

یادداشتی بر دوگانی AdS/CFT

الهام بیگلر^۱ و فرهنگ لoran^۲

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

اصفهان - کدپستی ۸۴۱۵۶ ایران

پست الکترونیکی: ۱. elh_biglar@ph.iut.ac.ir۲. loran@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۳/۹/۲۴ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۴/۳/۱۷)

چکیده

در این مقاله دوگانی نظریه‌های میدان در فضاهای R^{d+1} و AdS_{d+1} اقلیدسی را برای میدانهای آزاد نرده‌ای و برداری بررسی می‌کنیم. در مورد میدانهای نرده‌ای، نگاشت یک به یک بین میدانهای نرده‌ای بی جرم با جفت‌شدگی همدیس در دو فضا را مرور می‌کنیم. در مورد میدانهای برداری نشان می‌دهیم که چنین نگاشتی تنها در چهار بعد برقرار خواهد بود. با استفاده از این نگاشتها و همدیسی فضای AdS_{d+1} اقلیدسی و نیم‌فضای R^{d+1} یک تعبیر از تطابق AdS/CFT بر حسب رابطه‌ای بین جوابهای معادله حرکت و مقادیرهای اولیه آنها ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: دوگانی AdS/CFT، نظریه میدان در ابعاد بالاتر

۱. مقدمه

روی مرز ناحیه به دست آورد. به عبارت دیگر یک نظریه کوانتومی شامل گرانش در داخل حجم فضا، با یک نظریه مرزی بدون گرانش معادل است [۱]. یکی از شواهد درستی اصل هولوگرافی، دوگانی یافت شده بین فیزیک فضای AdS و فیزیک روی مرز آن است [۲، ۳]. فضای AdS_{d+1} با متریک $ds^2 = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{i=0}^d (dx_i)^2 \right)$ در S^d در $x^0 = 0$ است، که هم‌ارز یک صفحه اقلیدسی R^d به علاوه یک نقطه در بی‌نهایت می‌باشد. متریک القایی مرز AdS را تا حد یک ضریب می‌توان تعیین کرد، بنابراین نظریه فیزیکی روی این مرز یک

مطابق قانون دوم ترمودینامیک آنتروپی ماده و نیز سیاه‌چاله‌ها در طی فرایندهای فیزیکی کاهش نمی‌یابد. این قانون به اصل هولوگرافی منجر می‌شود که رابطه‌ای است بین اطلاعات و هندسه و یا آنتروپی و سطح افق رویداد. در سال ۱۹۷۴ استفن هاکنینگ نشان داد که آنتروپی یک سیاه‌چاله از رابطه $S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A$ پیروی می‌کند. که A سطح افق رویداد سیاه‌چاله، \hbar ثابت پلانک، k ثابت بولتزمن، G ثابت گرانشی نیوتن، c سرعت نور و S آنتروپی است. این رابطه بیان می‌کند که گرانش کوانتومی رفتار هولوگرافی دارد. بدین معنا که اطلاعات در مورد حالات کوانتومی در یک ناحیه از فضا - زمان را می‌توان با استفاده از اطلاعات

است که

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

می‌دانیم که در فضای $d + 1$ بعدی اقلیدسی با متریک $(ds^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2)$ ، یک میدان اسکالر بی‌جرم ϕ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$(\partial_t^2 + \nabla^2)\phi = 0. \quad (5)$$

بنابراین $\Phi = t^\alpha \phi$ با جرم $m^2 = \frac{1-d^2}{4}$ حلی از معادله (۳) خواهد بود. از آن جا که $0 < m^2 < \frac{d^2}{4}$ است این حل در فضای AdS_{d+1} پایدار است. $\Phi(x, t)$ میدان فضای اقلیدسی هستند. به تعبیری یک نظریه میدان بی‌جرم نرده‌ای در فضای اقلیدسی دوگان نظریه نرده‌ای جرم‌دار با جرم $m^2 = \frac{d^2-1}{4}$ در فضای AdS است. ما در این جا کنش مرزی (۱) را با جایگذاری جواب معادلات حرکت بر حسب شرایط اولیه $\phi(x, 0)$ در کنش میدان نرده‌ای در فضای R^{d+1}

$$I[\phi] = \frac{1}{4} \int dt d^d x \left((\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 \right), \quad (6)$$

به دست می‌آوریم [۶، ۵]. یک حل کلی برای معادله حرکت $(\partial_t^2 + \nabla^2)\phi = 0$ که در حد $t \rightarrow \infty$ صفر شود، به صورت زیر است.

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\phi}(k) e^{ik \cdot x} e^{-\omega t}, \quad (7)$$

که $\omega = |k|$

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{1}{V} \int d^d x \phi_0(x) e^{-ik \cdot x}. \quad (8)$$

همان طور که گفته شد $\phi_0(x)$ مقدار اولیه میدان روی صفحه $t = 0$ است. با قرار دادن معادله (۸) در معادله (۷) خواهیم

نظریه همدیس است [۴]. بین این مرز و صفحه $t = 0$ فضای اقلیدسی با متریک $ds^2 = \left(\sum_{i=0}^d (dx_i)^2 \right)$ نگاهت یک‌به‌یک و همچنین بین دو فضای اقلیدسی و AdS یک رابطه همدیس $(g_{\mu\nu} = \frac{1}{t^2} \eta_{\mu\nu})$ وجود دارد، پس انتظار می‌رود فیزیک در این دو فضا هم‌ارز باشد. با استفاده از تطابق AdS/CFT می‌دانیم که نظریه دوگان روی مرز $x^0 = 0$ یک نظریه همدیس با کنش غیر موضعی زیر است [۴]

$$I[\phi] = \int d^d y d^d z \frac{\phi_0(y) \phi_0(z)}{|y-z|^{2(d-\alpha_-)}}, \quad (1)$$

α_- کوچکترین ریشه معادله $m^2 = \alpha(\alpha - d)$ و ϕ_0 تابعی روی مرز است که در حد $t \rightarrow 0$ $\Phi(\vec{x}, t) \sim t^{\alpha_-} \phi_0$ می‌باشد.

به دلیل یکرختی مرز فضای AdS و صفحه $t = 0$ فضای اقلیدسی، ما به دنبال تعبیری برای کنش مرزی (۱) و همچنین توابع ϕ_0 در فضای اقلیدسی هستیم. برای به دست آوردن کنش مرزی در فضای اقلیدسی ابزاری به جز حل معادله حرکت و محاسبه کنش بر حسب مقادیر اولیه میدان وجود ندارد. با محاسبه این کنش نشان خواهیم داد که ϕ_0 فضای AdS چیزی جز مقدار اولیه میدان فضای اقلیدسی داده شده در $t = 0$ نیست.

در این مقاله در بخش دوم میدانهای نرده‌ای و دوگانی موجود بین آنها در فضای اقلیدسی و AdS بررسی می‌گردد. در قسمت سوم به مطالعه میدانهای برداری خواهیم پرداخت. در بخش چهارم خلاصه مطالب گفته شده را می‌آوریم.

۲. میدانهای نرده‌ای

معادله حرکت برای میدانهای آزاد جرم‌دار نرده‌ای در فضای AdS_{d+1} اقلیدسی با متریک،

$$ds^2 = \frac{1}{t^2} \left(dt^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2 \right), \quad (2)$$

به صورت

$$(t^2 \partial_t^2 + (1-d)t \partial_t + t^2 \nabla^2 - m^2)\Phi = 0, \quad (3)$$

جمله m^2 در معادله (۳) را می‌توان به عنوان ضریب جفت‌شدگی همدیس تعبیر کرد. این ضریب در مورد AdS_{d+1} ، $\frac{d^2-1}{4}$ است.

بنابراین $F(x) = c \cdot |x|^{-(d+1)}$ با استفاده از نتایج فوق برای

$F(x)$ ، کنش (۱۲) به شکل

$$I[\phi] = c \cdot \int d^d y d^d z \frac{\phi_0(y)\phi_0(z)}{|y-z|^{d+1}}, \quad (16)$$

درمی آید. با شرط $m^2 = \frac{1-d^2}{4}$ ، در رابطه (۱)، $\alpha_- = \frac{1-d}{4}$ به دست می آید که با این شرط، دو کنش (۱) و (۱۶) برابر خواهند بود.

در اینجا ضریب c در کنش (۱۶) را برای حالت خاص $d=3$ یعنی فضای چهار بعدی به دست می آوریم. اگر عبارت (۹) را در معادله (۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\int (\omega^2 - k^2) \phi_0(y) e^{-\omega t} e^{ik \cdot (x-y)} d^3 y d^3 k = 0. \quad (17)$$

معادله بالا نتیجه زیر را در برخواهد داشت

$$(\omega^2 - k^2) = 0. \quad (18)$$

با قرار دادن حل معادله حرکت، یعنی عبارت (۹) در کنش (۶) به معادله زیر خواهیم رسید

$$I[\phi] = \frac{1}{2V(2\pi)^3} \int \frac{\omega^2 + k^2}{2\omega} e^{ik \cdot (z-y)} \phi_0(y) \phi_0(z) d^3 k d^3 y d^3 z. \quad (19)$$

با استفاده از شرطی که بین k و ω در معادله (۱۸) به دست آمد، برای عبارت کنش داریم

$$I[\phi] = \int F(z-y) \phi_0(y) \phi_0(z) d^3 y d^3 z, \quad (20)$$

که

$$F(z-y) = \frac{1}{2V(2\pi)^3} \int \omega e^{ik \cdot (z-y)} d^3 k$$

$$= \frac{1}{V(2\pi)^3} \int \frac{k^2}{|z-y|} \sin(k|z-y|)$$

$$= \frac{1}{V(2\pi)^3} |z-y| \left(\frac{2-k^2|z-y|^2}{|z-y|^3} \cos k|z-y| \right)$$

باید توجه داشت که تابع دلتای دیراک هم شرط (۱۴) را برآورده می سازد منتها ما برای نوشتن کنش انتظار داریم که $F(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد.

داشت

$$\phi(x, t) = \int d^d y G(x, t, y) \phi_0(y), \quad (9)$$

که

$$G(x, t, y) = \frac{1}{V(2\pi)^3} \int d^d k e^{-\omega t} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (10)$$

$G(x, t, y)$ حلی از معادله موج است، یعنی $\square G = 0$ که دارای شرط اولیه $G(x, t, y)$ می باشد. برای به دست آوردن کنش روی سطح $t=0$ باید معادله (۹) را در معادله (۶) قرار داد. اما بهتر است در ابتدا کنش (۶) را به شکل زیر بازنویسی کنیم تا شکل کلی آن در $d+1$ بعد به دست آید. در ادامه برای حالت خاص $d=3$ کنش مرزی را از راه قرار دادن حل معادله حرکت محاسبه می کنیم

$$I[\phi] = -\frac{1}{4} \int d^{d+1} x \phi \square \phi - \frac{1}{4} \int d^d x \phi_0(x) \partial_t \phi_0(x). \quad (11)$$

این رابطه با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و با فرض اینکه در $t \rightarrow \infty$ و بی نهایت فضایی، $\phi(x)$ صفر می شود، به دست آمده است. حال با قرار دادن رابطه (۹) در (۱۱) جمله اول به طور بدیهی صفر خواهد شد و برای جمله دوم داریم

$$I[\phi] = \frac{1}{4} \int d^d y d^d z \phi_0(y) \phi_0(z) F(y-z), \quad (12)$$

که

$$F(x) = \int d^d k \omega e^{ik \cdot x}. \quad (13)$$

چون $F(x)$ تحت دوران ناورداست ($x \rightarrow Rx, R \in SO(d)$) بنابراین $F(x)$ فقط به اندازه x وابسته است. با مقیاس کردن x با فاکتور $\lambda > 0$ می توان نشان داد که

$$F(\lambda x) = \lambda^{-(d+1)} F(x), \quad (14)$$

و در نتیجه

$$x \cdot \nabla F(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{F(\lambda|x|) - F(|x|)}{\lambda - 1} = -(d+1)F(|x|). \quad (15)$$

۳. میدانهای برداری

ابتدا معادله پروکا که معادله حرکت میدانهای برداری است را در فضای AdS_{d+1} می نویسیم. رابطه متریک این دو فضا به صورت زیر می باشد که یک رابطه همدیس است.

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\ell^2} \eta_{\mu\nu}, \quad (23)$$

که $g_{\mu\nu}$ متریک فضای AdS و $\eta_{\mu\nu}$ متریک فضای اقلیدسی است. ما در این بخش اندیسههای فضا-زمانی (چهار برداری) را با حروف یونانی مثل μ, ν و اندیسههای فضایی را با حروف لاتین مثل i, j نشان می دهیم. لاگرانژی مولد معادله حرکت پروکا به صورت زیر تعریف می گردد،

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} m^2 A^2. \quad (24)$$

با استفاده از کنش ناوردای $I = \int \mathcal{L} \sqrt{g} d^d x$ پذیرفتن اصل کمترین کنش و معادلات اولر به معادله حرکت زیر می رسیم

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu} \sqrt{g}) - m^2 A^\nu \sqrt{g} = 0. \quad (25)$$

با اثر دادن ∂_ν روی معادله بالا خواهیم داشت

$$\partial_\nu \partial_\mu (F^{\mu\nu} \sqrt{g}) = m^2 \partial A^\nu \sqrt{g}. \quad (26)$$

که با استفاده از معادله بالا می توان شرط لورنتس در حالت کلی (فضای خمیده) را به دست آورد

$$\partial_\nu (A^\nu \sqrt{g}) = 0. \quad (27)$$

می توان نشان داد که این رابطه همان $D_\nu A^\nu = 0$ است که D_ν نماد مشتق همورداست [۷].

\sqrt{g} در فضای $AdS_{(d+1)}$ به صورت

$$\sqrt{g} = t^{-(d+1)}, \quad (28)$$

تعریف می شود. با جایگذاری رابطه (۲۸) و با استفاده از تعریف $g_{\mu\nu}$ ، معادله (۲۵) به صورت

$$\partial_\mu (t^{-d-1} t^4 F_{\mu\nu}) - m^2 t^{-d-1} t^2 A_\nu = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{\Upsilon k \sin k|z-y|}{|z-y|^2} \right)_{k=0}^{k=\infty} \\ & = \frac{-\Upsilon}{V(\Upsilon\pi)^2 |z-y|^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

برای به دست آوردن عبارت آخر از قضیه ریمان استفاده شده است. با قرار دادن معادله بالا در عبارت کنش خواهیم داشت

$$I[\phi] = \frac{-\Upsilon}{V(\Upsilon\pi)^2} \int \frac{\phi_0(y)\phi_0(z)}{|z-y|^4} d^d y d^d z. \quad (22)$$

که در توافق با رابطه (۱۶) است.

البته باید توجه داشت که این محاسبات برای میدانهای بی جرم انجام شده است. زیرا به سادگی می توان نشان داد که در R^{d+1} نظر گرفتن $\Phi = t^{\frac{d-1}{4}} \phi$ برای میدانهای نرده ای جرم دار در امکان پذیر نیست. یک دلیل برای این مطلب این است که معادله حرکت میدانهای نرده ای جرم دار یعنی $(\square + m^2)\phi = 0$ هموردای همدیس نیست، مگر اینکه $m = 0$ باشد. در واقع اگر یک طول مشخصه در مسئله وجود داشته باشد، نظریه تحت باز مقیاس بندی هموردا نیست.

همان طور که دیدیم در تطابق AdS/CFT میدانهای $\Phi(x, t)$ به میدانهایی میل می کنند که در حد $t \rightarrow 0$ $\Phi(x, t) \sim t^{\frac{(d-1)}{4}} \phi_{AdS}$ خواهد بود. همچنین $\Phi_{AdS} = t^{\frac{(d-1)}{4}} \phi_E$ نیز حلی از معادله حرکت برای میدانهای نرده ای در فضای اقلیدسی بود که ϕ_E دارای مقدار اولیه ϕ_0 روی مرز $t = 0$ است. با مقایسه این دو رابطه می توان نتیجه گرفت که ϕ_{AdS} همان ϕ_0 های اقلیدسی، یعنی مقدار اولیه میدانها در صفحه $t = 0$ هستند. با مطالعه این رهیافت به یک تعبیر برای رابطه AdS/CFT رسیدیم، به صورتی که می توان آنرا ارتباطی بین حل معادله حرکت و شرایط اولیه دانست. این روش برای اسپینورها نیز بررسی شده است [۸]. ما در ادامه به بررسی میدانهای برداری خواهیم پرداخت. همان طور که خواهیم دید، برخلاف میدانهای نرده ای که در تمام ابعاد، دوگانی دیده شد، این دوگانی محدود به بعد خاصی می شود.

یا به شکل واضح تر

$$(-d + 3 + 2\alpha)\partial_\nu B_i - (-d + 3 + \alpha)\partial_i B_\nu = 0. \quad (36)$$

$$(\alpha(-d + 3 + \alpha - 1) - m^2) B_i = 0. \quad (37)$$

اگر بخواهیم یک دوگانی بین دو فضا وجود داشته باشد باید تعداد درجات آزادی در دو نظریه یکسان باشد. در یک نظریه بی جرم در فضای $d + 1$ بعدی $d - 2$ درجه آزادی و برای نظریه جرم دار $d - 1$ درجه آزادی وجود دارد. از معادله (۳۵) مشخص است که بردارهای اقلیدسی B_ν بی جرمند. یعنی نظریه میدان فضای اقلیدسی پیمانه‌ای است. بنابراین باید نظریه دوگان در فضای AdS هم بی جرم باشد تا تعداد درجات آزادی در دو نظریه یکی باشد. پس در (۳۷) جرم مساوی صفر است. از محاسبه بُعد مقیاسی میدانها $\alpha = \frac{d-2}{4}$ به دست می‌آید. با دو شرط $\alpha = \frac{d-2}{4}$ و $m = 0$ ، دو مقدار برای d خواهیم داشت. $d = 3$ و یا $d = 1$. یعنی فقط در فضای دو بعدی و چهار بعدی می‌توان دوگانی بین فضای اقلیدسی و AdS یافت.

برای حالت $\nu = 0$ از معادلات (۳۲)، (۳۳) و (۳۴) داریم

$$\partial_i \partial_i B_\nu - \partial_\nu \partial_i B_i = 0, \quad (38)$$

$$\alpha \partial_i B_i = 0, \quad (39)$$

$$m^2 B_\nu = 0. \quad (40)$$

از $\nu \neq 0$ دو شرط $m = 0$ و $\alpha = \frac{d-2}{4}$ را به دست آوردیم که باید با معادلات به دست آمده از حالت $\nu = 0$ سازگار باشند.

معادله (۳۸) یک معادله حرکت برای B_μ ها است که جمله جرمی در آن نیست که نشان می‌دهد $m = 0$ است. معادله (۴۰) نیز با شرط $m = 0$ سازگار است. معادله (۳۹) با شرط $d = 3$ سازگار است، اما نشان می‌دهد که برای اینکه در فضای ۲ بعدی یعنی $d = 1$ دوگانی بین فضای اقلیدسی و AdS دوگانی داشته باشیم، باید در پیمانه $\partial_i B_i = 0$ باشیم. که این پیمانه در فضای دو بعدی نشان می‌دهد که میدان B به مکان وابسته نیست و فقط تابعی از زمان است که چنین نظریه‌ای خیلی با معنی

$$(-d + 3)tF_{\nu\sigma} + t^2 \partial_\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu = 0. \quad (30)$$

در می‌آید. در این رابطه دیگر اندیسهای μ, ν با متریک تخت $\eta_{\mu\nu}$ بالا و پایین می‌شوند. مثل حالت نرده‌ای، حلی مانند $A_\nu = t^\alpha B_\nu$ برای معادله (۳۰) در نظر می‌گیریم. که البته α را می‌توان با حساب کردن (بُعد مقیاسی) میدان در کنش ناوردا به دست آورد. در این صورت خواهیم داشت

$$t^{\alpha+2} [\partial_\nu^2 B_\nu + \nabla^2 B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma^2 B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma \partial_i B_i - \partial_\nu \partial_\sigma B_\sigma (1 - \delta_{\nu\sigma}) - \partial_\nu \partial_i B_i (1 - \delta_{\nu\sigma})] + t^{\alpha+1} [(-d + 3)\partial_\nu B_\nu - (-d + 3)\delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma B_\nu - (-d + 3)\partial_\nu B_\sigma (1 - \delta_{\nu\sigma}) + 2\alpha \partial_\sigma B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_\sigma B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_\sigma B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_i B_i - \alpha(1 - \delta_{\nu\sigma})\partial_\nu B_\sigma] + t^\alpha [(-d + 3)\alpha + B_\nu - (-d + 3)\delta_{\nu\sigma} \alpha B_\sigma + \alpha(\alpha - 1)B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha(\alpha - 1)B_\sigma - m^2 B_\nu] = 0. \quad (31)$$

یک جواب این معادله آن است که توانهای مختلف t را به صورتی که در زیر می‌آید متحد با صفر قرار دهیم و معادلات به دست آمده را برای حالات $\nu = 0$ و $\nu \neq 0$ حل کنیم:

$$t^{\alpha+2} [\partial_\nu^2 B_\nu + \nabla^2 B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma^2 B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma \partial_i B_i - \partial_\nu \partial_\sigma B_\sigma (1 - \delta_{\nu\sigma}) - \partial_\nu \partial_i B_i (1 - \delta_{\nu\sigma})] = 0, \quad (32)$$

$$t^{\alpha+1} [(-d + 3)\partial_\nu B_\nu - (-d + 3)\delta_{\nu\sigma} \partial_\sigma B_\nu - (-d + 3)\partial_\nu B_\sigma (1 - \delta_{\nu\sigma}) + 2\alpha \partial_\sigma B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_\sigma B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_\sigma B_\nu + \delta_{\nu\sigma} \alpha \partial_i B_i - \alpha(1 - \delta_{\nu\sigma})\partial_\nu B_\sigma] = 0, \quad (33)$$

$$t^\alpha [(-d + 3)\alpha B_\nu - (-d + 3)\delta_{\nu\sigma} \alpha B_\sigma + \alpha(\alpha - 1)B_\nu - \delta_{\nu\sigma} \alpha(\alpha - 1)B_\sigma - m^2 B_\nu] = 0. \quad (34)$$

برای حالت $\nu \neq 0$ معادلات (۳۸)، (۳۹) و (۴۰) را حل می‌کنیم. که به ترتیب نتایج زیر را در بر خواهند داشت

$$\square B_i - \partial_i (\partial \cdot B) = 0, \quad (35)$$

با قرار دادن (۴۶) و (۴۷) در (۴۸) رابطه‌ای بین k, ω به دست می‌آید

$$\omega^2 = k^2. \quad (49)$$

با استفاده از معادله (۴۹) و (۴۶) کنش روی مرز را به صورت زیر می‌نویسیم

$$I[A_\mu] = \int_0^\infty \mathcal{L} dt d^3x \\ = \int F(z-y) A_\mu(y, 0) A_\mu(z, 0) d^3y d^3z, \quad (50)$$

که

$$F(z-y) = -\frac{-1}{2V(2\pi)^3} \int \omega e^{ik \cdot (z-y)} d^3k. \quad (51)$$

با انتگرال‌گیری روی زوایای ϕ و θ ، عبارت $F(z-y)$ به صورت زیر در می‌آید

$$F(z-y) = \frac{-1}{V(2\pi)^3 |z-y|} \int k^2 \sin(k|z-y|) dk. \quad (52)$$

و با انتگرال‌گیری روی k به عبارت زیر می‌رسیم

$$F(z-y) = \frac{-1}{V(2\pi)^3 |z-y|} \\ \times \left(\frac{2-k^2|z-y|}{|z-y|^3} \cos k|z-y| + \frac{2k \sin k|z-y|}{|z-y|^2} \right)_{k=0}^{k=\infty} \\ = \frac{2}{V(2\pi)^3 |z-y|^4}. \quad (53)$$

برای ساده‌تر کردن عبارت کنش می‌توان از پیمانه لورنتس که انتخاب شد، استفاده کرد. برای این پیمانه داریم

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (54)$$

و با قرار دادن مقدار A_μ

$$\int d^3y f_0(y, z) A_0(y, 0) + \int d^3y f_i(y, z) A_i(y, 0) = 0, \quad (55)$$

نیست. بنابراین در واقع فقط در $d = 3$ و فقط برای حالت نظریه میدان بی‌جرم می‌توان دوگانگی بین فضای اقلیدسی و فضای AdS داشت.

اکنون کنش مرزی در فضای اقلیدسی را برای حالت $3+1$ بعدی به دست می‌آوریم. میدانهای آزاد برداری بی‌جرم در فضای اقلیدسی $3+1$ بعدی در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (41)$$

که در آن $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. معادله (۴۱) با استفاده از شکل گسترده $F^{\mu\nu}$ به صورت زیر در می‌آید

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial \cdot A) = 0. \quad (42)$$

برای حل این معادله پیمانه لورنتس یعنی $\partial \cdot A = 0$ را فرض می‌کنیم و سپس کنش را محاسبه می‌کنیم. با پیمانه لورنتس معادله (۴۲) به

$$\square A^\nu = 0, \quad (43)$$

کاهش خواهد یافت. مانند حالت نرده‌ای یک حل برای این معادله در نظر می‌گیریم که در $t \rightarrow \infty$ صفر شود.

$$A_\mu(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{A}_\mu(k) e^{ik \cdot x} e^{-\omega t}, \quad (44)$$

$$\tilde{A}_\mu(k) = \frac{1}{V} \int d^3x A_\mu(x, 0) e^{-ik \cdot x}. \quad (45)$$

که $A_\mu(x, t)$ مقدار میدان میدان روی سطح $\omega = |k|$ و $t = 0$ است. با قرار دادن (۴۵) در (۴۴) خواهیم داشت

$$A_\mu(x, t) = \int d^3y \mathcal{G}(x, t, y) A_\mu(y, 0), \quad (46)$$

$$\mathcal{G}(x, t, y) = \frac{1}{V(2\pi)^3} \int d^3k e^{-\omega t} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (47)$$

که $\mathcal{G}(x, t, y)$ حلی از معادله موج با شرط اولیه $\mathcal{G}(x, 0, y) = \delta^d(x-y)$ است.

کنش برای میدانهای برداری آزاد بی‌جرم، به صورت زیر است.

$$I[A_\mu] = \int d^d x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ = \frac{-1}{2} \int dt d^d x \left(\dot{A}^2 + (\nabla \cdot A)^2 \right). \quad (48)$$

انتظار می‌رود کنش (۶۳) را بتوان با رهیافتی مستقیم مثل کنش (۱) برای میدانهای برداری در دوگانی AdS/CFT به دست آورد.

یک فرض طبیعی در تطابق AdS_{d+1} با نظریه میدان همدیس روی مرز، جفت شدن میدانهای A_o با میدانهای همدیس \mathcal{X} می‌باشد. که رابطه جفت‌شدگی به صورت $\int_{S^d} A_o \cdot \mathcal{X}$ است. در واقع میدانهای A جریانهایی برای میدانهای \mathcal{X} هستند. ما علاقه‌مند به محاسبه تابع دونقطه‌ای \mathcal{X} ها هستیم و می‌خواهیم خصوصیات نظریه میدان همدیس \mathcal{X} ها را روی مرز بینیم. پیمانه $\nabla \cdot A = 0$ را برای میدانهای A انتخاب می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم نظریه میدان A در داخل فضا، پیمانه‌ای باشد. بنابراین A_i می‌تواند به $A_i + \delta A_i$ که $\delta A_i = \nabla \cdot \epsilon$ و $\nabla^\tau \epsilon = 0$ برود. برای اینکه کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا بماند، باید $\nabla \cdot \mathcal{X} = 0$ باشد. بنابراین همان قیدی که روی میدانهای A_μ بود، روی \mathcal{X} ها هم وجود دارد. یعنی نظریه روی مرز نیز یک نظریه پیمانه‌ای است.

۴. خلاصه

این انتظار وجود دارد که بین نظریه‌های فیزیکی همدیس روی تمامی فضاهایی که با یکدیگر رابطه همدیس دارند، بدون هیچ محدودیتی دوگانی وجود دارد. اما ما در این مقاله نشان دادیم که وجود اسپین می‌تواند محدودیت ایجاد کند. دو فضای AdS_{d+1} و نیم فضای R^{d+1} (t > 0) با یک رابطه همدیس در ارتباطند. برای میدانهای نرده‌ای نشان دادیم که یک نظریه میدان بی‌جرم نرده‌ای در فضای اقلیدسی، دوگان یک نظریه میدان نرده‌ای با جرم $\frac{d-1}{4}$ در فضای AdS_{d+1} است. این دوگانی در تمامی ابعاد فضا وجود دارد. بررسی اسپینورها نیز نشان داده است که بین یک نظریه میدان بی‌جرم در فضای اقلیدسی و نظریه میدان با هر جرم در فضای AdS دوگانی وجود دارد [۸]. در مورد بردارها به تفصیل نشان دادیم که دوگانی بین نظریه‌های همدیس روی فضای AdS و CFT محدود به فضای چهار بُعدی می‌شود.

که

$$f_o(y, z) = \frac{1}{V(\gamma\pi)^\gamma} \int -\omega e^{k \cdot (z-y)} d^\gamma k, \quad (56)$$

و

$$f_i(y, z) = \frac{1}{V(\gamma\pi)^\gamma} \int i k_i e^{k \cdot (z-y)} d^\gamma k. \quad (57)$$

اگر در عبارت های $f_o(y, z)$ و $f_i(y, z)$ انتگرال گیری روی زوایا را انجام دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f_o(y, z) &= \frac{-\gamma}{V(\gamma\pi)^\gamma} \int \frac{k^\gamma}{|z-y|} \sin(k|z-y|) dk \\ &= \gamma F(z-y). \end{aligned} \quad (58)$$

و

$$\begin{aligned} f_i(y, z) &= \frac{-1}{V} \frac{d}{dy_i} \delta(z-y), \\ \int f_i A_i(y, 0) d^\gamma y &= \partial_i A_i(z, 0). \end{aligned} \quad (59)$$

با اعمال پیمانه لورنتس و قرار دادن مقادیر $f_o(y, z)$ و $f_i(y, z)$ مقدار کنش به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int d^\gamma z d^\gamma y \left(\frac{-1}{4V} \nabla^\tau O(x-z) + F(z-y) \right) \\ &\quad \times A_\mu(y, 0) A_\mu(z, 0), \end{aligned} \quad (60)$$

که

$$\int O(x-z) F(z-y) d^\gamma z = \delta(x-y), \quad (61)$$

و

$$\begin{aligned} O(x-z) &= \int \frac{\gamma}{(\gamma\pi)^\gamma \omega} e^{ik \cdot (x-z)} d^\gamma k \\ &= \int \frac{\gamma}{(\gamma\pi)^\gamma |x-z|} \sin(k|x-z|) dk \\ &= \frac{\gamma}{(\gamma\pi)^\gamma |x-z|^\gamma}. \end{aligned} \quad (62)$$

با استفاده از معادلات (۵۳) و (۶۲) برای کنش (۶۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int A_\mu(z, 0) \left(\frac{-1}{4V} \frac{-\lambda}{(\gamma\pi)^\gamma |x-z|^\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{V(\gamma\pi)^\gamma |z-y|^\gamma} \right) A_\mu(y, 0) d^\gamma z d^\gamma y \\ &= \frac{\gamma}{(\gamma\pi)^\gamma} \int \frac{A_\mu(z, 0) A_\mu(y, 0)}{|z-y|^\gamma} d^\gamma z d^\gamma y. \end{aligned} \quad (63)$$

با رابطه $A_\mu = t^\alpha B_\mu$ در ارتباطند. با در نظر گرفتن بُعد مقیاسی میدان در لاگرانژی ناوردا، $\alpha = \frac{d-2}{4}$ به دست می آید. با قرار دادن $A_\mu = t^\alpha B_\mu$ در معادله پروکا، معادلاتی برای میدان B_μ به دست می آید که تعدادی از آنها بی جرم بودن میدانهای اقلیدسی B_μ را نشان می دهند. با شمارش تعداد درجات آزادی فیزیکی در دو فضا و با توجه به اینکه در فضای اقلیدسی میدانها بی جرم به دست آمدند، باید میدانهای A_μ نیز بی جرم باشند. از معادلاتی که برای B_μ به دست آوردیم و دو شرط $m = 0$ و $\alpha = \frac{d-2}{4}$ نتیجه می شود که دوگانی فقط در $d = 3$ یعنی فضای چهار بُعدی وجود دارد. با استفاده از تعبیری که از AdS/CFT برای میدانهای نردهای به دست آوردیم، کنش میدانهای برداری در صفحه $t = 0$ فضای اقلیدسی را به دست آوردیم.

با توجه به نگاشت یک به یکی که بین مرز فضای AdS و صفحه $t = 0$ فضای اقلیدسی وجود داشت، حدس زدیم که باید بتوان تعبیری از تطابق AdS/CFT برای میدانهای نردهای در فضای اقلیدسی یافت. مقایسه کنش مرزی AdS (۱) با کنش اقلیدسی محاسبه شده بر حسب مقادیر اولیه میدان (۱۶)، حدس ما را تأیید می کند. در واقع این مطلب روشن شد که تطابق AdS/CFT برای میدانهای نردهای می تواند معنایی جز حل معادلات حرکت و محاسبه کنش بر حسب مقادیر اولیه میدان نداشته باشد. در بررسی دوگانی نظریه میدانهای برداری در فضای AdS و فضای اقلیدسی ابتدا شکل معادله پروکا را در فضای AdS نوشتیم و حلی برای این معادله، A_μ ، پیشنهاد دادیم. میدانهای A_μ در فضای AdS با میدانهای اقلیدسی B_μ ،

مراجع

1. S Hawking, *The univers in a nutshell*, Bantam books, Nov. (2001).
2. L Susskind, E Witten, *The holographic bound in anti-de sitter space*, hep-th/9805114.
3. D Bigatti, L Susskind, *TASI lectures on the holographic principle*, hep-th/0002044.
4. E Witten, *Anti de sitter space and holography*, hep-th/9802150.
5. F Loran, ϕ^4 -Model and holography in four dimensions, hep-th/0409267, to appear in Phys Lett B.
6. F Loran, *Phys. Lett. B* 601, (2004) 192, hep-th/0404067.
7. P A Dirac, *General theory of relativity*, John Wiley & Sons, (1975).
8. F Loran *Massive spinors and AdS/CFT correspondence* JHEP 0406, (2004) 054, hep-th/0404135.