مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ٤، شمارهٔ ۳، زمستان ۱۳۸۳

مطالعه نیمه‌کلاسیکی چند رابطه جابه‌جاگری تعمیم‌یافته

بهروز میرزا و مهدی دهقانی

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده فیزیک

(دریافت مقاله:۸۲/۱۲/۲۵ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۳/۵/۷)

چکیده

هدف ما دراین مقاله یافتن آثار مشاهده‌پذیر از روابط جابه‌جاگری تعمیم‌یافته است. برای این منظور در ابتدا به دو مسئله در مکانیک کوانتومی با فرض کمینه طول می‌پردازیم. نخست با استفاده از بررسی اختلالی طیف اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی با جبر رابطه عدم قطعیت کمینه طول و مقایسه نتایج حاصل با مقادیر تجربی تخمینی از طول کمینه به دست می‌آوریم. سپس به عنوان بررسی اثرات فرض کمینه طول در مکانیک آماری و چگالی حالت‌های فضای فاز، مسئله محاسبه جرم حدی برای کوتوله‌های سفید را مورد مطالعه قرار داده و تلاش می‌کنیم جرم حدی برای کوتوله‌های سفید را با این فرض تصحیح کنیم. در پایان به بررسی برخی جنبه‌های کلاسیکی روابط عدم قطعیت کمینه تکانه می‌پردازیم. سپس قانون سوم کپلر را با این فرض تصحیح کرده وکاربردی برای آن پیشنهاد می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روابط عدم قطعیت کمینه طول، تقریب نیمه کلاسیکی، گرانش کوانتومی

۱. مقدمه

در سالهای اخیر مطالعه برروی مسائل مکانیک کوانتومی و نظریه میدان با روابط عدم قطعیت تصحیح شده مورد توجه قرار گرفته است. این روابط عدم قطعیت منجر به کمینه طول[۱] یا کمینه تکانه‌های[۲] مشاهده‌پذیر غیر صفر می‌گردند و از روابط جابه جاگری تصحیح شده به فرم کلی زیر نتیجه می‌شوند:

$$[x,p]=i\hbar f(x^{2},p^{2})$$

انگیزه‌های مطالعه چنین روابطی از حوزه‌های گوناگون در فیزیک نظری مانند نظریه ریسمان وگرانش کوانتومی برمی‌خیزد. به عنوان مثال برای ساختن نظریه گرانش کوانتومی این‌گونه استدلال می‌شود که: برهم نهی مکانیک کوانتومی و نسبیت عام در ابعاد از مرتبه طول پلانک محدودیتی برای مفهوم جایگزیدگی ایجاد می‌کند. ذرهٔ آزمونی که برای اندازه‌گیری در طولهای به کوچکی طول پلانک به کار می‌رود باید تکانه و انرژی زیادی داشته باشد چنین ذره‌ای خود ساختار فضا زمان را متأثر خواهد کرد. بنابراین یک نظریه وحدت یافته از گرانش و مکانیک کوانتومی جایگزیدگی مطلقی ندارد. عدم جایگزیدگی باعث عدم قطعیتی در اندازه‌گیریها در گرانش کوانتومی می‌شود این انگیزه‌ای است برای مطالعه نظریه‌ای که از آن به عنوان پدیده‌شناسی گرانش کوانتومی[۳] [۱] یاد می‌شود. در پدیده‌شناسی گرانش کوانتومی تلاش می‌شود با استفاده از داده‌های اخترشناسی [۳،۲] نظریه‌ای برای ساختار فضا زمان در فواصل کوچک از مرتبه طول پلانک بیابند. آملینو کاملیا[٤] از این طریق نظریه‌ای معرفی کرده است با عنوان نظریه نسبیت خاص

---

۱. Minimal length
۲. Minimal momentum
۳. Quantum gravity phenomenology
۴. G. Amelino-Camelia

دوگانه[۱] [۵،۴] که در آن علاوه بر وجود یک سرعت حدی مشاهده‌پذیر یک کمینه طول حدی مشاهده‌پذیر و مستقل از مشاهده‌گر نیز وجود دارد که اندازه‌گیری طولهایی کمتر از آن امکان‌پذیر نیست.

در نظریه ریسمان اختلالی نیز نشان داده شده است که ریسمانها به عنوان عناصر بنیادی نظریه قادر به اندازه‌گیری و آشکار سازی فواصلی کمتر از طول خود نیستند [۶]. پس نظریه ریسمان نیز به نوعی وجود یک طول کمینه مشاهده‌پذیر را پیش‌بینی می‌کند. وجود این طولهای کمینه همگی ناشی از یک رابطه عدم قطعیت به صورت:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{۲}\left(\frac{۱}{\Delta p} + \beta \Delta p\right) \qquad (۱)$$

است که در این نظریه‌ها ظاهر می‌شود. برای مثال این رابطه عدم قطعیت در آزمایشهای فکری که برای اندازه‌گیری افق رویداد یک سیاهچاله در نظر گرفته می‌شود، ظاهر می‌شود [۷]. یکی از خصوصیتهای جالب توجهی که این رابطه عدم قطعیت نتیجه می‌دهد وجود یک طول کمینه $\Delta x_{۰} = \hbar\sqrt{\beta}$ (طول ریسمان) است، که اندازه‌گیری طولهای کمتر از آن مطابق رابطه عدم قطعیت بالا امکان پذیر نیست. دیگر خصوصیت مهم آن ترکیب فرابنفش- مادون قرمز[۲] است، که در نظریه‌های ناجابه‌جایی و گرانش کوانتومی اتفاق می‌افتد. به‌طور شهودی می‌توان این پدیده را از رابطه عدم قطعیت بالا درک کرد: هنگامی که عدم قطعیت در تکانه بزرگ است (واگرایی فرابنفش) به دلیل جمله خطی متناسب با Δp در طرف راست رابطه (۱) برخلاف رابطه عدم قطعیت معمول هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی، عدم قطعیت در مکان نیز بزرگ می‌شود (واگرایی مادون قرمز). پدیده ترکیب فرابنفش- مادون قرمز در نظریه ریسمان یک تفاوت آشکاربین نظریه ریسمان و یک نظریه میدان معمولی را نشان می‌دهد و آن عدم جایگزیدگی (موضعی نبودن) در نظریه ریسمان است. این پدیده همچنین باعث می‌شود ارتباطی بین فیزیک در ابعاد بسیار ریز با فیزیک در ابعاد بسیار بزرگ به وجود آید. به این ترتیب مکانیک کوانتومی یا نظریه میدان مبتنی بر رابطه عدم قطعیت (۱) این قابلیت را دارد تا به عنوان رهیافتی برای حل برخی مسائل که فیزیک فواصل کوچک را به فیزیک فواصل بزرگ ربط می‌دهند، مورد استفاده قرار گیرد. برای مثال مسئله ثابت کیهان‌شناسی، مسئله منظم‌سازی تکینه‌ها در نظریه میدان را می‌توان نام برد.

در اینجا ما تلاش خواهیم کرد با استفاده از تقریبهای نیمه کلاسیکی به برخی از جنبه‌های کلاسیکی چند نظریه مبتنی بر جابه‌جاگرهای تغییر شکل یافته بپردازیم. بر این اساس در بخش اول دو مسئله را با مکانیک کوانتومی کمینه طول بررسی خواهیم کرد و از این طریق راهی برای برآورد پارامتری که طول کمینه را مشخص می‌کند به دست خواهیم آورد. در بخش دوم با استفاده از حد کلاسیکی مکانیک کوانتومی کمینه تکانه تلاش خواهیم کرد تا از پارامتر جبرکمینه تکانه نیز برآوردی به دست آوریم.

۲. مکانیک کوانتومی با جبر عدم قطعیت کمینه طول

یک ساختار جبری برای مشاهده‌پذیرها که رابطه عدم قطعیت (۱) را نتیجه می‌دهد در مرجع [۸] به دست آمده است. مکانیک کوانتومی تعمیم‌یافته مربوط به این ساختار جبری که به صورت زیر است:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}(۱ + \beta\vec{p}^{۲}) \qquad (۲)$$

$$[x_i, x_j] = ۲i\hbar\beta(p_i x_j - p_j x_i) \qquad (۳)$$

$$[p_i, p_j] = ۰ \qquad (۴)$$

به تفصیل در مرجع [۹] بررسی شده است.

اگر چه رابطه عدم قطعیت (۱) مربوط به فواصل بسیار ریز و یا فیزیک انرژیهای بالاست با این وجود ما دو مسئله در مکانیک کوانتومی با انرژیهای معمول را با فرض کمینه طول مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هدف اصلی از این کار این است که یک حد بالا برای پارامتری که جبر رابطه عدم قطعیت کمینه طول را مشخص می‌کند، به‌دست آوریم. به این منظور در بخش

---

۱. Doubly Special Relativity

۲. UV-IR mixing

(۲. ۱) اتم هیـدروژن را بـا فـرض کمینـه طـول مـورد مطالعـه قـرار می‌دهیم.

۲. ۱. اتم هیدروژن با فرض کمینه طول

به‌دست آوردن طیف انرژی اتم هیدروژن به عنـوان سـاده‌تـرین مسئله در مکانیک کوانتومی و مقایسـه آن بـا مقـادیر تجربـی از مهمترین موفقیتهای مکانیک کوانتومی بوده است. بـا ایـن حـال هیچگاه در فیزیک بـین مقـادیر آزمایشـگاهی و مقـادیر نظـری توافق مطلقی وجود نـدارد. اکنـون مـا بـا اسـتفاده از ایـن عـدم قطعیت می‌توانیم حدی بالا برای اعتبار فـرض کمینـه طـول در مکانیک کوانتومی بیابیم. از این طریق در مرجع [۱۰] یـک حـد برای β به دست آورده‌اند و نشان داه‌اند که اثـر فـرض کمینـه طول فشرده کردن ترازهای اتم هیدرون به سمت پایین است. در این قسمت از مقاله ما نتیجـه‌ای متفـاوت بـا مرجـع [۱۰] و تـا حدودی موید نتایج مرجع [۱۱] به‌دست می‌آوریم.

نمایش عملگرهـای مختصـات و تکانـه بـه صـورت عمـل ضرب و دیفرانسیل‌گیری روی توابع مـوج در فضـای تکانـه بـه صورت زیر به دست آمده است [۹]:

$$\hat{p}_i\psi(p) = p_i\psi(p) \qquad (5)$$

$$\hat{x}_i\psi(p) = i\hbar(1+\beta\vec{p}^2)\frac{\partial}{\partial p_i}\psi(p) \qquad (6)$$

این نکته را نیز باید خاطر نشان کرد که به دلیل وجود یک طول کمینـه، مفهـوم تـابع مـوج در فضـای مختصـات در مکانیـک کوانتومی با کمینـه طـول خـوش‌تعریـف نیسـت و ناچـاریم در مکانیک کوانتومی با توابع موج در فضای تکانه کار کنیم .

با تعاریف بالا برای عملگرهای مختصات نمی‌تـوان معادلـه شرودینگر با جبر کمینه طول را بـرای اتـم هیـدروژن بـه طـور تحلیلی و دقیق حل کرد. با این وجـود مـی‌تـوان اثـرات فـرض کمینه طول را به‌صورت اختلالی در هامیلتونی اتم هیدروژن وارد کرد.

از آنجا که مقدار پـارامتر β در جبـر رابطـه عـدم قطعیـت کمینه طول عدد بسیار کوچکی است و این پـارامتر در تعریـف عملگر مختصات به‌صورت خطی وارد شـده اسـت ایـن امکـان برای ما وجود دارد تا اتم هیدروژن را در فضای معمول در نظـر بگیریم و اثر فرض کمینه طـول را بـه صـورت یـک هـامیلتونی اختلال بر هامیلتونی اتم هیدروژن بررسـی کنـیم. بـا اسـتفاده از رابطه (۶) قسمت پتانسیل عملگر هامیلتونی اتم هیدروژن را بـه صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\frac{1}{r_{ml}} \cong (1-\beta\vec{p}^2)(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_r})^{-1} = (1-\beta\vec{p}^2)\frac{1}{r}$$

در این رابطه r_{ml} عملگر مکان با فرض کمینه طول اسـت و عملگر مکان در مکانیک کوانتومی معمول است کـه نمـایش آن در فضای تکانه به صورت زیراست:

$$r = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_r}$$

از آنجا که عملگر تکانه با β تصحیح نمی‌شود قسمت جنبشی هامیلتونی تصحیحی پیدا نمی‌کند، پس یک پتانسیل اختلال با فرض کمینه طول برای اتم هیدروژن به‌دست می‌آوریم:

$$\delta V = \beta p^2 \frac{e^2}{\ }$$

چون در مکانیک کوانتـومی معمـولی هسـتیم، محاسـبه مقـادیر چشمداشـتی بـا اسـتفاده از توابـع مـوج در فضـای مختصـات امکان‌پذیر است. با محاسبه مقدار چشمداشتی پتانسـیل اخـتلال جابه‌جایی انرژی را تا مرتبه اول β به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta E_{nl} = \int_0^\infty r^2 e^2 \beta R_{nl}(r)(\beta\vec{p}^2\frac{1}{\hat{r}})R_{nl}(r)dr$$

پس از محاسباتی مفصل خواهیم داشت:

$$\Delta E_{nl} = e^2\beta\hbar^2(R_{nl}(r))^2\Big|_{r=0}^{r=\infty} + e^2\beta\int_0^\infty r^2\frac{R_{nl}(r)}{r}\vec{p}^2 R_{nl}(r)$$

جمله آخر در ΔE_{nl} را با توجه به هامیلتونی اتم هیدروژن،

$$\vec{p}^2 = 2m\hat{H} + \frac{2me^2}{\hat{\ }}$$

محاسبه می‌کنیم. همچنین می‌دانیم که توابـع مـوج شـعاعی اتـم هیدروژن از روی توابع لاگر ساخته می‌شوند و این توابـع مـوج به ازای $l = 0$ در مبدأ صـفر مـی‌شـوند و مقـدار همـهٔ آنهـا در بی‌نهایت صفر است پس:

$$\Delta E_{nl} = -e^2\beta\hbar^2\left((\frac{2}{na_0})^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right)\left(L_{n-l-1}^{2l+1}(0)\right)^2 + 2me^2\beta E_n\langle\frac{1}{r}\rangle_{nl} + 2me^4\beta\langle\frac{1}{r^2}\rangle_{nl}$$

و با توجه به روابط زیر

$$L_n^k(\circ)=\frac{(n+k)!}{n!k!}\ ,\quad a_\circ=\frac{\hbar^۲}{me^۲}\ ,\quad \alpha=\frac{e^۲}{\hbar c}\ ,\quad E_n=-\frac{mc^۲\alpha^۲}{۲n^۲}$$

رابطه زیر را برای جابه‌جایی انرژی ترازهای اتم هیدروژن تا مرتبه اول β به دست می‌آوریم:

$$\Delta E_{nl}=۴\beta mE_n^۲\left(-۱+\frac{۴n(۱-(۲l+۱)\delta_{l\circ})}{۲l+۱}\right). \qquad (۷)$$

در مرجع [۱۲] با دقت $۱/۸\times ۱۰^{-۱۴}$ انرژی گذار ‎$۱S-۲S$‎ را به‌دست آورده‌اند. ما این فرض را در نظر می‌گیریم که تصحیح ترازهای انرژی توسط پتانسیل اختلالی مربوط به اثر کمینه طول که توسط رابطهٔ (۷) داده می‌شود از عدم قطعیتهایی که در اندازه‌گیری تجربی ترازهای انرژی وجود دارد کوچکتر است و اثر پتانسیل اختلالی همیشه به علت محدودیتهای تجربی اندازه‌گیری پنهان می‌ماند. با استفاده از این روش و مقدار تجربی که در بالا ذکر کردیم می‌توانیم یک حد بالا برای β به دست آوریم. با قرار دادن مقادیر در رابطه (۷) به ازای $n=۱$ و $l=\circ$ حد زیر را برای طول معادل با β به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta E_{۱۰}}{E_۱}=\frac{-۴\beta mE_۱^۲}{E_۱} \qquad (۸)$$

$$\hbar\sqrt{\beta}\le ۵/۰۸\times۱۰^{-۱۶}\ m$$

مرتبه β با مقداری که از طریق بررسی نوسانگر هماهنگ با فرض کمینه طول به دست آمده است [۱۳]، همخوانی دارد. همچنین این مقدار مطابق با مقداری است که در مرجع [۱۱] با روشی دیگر به دست آمده است .

در مورد اتم هیدروژن محاسبهٔ اختلالی اثر کمینه طول بر روی پدیده اشتارک نیز می‌تواند جالب توجه باشد. پتانسیل اختلالی اثر اشتارک در مکانیک کوانتومی معمول با:

$$V_{stark}=-eE_z z$$

داده می‌شود که در آن E_z مولفهٔ میدان الکتریکی در راستای محور اختیاری z است. چون عملگر z با فرض کمینه طول به صورت زیر تغییر یافته است:

$$z=i\hbar(۱+\beta\vec{p}^۲)\frac{\partial}{\partial p_z}$$

پتانسیل اختلالی برای اثر اشتارک به صورت زیر در می‌آید:

$$V_{stark}=-eE_z z+e\beta\hbar^۲\nabla^۲(E_z z)$$
$$=-eE_z z-eE_z z\vec{p}^۲-۲\hbar^۲eE_z\beta\frac{\partial}{\partial z}+e^۲\beta\vec{p}^۲\frac{۱}{r}$$

که در آن جمله اول مربوط به اثر اشتارک در مکانیک کوانتومی معمول است، جمله‌های دوم و سوم ناشی از تغییر شکل یافتن عملگر z با فرض کمینه طول است و جمله آخرجمله‌ای است که از اثر اختلالی فرض کمینه طول بر هامیلتونی اتم هیدروژن به دست آوردیم. برای محاسبه جابه‌جایی انرژی تراز پایه تحت اختلال بالا مشاهده می‌کنیم که محاسبه مقدار چشمداشتی هر سه جمله اول شامل انتگرال:

$$\int_{۴\pi} Y^*_{۰۰}(\Omega)\ Y_{۱۰}(\Omega)Y_{۰۰}(\Omega)\,d\Omega=۰$$

است، مقدار چشمداشتی جمله آخر را هم قبلاً حساب کردیم. به این ترتیب هیچ جابه‌جایی انرژی برای حالت پایه که متناسب با میدان الکتریکی باشد نمی‌یابیم. بنابراین تحت این اختلال، حکم کلی مبنی بر این که حالتهای غیرتبهگن نمی‌توانند گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی داشته باشند، دست نخورده باقی می‌ماند. با این حال دیده می‌شود که هامیلتونی اختلال جدید با L_z (عملگر تکانه زاویه‌ای در راستای محور z) جابه‌جا نمی‌شود و به این ترتیب اختلال جدید تمام حالتهای تبهگن $n=۲$ در اتم هیدروژن را از هم جدا می‌کند، ولی به دلیل کوچک بودن β، این جدا شدگی نسبت به اختلال $-eE_z z$ کوچک است و ترازها کمی نسبت به یکدیگر جابه‌جایی پیدا می‌کنند (در مقایسه با شکافتگی در اثر اختلال معمول اشتارک $-eE_z z$).

۳. مکانیک آماری با جبرعدم قطعیت کمینه طول

طرف راست رابطه عدم قطعیت کمینه طول (۲) را می‌توان به عنوان یک مقدار مؤثر برای ثابت پلانک که تابعی از تکانه است تعبیر کرد. در مکانیک آماری، سلول واحد فضای فاز را به شکل $ah^۳$ (a یک ثابت است و h ثابت پلانک) در نظر می‌گیرند در هر سلول از فضای فاز یک حالت کوانتومی قرار می‌گیرد. از این طریق چگالی حالتهای فضای فاز را می‌یابند و بعد بقیه کمیتها را محاسبه می‌کنند.

با تغییر در جابه‌جاگرهای اساسی مکانیک کوانتومی یکی از قضایای اساسی در مکانیک آماری که بر پایه صورتبندی

هامیلتونی مکانیک کلاسیک بیان می‌شود نیز دستخوش تغییر می‌شود. قضیه لیوویل در مکانیک آماری بیان کننده این واقعیت است که عنصر حجم فضای فاز ($d^{3}\vec{x}d^{3}\vec{p}$) با تحول زمانی سیستم (که با هامیلتونی مشخص می‌شود) ناورداست. با جابه‌جاگرهای اساسی که برای مکانیک کوانتومی با فرض کمینه طول به دست می‌آید در [۱۴] نشان داده‌اند که اگر عنصر حجم فضای فاز را به صورت زیر تصحیح کنیم

$$\frac{1}{(1+\beta\vec{p}^{2})^{3}}d^{3}\vec{x}d^{3}\vec{p} \qquad (9)$$

قضیه لیوویل صادق باقی می‌ماند. این رابطه به این معناست که در هر سلول $ah^{3}(1+\beta\vec{p}^{2})^{3}$ یک حالت کوانتومی قرار می‌گیرد، ولی اندازه سلولها با تغییر در تکانه ذرات متغیر است، به خصوص رابطه (۹) نشان می‌دهد که در تکانه‌های بزرگ عامل $\frac{1}{(1+\beta\vec{p}^{2})^{3}}$ مانع واگرایی انتگرالهایی می‌شود که بر روی تمام فضای فاز گرفته می‌شوند.

۳. ۱. تصحیح در جرم کوتولهٔ سفید

به عنوان یک نتیجه از تغییر در قضیه لیوویل در این قسمت محاسباتی را که برای به‌دست آوردن جرم حدی کوتوله‌های سفید انجام می‌گیرد را با عنصر جدید حجم فضای فاز انجام می‌دهیم.

یک مدل ساده برای کوتوله سفید، جرمی از مرتبه $10^{33}\,gr$ هلیوم در کره‌ای با چگالی $10^{7}\,gr/cm^{3}$ در دمای $10^{7}\,K$ است. در چنین دمایی انرژی بر ذره به گونه‌ای است که هلیوم را یونیده می‌کند. بنابراین از لحاظ ماکروسکوپی ستاره شامل N الکترون به جرم m و $\frac{N}{2}$ هسته هلیوم به جرم $4m_p$ است و جرم چنین توده‌ای برابر است با:

$$M=N(m+2m_p)\approx 2Nm_p$$

و چگالی الکترونها در این کره $n=\frac{N}{V}$، یا

$$n=\frac{M/2m_p}{M/\rho}=\frac{\rho}{2m_p}$$

است(ρ چگالی حجمی است). مرتبه تعداد الکترونها در یک کوتوله سفید، 10^{30} در یک سانتی‌متر مکعب است [۱۵]. تصحیح ناشی از فرض کمینه طول بر انرژی فرمی یک گاز فرمیونی N ذره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N=\frac{8\pi V}{h^{3}}\int_{0}^{p_f}p^{2}\,dp \qquad (10)$$

جمله تصحیحی ناشی از فرض کمینه طول:

$$N=\frac{8\pi V}{h^{3}}\int_{0}^{p_f}\frac{p^{2}}{(1+\beta p^{2})^{3}}dp\approx\frac{8\pi V}{h^{3}}\left(\frac{1}{3}p_f^{3}-\frac{3}{5}\beta p_f^{5}\right)$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$p_f\approx p_{f0}+\frac{3}{5}\beta p_{f0}^{3} \qquad ، \qquad p_{f0}=\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}h$$

که در آن p_{f0} اندازه حرکت فرمی در حالت عادی $(\beta=0)$ است. با $\beta\approx O(10^{-16})$ تصحیح در انرژی فرمی و تکانه فرمی ذره در یک گاز فرمیونی بسیار کوچک است و ما این تصحیح را در نظر نمی‌گیریم. انرژی نسبیتی و سرعت نسبیتی یک ذره با روابط زیر به دست می‌آید:

$$u=\frac{d\varepsilon}{dp} \qquad ، \quad \varepsilon=mc^{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^{2}}-1\right]$$

پس می‌توانیم مجموع انرژی جنبشی یک گاز فرمیونی(کوتوله سفید) و فشار (P) آن را با استفاده از رابطه (۹) به دست آوریم:

$$E=N\langle\varepsilon\rangle=\frac{8\pi V}{h^{3}}mc^{2}\int_{0}^{p_f}\frac{p^{2}\left(\sqrt{1+(\frac{p}{mc})^{2}}-1\right)}{(1+\beta p^{2})^{3}}dp \qquad (11)$$

$$P=\frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle pu\rangle=\frac{8\pi}{3h^{3}}mc^{2}\int_{0}^{p_f}\frac{\left(\frac{p}{mc}\right)^{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^{2}}}\frac{p^{2}\,dp}{(1+\beta p^{2})^{3}} \qquad (12)$$

مرسوم است که انرژی جنبشی و فشار گاز فرمی را به صورت توابعی از تکانه فرمی نشان دهند. با تعریف کمیتهای بدون بعد زیر:

$$x=\frac{p_f}{mc} \quad ، \quad x_0=\frac{p_{f0}}{mc}$$

خواهیم داشت:

$$E(x)=\frac{\pi V m^4 c^5}{3h^3}B(x)-\frac{\pi V m^6 c^7}{10 h^3}\beta D(x) \qquad (13)$$

$$P(x)=\frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}A(x)-\frac{\pi m^6 c^7}{h^3}\beta F(x) \qquad (14)$$

توابع $A(x)$ و $B(x)$ توابع چاندراسخار[۱] هستند که توسط وی برای بررسی مکانیک آماری کوتوله‌های سفید به دست آمده‌اند [۱۶]. ولی تابعهای $D(x)$ و $F(x)$ را ما از تصحیح روی چگالی حالتهای فضای فاز به‌دست آورده‌ایم که این توابع را در زیر می‌نویسیم.

$$A(x)=x\sqrt{x^2+1}\,(2x^2-3)+3\,Sinh^{-1}x$$
$$B(x)=8x^3\left\{\sqrt{x^2+1}-1\right\}-A(x)$$
$$D(x)=5A(x)-8x^5\left(6+5\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$F(x)=8x^5\sqrt{1+x^2}-5A(x)$$

از معادلات (۱۳) و (۱۴) می‌توان معادله حالت سیستم را به‌صورت تابعی از تکانه فرمی ذرات به دست آورد. توجه خود را به دو حالت زیر معطوف می‌کنیم:

۱- وقتی $\beta\to 0$. در حالت حدی $x\to 0$ که حالت غیر نسبیتی سیستم است، نسبت فشار به چگالی انرژی $\left(\frac{E}{V}\right)$ به سمت مقدار غیرنسبیتی $\frac{2}{3}$ میل می‌کند. ما نیز این نسبت را از روی حالت حدی توابع $A(x)$ ، $B(x)$ و $D(x)$ ، $F(x)$ مقدار $\frac{2}{3}$ به دست می‌آوریم.

۲- اما در حالت نسبیتی $x\to\infty$ ، رفتار چهار تابع فوق به صورت زیر است:

$$A(x)\approx 2x^4 \;,\quad B(x)\approx 6x^4 \;,\quad D(x)\approx -40x^6 ,\; F(x)=8^6$$

و برای نسبت فشار به چگالی انرژی به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{E(x)/V}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-24m^2c^2\beta x^6}{6x^4+12m^2c^2\beta x^6}=-2$$

می‌بینیم که به جای معادله حالت گاز فرمیونی نسبیتی که به‌صورت $PV=\frac{1}{3}E$ است، (وقتی $\beta=0$)، معادلهٔ حالت:

$$PV=-2E \qquad (15)$$

به‌دست می‌آید! منفی شدن طرف راست رابطه بالا به خاطر منفی شدن فشار در حد $x\to\infty$ است. باید دید که آیا سیستم به حالتی می‌رسد که با معادله حالت (۱۵) داده می‌شود.

اکنون با یک محاسبه نه چندان دقیق حالت تعادل این مدل برای کوتوله سفید را به‌دست می‌آوریم. برای این که پیکربندی گاز فرمیونی ما با چگالی n تشکیل شود نیاز به یک دیواره خارجی داریم تا فشار $P(n)$ را تحمل کند. با فشرده شدن یا منبسط شدن سیستم گازی بر روی سیستم کار انجام می شود یا سیستم کار انجام می‌دهد. اگر فرض کنیم که سیستم گازی ما در یک کره محبوس باشد، یک تغییر بی‌دررو در حجم V باعث تغییر در انرژی گاز می‌شود.

$$dE_P=P(n)dV=-P(R)4\pi R^2 dR\,.$$

در یک کوتوله سفید نیروی گرانشی نقش دیواره نگه‌دارنده را بازی می‌کند و تغییر در انرژی گرانشی ناشی از تغییر حجم با:

$$dE_g=\left(\frac{dE_g}{dR}\right)dR=\alpha\frac{GM^2}{R^2}dR\,,$$

داده می‌شود. که در آن M جرم کل گاز G ثابت گرانش و α عددی (از مرتبه یک) است که مقدار آن از تغییرات فضایی چگالی n در داخل کره ناشی می‌شود. در حالت تعادل پیکربندی داریم:

$$dE_g+dE_P=0\;\Rightarrow\;P(R)=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}\,. \qquad (16)$$

به این ترتیب یک رابطه بین شعاع و جرم کوتوله سفید (ستاره‌ای شامل فرمیونها) در حالت تعادل آن داریم. تابع $P(x)$ در رابطه (۱۴) داده شده است، رابطهٔ بین x و R را هم با تعاریف داده شده در ابتدای این بخش (و با فرض اینکه تصحیح β روی اندازه حرکت فرمی بسیار کوچک است $(x\approx x_\circ)$) به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$x=\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\hbar}{mcR}$$

با توجه به مقادیر زیر برای ستاره و جرم پروتون و طول موج کامپتون الکترون:

---

۱. Chandrasekhar

$$M\approx 10^{33}\,gr \quad , \quad m_p\approx 10^{-24}\,gr \quad , \quad \frac{\hbar}{mc}\approx 10^{-11}\,cm \ ,$$

x از مرتبه یک خواهد بود اگر $R\approx 10^{8}\,cm$ باشد. پس اگر $R\langle\langle 10^{8}\,cm$ باشد، خواهیم داشت $1\langle\langle x$. از مقادیر حدی $A(x)$ و $F(x)$ و معادله (۱۶) رابطه زیر را برای جرم و شعاع یک کوتوله سفید به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}(2x^4-2x^2)-\frac{\pi m^6 c^7}{h^3}\beta(8x^6-10x^4+10x^2)=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}\,.$$

از این معادله می‌توان یک حد مانند حد چاندراسخار برای جرم کوتوله‌های سفید به دست آورد. به عبارت دیگر حد چاندرا را با β تصحیح کرد. با این وجود با فرض بزرگترین مقدار برای β یعنی مقداری که در رابطه (۸) به‌دست آوردیم جمله دوم کوچک است و تصحیح روی حد چاندراسخار کوچکتر از یکصدم جرم خورشید است.

در نهایت این که ما مقدار فشار به ازای x معادل با شعاع حدی یک کوتوله سفید را محاسبه کردیم و مقدار فشار را مثبت به‌دست آوردیم. بنابراین معادله حالت (۱۵) مربوط به شعاعهای بیشتر از شعاع حدی است و قبل از آن که این معادله حالت برقرار شود ستاره رمبش کرده است. به عبارت دیگر چون در حد $x\to 1^-$ توابع $A(x)$ و $F(x)$ از نظر اندازه از مرتبه یک‌اند و چون ضریب $A(x)$ از ضریب $F(x)$ در معادله فشار بسیار بزرگتر است، مقدار فشار تا قبل از رمبش ستاره مثبت است.

۴. مکانیک کلاسیک کمینه تکانه

۴. ۱. مطالعه انحرافات مدار سیارات از مسئله کپلر با مکانیک کلاسیک کمینه تکانه

شکل دیگری از روابط جابه‌جاگری تغییر شکل یافته وجود دارد که در متون مربوط به مکانیک کوانتومی در فضای خمیده ظاهر می‌شوند و یک مقدار کمینه برای تکانه نتیجه می‌دهند. یک نوع اختلالی آنها شبیه به روابط عدم قطعیت کمینه طول به صورت زیر است :

$$[\hat{x}_i\ ,\ \hat{p}_j]=i\hbar(1+\alpha\,\hat{\vec{x}}^2)\delta_{ij}$$

$$[\hat{x}_i\ ,\ \hat{x}_j]=0$$

$$[\hat{p}_i\ ,\ \hat{p}_j]=-2i\hbar\alpha(\hat{x}_i\,\hat{p}_j-\hat{x}_j\,\hat{p}_i)\ .$$

با استفاده از این جابه‌جاگرهای اساسی، می‌توان مکانیک کوانتومی جدیدی ساخت که در آن اصل عدم قطعیت به گونه‌ای تصحیح شده است که یک مقدار کمینه غیر صفر برای اندازه‌گیری تکانه می‌دهد. واضح است که توابع موج برای فضای تکانه این مکانیک کوانتومی خوش‌تعریف نیستند زیرا این امکان وجود ندارد تا حالتی بسازیم که عدم قطعیت در اندازه‌گیری تکانه آن صفر باشد.

ما به بررسی این مکانیک کوانتومی نخواهیم پرداخت. در مقابل ما بر پایه این جابه‌جاگرها از عکس روش کوانتش دیراک کروشه پواسونهای زیر را می‌سازیم وتلاش می‌کنیم تا با استفاده از این حد نیمه کلاسیکی مقداری برای پارامتری که این جبر جدید را مشخص می‌کند بیابیم:

$$\{x_i\ ,p_j\}=(1+\alpha\,\vec{x}^2)\delta_{ij}\,,$$

$$\{x_i\ ,\ x_j\}=0\ \ ,$$

$$\{p_i\ ,\ p_j\}=-2\alpha(x_i\,p_j-x_j\,p_i)\,.$$

در مرجع [۱۹] با استفاده از رهیافت مشابهی از مکانیک کلاسیک براساس روابط عدم قطعیت کمینه طول توانسته‌اند مقداری برای کمیت β (پارامتری که جبرعدم قطعیت کمینه طول را مشخص می‌کند) بیابند.

با جبرکمینه تکانه که در بالا تعریف شد تعریف کروشه پواسون برای ارضای شرایط چهارگانه (پاد تقارنی، خطی بودن، اتحاد لایب نیتز و اتحاد ژاکوبی) به صورت

$$\{A,B\}=\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right),$$

$$\{x_i,p_j\}+\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\{p_i\ ,\ p_j\},$$

تعمیم می‌یابد. در پیوست ثابت می‌کنیم که مولدهای چرخش برای جبر جدیدمان با

$$L_{ij}=\frac{x_i\,p_j-x_j\,p_i}{1+\alpha\,\vec{x}^2}\qquad ,$$

داده می‌شود. اکنون معادلات حرکت ذره در پتانسیل نیروی مرکزی را که با هامیلتونی

$$H=\frac{\vec{p}^{۲}}{۲m}+V(r)\ \ ,\ \ r=\sqrt{x_i x_i}\ \ ,$$

توصیف می‌شود به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_i=\{x_i\ ,H\}=(۱+\alpha\,\vec{x}^{۲})\frac{p_i}{m}\ ,$$

$$\dot{p}_i=\{p_i\ ,H\}=-(۱+\alpha\,\vec{x}^{۲})(\frac{\partial V}{\partial x_i}+۲\alpha\,L_{ij}\,\frac{p_j}{m})\ .$$

$L^{۲}$ و L_{ij} ثابت حرکت‌اند، بنابراین حرکت ذره به حرکت در یک صفحه محدود می‌شود. با استفاده از روابط

$$L^{۲}=\frac{۱}{۲}L_{ij}\,L_{ij}=\frac{\vec{r}^{۲}\,\vec{p}^{۲}-(\vec{r}\,.\vec{p})^{۲}}{(۱+\alpha\,\vec{r}^{۲})}\ ,$$

$$r\,p_r=\vec{r}\,.\vec{p}=\sqrt{\vec{r}^{۲}\,\vec{p}^{۲}-L^{۲}\,(۱+\alpha\,\vec{r}^{۲})}\ ,$$

$$r=\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲}\ \ ,\ \ \varphi=\tan^{-۱}\left(\frac{x_۲}{x_۱}\right),$$

معادلات حرکت در دستگاه قطبی را به‌دست می‌آوریم:

$$\dot{\varphi}=\frac{L}{mr^{۲}}(۱+\alpha\,r^{۲})^{۲}\ ,$$

$$\dot{r}=\frac{۱+\alpha\,r^{۲}}{m}\sqrt{۲m(E-V)-\frac{L^{۲}}{r^{۲}}(۱+\alpha\,r^{۲})^{۲}}\ .$$

بنابراین معادله دیفرانسیل مسیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{L(۱+\alpha\,r^{۲})}{r^{۲}}\,\frac{۱}{\sqrt{۲m(E-V)\,-\,\frac{L^{۲}}{r^{۲}}(۱+\alpha\,r^{۲})^{۲}}}\ .$$

با پتانسیل کولمب $(-\frac{k}{r})$ اختلالی کـه بـا پـارامتر α مشـخص می‌شود، مدار بستهٔ غیر اختلالی با معادلهٔ

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{R}(۱+eCos\varphi)\ \ ,\ \ \frac{۱}{R}=\frac{mk}{L^{۲}}\ \ ,\ e=\sqrt{۱+\frac{۲EL^{۲}}{mk^{۲}}}\ ,$$

را تبدیل به یک مدار باز می‌کند که نقطه حضیض آن در هر دور به اندازه

$$\Delta\varphi^{(۱)}=۴m\alpha\frac{\partial}{\partial L}(\ \int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{r^{۲}\,(E+\frac{k}{r})}{\sqrt{۲m(E+\frac{k}{r})\,-\frac{L^{۲}}{r^{۲}}}}\ )\ ,$$

حرکت تقدیمی دارد. با قرار دادن معادله مسیر غیر اختلالی در انتگرال بالا، $\Delta\varphi$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\Delta\varphi^{(۱)}=\frac{\pi\alpha}{۲}\sqrt{\frac{-۲E}{m}}\,\frac{kL}{E^{۲}}\ .$$

در اینجا فرض زیر را به کار می‌گیریم:

$$\Delta\varphi^{(۱)}\leq\left|\Delta\varphi_{obs}-\Delta\varphi_{GR}\right|,$$

که به معنای این است که آنچه از حرکت تقدیمی سـیاره را کـه نظریه نسبیت عام قادر به پـیش بینـی آن نیسـت، مـا بـا فـرض جدیدمان (مکانیک کلاسـیک بـا فـرض کمینـه تکانـه) توضـیح می‌دهیم. به بیان دیگر پارامتری که مکانیک کلاسیک کمینه طول را مشخص می‌کند به قدری کوچک است که $\Delta\varphi$ ناشـی از آن برای یک سیاره در منظومه شمسی از مقداری که مشـاهده شـده و مقداری که نظریه نسبیت عام پیش‌بینی می‌کند کمتر اسـت. بـا این فرض و با استفاده از داده‌هایی که برای داخلیترین مدار سیاره‌ای در منظومه شمسی وجود دارد، یک حد بالا برای α به دست می‌آوریم:

$$\Delta\varphi^{(۱)}=۲/۰۶\times۱۰^{۲۲}\,\alpha\quad\Rightarrow\quad\alpha=۳/۶\times۱۰^{-۳۳}\ m^{-۲}\ .$$

۴. ۲. تصحیح قانون سوم کپلر

همچنین می‌توانیم انحراف از قـانون سـوم کپلـر در اثـر روابـط کمینه تکانه را به دست آوریم. در مرجـع [۲۰] تصـحیح قـانون سوم کپلر ناشی از روابط عدم قطعیت کمینه طول به کار گرفتـه شده است تا با استفاده از آن شکل منحنی چرخنده گازهای بین ستاره‌ای و ستاره‌ها در کهکشانهای مارپیچی را توضیح دهند. بـا تعمیم روش به‌کار گرفته شده در مرجع [۲۰]، به حالـت کمینـه تکانه در ادامه تصحیح قانون سوم کپلر را با فرض کمینه تکانـه، به دست می‌آوریم.

برای حرکت در یک مدار دایره‌ای با دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{\omega}$ خواهیم داشت:

$$\dot{r}=۰\Rightarrow p^{۲}=\frac{L^{۲}}{r^{۲}}\,(۱+\alpha\,r^{۲})^{۲}\ ,$$

$$\dot{\varphi}=\omega=\frac{L}{mr^{۲}}\,(۱+\alpha\,r^{۲})^{۲}\ ,$$

$$\dot{p}_r=۰\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{p_i\,x_i}{r}\right)=۰\Rightarrow mr\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{L^{۲}}{r^{۲}}\ ,$$

جدول ۱. مقایسه مقادیر تجربی انحراف از قانون سوم کپلر، با کار حاضر برای سیارات منظومه شمسی

سیاره	مشاهده $\left(\frac{r^{3}}{T^{2}}\frac{4\pi^{2}}{GM(r)}-1\right)$	پیش‌بینی توسط $(4\frac{GM}{4\pi^{2}}\alpha r^{2})$
ناهید	-1×10^{-6}	$1/7\times10^{-10}$
زمین	3×10^{-6}	$3/3\times10^{-10}$
مریخ	-6×10^{-5}	$7/6\times10^{-11}$
مشتری	1×10^{-3}	$8/9\times10^{-9}$
کیوان	4×10^{-4}	$3/0\times10^{-8}$
اورانوس	1×10^{-3}	$1/2\times10^{-7}$
نپتون	1×10^{-3}	$3/0\times10^{-7}$

و به این ترتیب قانون سوم کپلر را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$mr^{2}\omega^{2}=(1+\alpha r^{2})^{4}\ \ mr\frac{\partial V}{\partial r}\quad ,$$

و تا تقریب مرتبه اول α داریم:

$$\frac{r^{3}}{T^{2}}=\frac{GM}{4\pi^{2}}\,(1+4\alpha r^{2})\ \ .$$

می‌بینیم که میزان انحراف با افزایش شعاع مدار افزایش می‌یابد. در جدول ۱ انحرافها را برای مدار سیارات منظومه شمسی محاسبه کرده‌ایم وآن را با مقادیر تجربی مقایسه کرده‌ایم.

با مقایسه مقادیر در جدول ۱، دیده می‌شود که این اثر کوچکتر از آن است که با مشاهدات در منظومه شمسی قابل تأیید باشد و انحرافی که ما در اینجا از قانون سوم کپلر پیش‌بینی کردیم توسط اثرهای دیگر (مثل تأثیر متقابل سیارات بر مدار یکدیگر) پوشیده می‌شود. با این حال ما یک پیشنهاد برای کاربرد این مکانیک کلاسیک تصحیح شده و نظریه‌های کلاسیکی نظایرآن را در زیر ارئه می‌دهیم [۱۷].

v سرعت چرخشی یک ستاره در فاصله از مرکز یک کهکشان مارپیچی به صورت $v\propto r^{-\frac{1}{2}}$ است، که شکلی دیگر از قانون سوم کپلر است. به این قانون برای چرخش، چرخش کپلری می‌گویند.

اما چرخش کپلری در کهکشانهای مارپیچی دیده نشده بلکه یک منحنی صاف برای چرخش ستاره‌ها با افزایش فاصله از مرکز دیده شده است:

$$v=const\Rightarrow M(r)\propto r$$

نظریه‌های مختلفی برای توجیه این موضوع ارائه شده است (مثل نظریه ماده تاریک). یکی از این ایده‌ها نظریه پدیده‌شناسی موند[1] است [۱۸] که توسط میلگروم[2] و دیگران با مطالعه روی داده‌های اخترشناسی ارائه شد. اساس این نظریه بیان می‌کند که قانون دوم نیوتن در شتابهای کم به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$F\approx m\frac{|\ddot{x}|}{a_{0}}\ddot{x},(\ddot{x}\langle\langle a_{0}\approx10^{-10}(m/s^{2}))$$

از آنجا که مکانیک کلاسیکی که ما در این تحقیق به دست آوردیم به نوعی قانون سوم کپلر را تصحیح می‌کند، پیدا کردن ارتباط بین این تقریب نیمه کلاسیکی و نظریه پدیده‌شناسی موند می‌تواند زمینهٔ تحقیقات بعدی در این راستا باشد.

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق ما به بررسی جنبه‌های نیمه‌کلاسیکی روابط عدم قطعیت کمینه طول و کمینه تکانه پرداختیم. هدف ما یافتن آثاری مشاهده‌پذیر از این روابط بود. روابط جابه‌جاگری تعمیم

---

۱. MOND (Modified Newtonian Dynamics)

۲. Milgrom

یافته در اصل نتایجی از نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی هستند که هنوز امکان تجربی برای تحقیق آنها وجود ندارد. از این طریق ما با استفاده از بررسی اثر فرض کمینه طول بر روی ترازهای اتم هیدروژن و داده‌های تجربی، یک حد بالا برای طول کمینه به‌دست آوردیم. ما همچنین با استفاده از مکانیک آماری با کمینه طول، معادله چاندراسخار برای جرم حدی کوتوله‌های سفید را تصحیح کردیم و در نهایت با استفاده از مکانیک کلاسیک کمینه تکانه، حدی برای کمینه تکانه یافتیم واثر کمینه تکانه بر قانون سوم کپلر را به دست آوردیم.

پیوست

ثابت می کنیم که در مکانیک کلاسیک با کمینه تکانه، مولدهای چرخش به‌صورت زیر هستند:

$$L_{ij} = \frac{x_i p_j - x_j p_i}{1+\alpha \vec{x}^2} \qquad (\text{پ}-1)$$

داریم:

$$\{x_k, L_{ij}\} = \{x_k, x_i\}\frac{p_j}{1+\alpha \vec{x}^2} + \{x_k, \frac{p_j}{1+\alpha \vec{x}^2}\}x_i - (i \leftrightarrow j)$$

جملات اول و سوم به دلیل: اتحاد لایب‌نیتز،

$$\{x_i, x_j\} = 0\,, \qquad (\text{پ}-2)$$

حذف می‌شوند پس

$$\{x_k, L_{ij}\} = \{x_k, p_j\}\frac{x_i}{1+\alpha \vec{x}^2} + \{x_k, \frac{1}{1+\alpha \vec{x}^2}\}p_j x_i - (i \leftrightarrow j)\,.$$

جملات دوم وچهارم باز به دلیل (پ-۲) صفر می‌شوند. از کروشه اساسی:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}(1+\alpha \vec{x}^2) \qquad (\text{پ}-3)$$

خواهیم داشت:

$$\{x_k, L_{ij}\} = x_i \delta_{kj} - x_j \delta_{ki} \qquad (\text{پ}-4)$$

همچنین برای تکانه‌ها داریم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = \{p_k, x_i\}\frac{p_j}{1+\alpha \vec{x}^2} + \{p_k, \frac{p_j}{1+\alpha \vec{x}^2}\}x_i - (i \leftrightarrow j)$$

اتحاد لایب‌نیتز،

با استفاده از (پ-۳) برای جملات اول و سوم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = -p_j \delta_{ki} + \{p_k, p_j\}\frac{x_i}{1+\alpha \vec{x}^2} + \{p_k, \frac{1}{1+\alpha \vec{x}^2}\}x_i p_j - (i \leftrightarrow j)$$

با استفاده از :

$$\{p_i, p_j\} = -2\alpha(x_i p_j - x_j p_i) \qquad (\text{پ}-5)$$

برای جملات دوم وپنجم وتعریف کروشه پواسون برای جملات سوم وششم خواهیم داشت:

$$\{p_k, L_{ij}\} = -p_j \delta_{ki} + p_i \delta_{kj} - 2\alpha(x_j L_{ki} - x_i L_{kj}) - 2\alpha \frac{x_k L_{ij}}{1+\alpha \vec{x}^2}\,,$$

و اگر جمله آخر را تا مرتبه اول بسط دهیم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} - 2\alpha(x_j L_{ki} - x_i L_{kj}) - 2\alpha\, x_k L_{ij} + O(\alpha^2)$$

و در نهایت:

$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} - 2\alpha x_k (L_{ij} + L_{ji}) + O(\alpha^2),$$
$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} + O(\alpha^2). \qquad (\text{پ}-6)$$

به این ترتیب با توجه به روابط (پ-۴) و(پ-۶) دیده می‌شود که مولدهای تعریف شده در (پ-۱) تا مرتبه اول پارامتر تغییر شکل دهنده کروشه‌ها مولدهای چرخش هستند.

مراجع

1. G Amelino-Camelia, *physics*/0311037 (2003).
2. G Amelino-Camelia, T Piran, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 03600*;* astro-ph/0008107.
3. G Amelino-Camelia, *Nature,* **408** (2000) 661.
4. G Amelino-Camelia, *Int. J. Mod. Phys. D* **11** (2002)35; gr-qc/0012051.
5. G Amelino-Camelia, *Nature*, **418** (2002); gr-qc/0207049.
6. D J Gross and P F Mende, *Nucl. Phys. B* **303** (1988) 407.
7. M Maggiore, *Phys. Lett. B* **304** (1993).
8. M Maggiore, *Phys. Lett. B* **319** (1993)83-86; hep-th/ 9309034.
9. A Kempf, G Mangano and R B Mann, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1108-1118; hep-th/9412167
10. F Brau, *J. Phys. A* **32** (1999) 7691-7696; quant-ph/9905033.
11. R Akhoury and Y P Yao, *Phys. Lett. B* **572**(2003)37-42 hep-ph/ 0302108.

12. M Niering, et al., *Phys. Rev. Lett* **84** (2000) 5496.
13. L N Chang, et al, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 125027; hep-th/0111181.
14. L N Chang, et al., *Phys. Rev. D* **65** (2002) 125028; hep-th/0201017.
15. R K Pathria, "*Statistical Mechanics*" Oxford England: Pergamon Press (1988).
16. S Chandrasekhar, *"Introduction to the Study of Stellar Structure"* University of Chicago Press, Chicago (1939).
۱۷. مهدی دهقانی، "مطالعه نیمه کلاسیکی..."،پایان‌نامه کارشناسی ارشد ،دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۸۲).
18. E Battaner, E Florido, *Fund. Cosmic Phys.* **21** (2000) 1-154; astro-ph/0010474.
19. S Benczik, et al., *Phys. Rev. D* **66** (2002) 026003; hep-th (2002).
20. S Benczik, et al., hep-th/0209119 (2002).