Rev. Lett.* , 78 (1997) 3298-3301.
3. H A Makse, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 7008-7016.
4. Y Grasselli and Herrmann, *Granular Matter* 1 (1998) 43.
5. H A Makse and H .J Herrmann, *Europhys. Lett.* 43 (1998) 1-6.
6. J PKoeppe, M Enz and JKakalios, *Phys. Rev. E* 58 (1998) R4104-R4107.
7. H A Makse, R C Ball, H A Stanley, and S Warr, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 3357-3367.

www.SID.ir