مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۸۴

# جوابهای سالیتونی در پلاسمای سه مؤلفه‌ای یون - الکترون- پوزیترون

**پروین اسلامی، محسن سربیشه‌ای و مرضیه متقی‌زاده**

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد.

(دریافت مقاله: ۸۳/۹/۲۸ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۶/۱۹ )

**چکیده**

در این مقاله ابتدا شرایط وجود جوابهای سالیتونی را در پلاسمای یون – الکترون – پوزیترون بررسی می‌کنیم. سپس به ارائه نتایج تأثیر افزایش پوزیترون روی مشخصات موج سالیتونی می‌پردازیم. همچنین پس از تحقیق پایداری جوابهای سالیتونی کم- دامنه تحول زمانی این امواج را در عبور از مرز دو محیط پلاسمایی که در چگالی پوزیترون یا نسبت دمای پوزیترون به الکترون متفاوت می‌باشند، بررسی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** سالیتون، پلاسما

## ۱. مقدمه

در طی سالهای اخیر تعداد زیادی از مقالات به تحلیل خطی و غیرخطی حرکت امواج در پلاسمای داغ شامل الکترون – پوزیترون اختصاص یافته است. دانشمندان براین عقیده اند که ترکیب اصلی پلاسمای ناشی از تپنده‌ها و هسته‌های فعال کهکشانی [۱] و اتمسفر خورشیدی [۲] از زوج الکترون – پوزیترون تشکیل شده است. هر چند زوج الکترون – پوزیترونهای داغ قسمت اعظم پلاسمای کیهانی و نجومی را تشکیل می‌دهد، ولی بیشتر پلاسماهای نجومی علاوه بر الکترون – پوزیترون شامل یونها نیز می‌باشند [۳]. واضح است که خواص حرکت امواج در پلاسمای (الکترون – پوزیترون) و پلاسمای (یون- الکترون- پوزیترون) باید متفاوت باشد. لذا مطالعه انتشار امواج خطی و غیرخطی در چنین پلاسمایی مهم است. به عنوان مثال مقاله [۴] به بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی در پلاسمای سه مولفه‌ای (یون- الکترون- پوزیترون) پرداخته است.

هرچند شواهد قطعی وجود ندارد، ولی عقیده بر این است مگنتوسفر ستارگان نوترونی چرخان شامل پلاسماهای (الکترون-پوزیترون) است که در نواحی نوک تیز ستارگان به علت تابش الکترومغناطیسی شدید ایجاد شده است. از آنجایی که ممکن است پروتون یا یونهای دیگر در چنین محیطهایی حضور داشته باشند، بنابراین پلاسمای سه مؤلفه‌ای (یون- الکترون- پوزیترون) می‌تواند در طبیعت وجود داشته باشد. علاوه بر این از پوزیترونها می‌توان در ترابرد ذره در توکامکها استفاده کرد و از آنجایی که طول عمر پوزیترونها بحد کافی بزرگ است، پلاسمای دو مؤلفه‌ای (الکترون- پوزیترون) به پلاسمای سه مؤلفه‌ای (یون- الکترون- پوزیترون) تبدیل می‌شود [۵ و۶]، لذا در دهه اخیر پلاسماهای (یون- الکترون- پوزیترون) مورد توجه نویسندگان زیادی قرار گرفته است[۷و۸]. آنها با استفاده از مدلهای مختلف، انتشار امواج خطی و غیرخطی را در این پلاسماها بررسی کرده‌اند.

نتایج این تحقیقات می‌تواند در فهم خواص غیرخطی اختلالات الکتروستاتیک جایگزیده‌ای که ممکن است در پلاسماهای نجومی مثل هسته‌های کهکشان فعال ظاهر شود، مفید واقع شود.

در اینجا در ادامه کار انجام شده در مقاله [۹] شرایط وجود جوابهای سالیتونی در پلاسمایی که به آن یون مثبت اضافه شده است را مطالعه می‌کنیم. در مقاله [۹] شرایط وجود جوابهای سالیتونی در پلاسمای سه مؤلفه‌ای (الکترون- یون منفی- یون مثبت) بررسی شده است. در این پلاسما وجود جوابها بستگی به نسبت جرم یون منفی به یون مثبت و غلظت یون منفی دارد و بسته به این مقادیر معادلات حاکم، KdV یا mKdV می‌باشند. با توجه به اینکه در پلاسمای (یون- الکترون- پوزیترون) جرم الکترون و پوزیترون یکسان است تفاوتهایی نسبت به پلاسمای (الکترون - یون منفی - یون مثبت) مشاهده می‌شود.

در این مقاله در بخش اول معادلات حاکم امواج سالیتونی در پلاسمای سه مؤلفه‌ای (یون- الکترون- پوزیترون) را ارائه می‌دهیم. در این فرمولبندی برای یونهای سرد نظریه سیالی و برای الکترونها و پوزیترونهای داغ توصیف جنبشی به کار می‌رود. سپس در بخش دوم شرط وجود جوابهای سالیتونی بعد از افزودن پوزیترون بررسی می‌شود و در آخرین بخش نتایج حاصل که شامل قسمتهای زیر می‌باشد ذکر شده است.

- کاهش دامنه در پلاسمای (یون- الکترون- پوزیترون) نسبت به پلاسمای (یون- الکترون)
- محاسبه نسبت چگالی پوزیترون به الکترون برای ایجاد موجی با دامنه مشخص
- تحول زمانی امواج جایگزیده کم- دامنه
- عبور امواج کم- دامنه از مرز دو محیط پلاسما (یون- الکترون- پوزیترون) با مشخصات متفاوت.

لازم به ذکر است که محاسبات عددی لازم برای این نتیجه‌گیریها با استفاده از نرم افزارهای Mathematica و Visual Fortran به دست آمده است.

## ۲. فرمولبندی مدل

پلاسمای سه مؤلفه‌ای که در این مقاله در نظر می‌گیریم شامل الکترون، پوزیترون و یونهای مثبتی است که یک الکترون خود را از دست داده‌اند و در آن دمای یونها از دمای الکترونها و پوزیترونها کوچکتر است. در این صورت می‌توان از حرکتهای حرارتی و برخورد بین یونها صرف نظر کرد. با در نظر گرفتن پلاسمای غیر مغناطیده معادله حرکت یونها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=-\frac{e}{m_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (۱)$$

همچنین معادله پیوستگی یون در غیاب منبع تولید یا نشت یون عبارت است از:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i)=0, \qquad (۲)$$

در این معادلات برای سهولت فرض شده است که ذرات می‌توانند فقط در یک امتداد حرکت کنند.

سبک بودن و تحرک زیاد الکترون‌ها و پوزیترونها ( $T_{e(p)} >> T_i$ ) به توزیع بولتزمن منجر می‌شود:

$$n_{e(p)}=n_{e(p)0}\exp(\pm\frac{e\varphi}{T_{e(p)}}), \qquad (۳)$$

که در آن $\varphi$ پتانسیل الکتروستاتیکی است که در معادله پؤاسون صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=4\pi e(n_e-n_i-n_p), \qquad (۴)$$

در روابط بالا، $n_e$ ، $n_p$ و $n_i$ به ترتیب چگالی الکترون، پوزیترون و یونها است، $v_i$ سرعت سیال یونی، $m_i$ جرم یون، e بزرگی بار الکترون، $T_e(T_p)$ دما الکترون (پوزیترون) است.

چگالی الکترون و پوزیترون مختل نشده را نیز با $n_{e0}$ و $n_{p0}$ نشان داده ایم. در حالت تعادل $\varphi=0$، رابطه $n_{i0}+n_{p0}=n_{e0}$ برقرار است، که در این رابطه $n_{i0}$ چگالی یون مختل نشده است.

اکنون به منظور بدست آوردن جوابهای ایستا و جایگزیده معادلات غیرخطی ذکر شده، متغیر جدید $\xi=x-vt$ را معرفی و چارچوب مرجعی را در نظر می‌گیریم که با سرعت ثابت $v$ با موج در حال حرکت است. در این صورت همه متغیرهای

فیزیکی را می‌توان بر حسب $\xi$ و $v$ نوشت، به علاوه، فرض می‌کنیم که $\varphi$ در $\xi \to \pm\infty$ به سمت صفر میل کند که شرط وجود جواب جایگزیده است. همچنین با استفاده از روش استاندارد [۱۰و۱۱] کمیتهای بدون بعدی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi = \frac{e\varphi}{T_e} \text{ و } M = \frac{v}{c_s} \text{ و } \xi = \frac{\xi}{r_{De}} \text{ و } x = \frac{x}{r_{De}}, \tag{۵}$$

در روابط بالا $c_s = (\frac{T_e}{m_i})^{۱/۲}$ سرعت صوت در پلاسمای الکترون- یون بدون پوزیترون است. همچنین سرعت موج به سرعت $c_s$ بهنجار شده است که این نسبت $M$ عدد ماخ نامیده می‌شود.

$r_{De}$ فاصله حفاظتی دبای [۱۰] و دارای فرمول زیر است:

$$r_{De} = (\frac{T_e}{۴\pi n_{e\circ} e^۲})^{۱/۲}.$$

یکی از مشخصات اساسی رفتار پلاسما، توانایی آن برای ایجاد حفاظ در مقابل پتانسیلهای الکتریکی است که به آن اعمال می‌شوند. فاصله حفاظتی دبای تعیین می‌کند میدان الکتریکی تا چه فاصله‌ای درون پلاسما نفوذ می‌کند.

با استفاده از تغییر متغیر $\xi = x - vt$ و جایگذاری آن در معادلات (۱) و (۲) و با انتگرال گیری از این معادلات چگالی یون را بدست می‌آوریم:

$$n_i = \frac{n_{i\circ}}{(۱ - \frac{۲e\varphi}{m_i v^۲})^{\frac{۱}{۲}}}. \tag{۶}$$

این کمیت با استفاده از متغیرهای تعریف شده (۵) عبارت است از:

$$n_i = \frac{v/(T_e/m_i)^{\frac{۱}{۲}} n_{i\circ}}{(\frac{v^۲}{T_e/m_i} - \frac{۲e\varphi}{T_e})^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{|M| n_{i\circ}}{\sqrt{M^۲ - ۲\phi}}, \tag{۷}$$

پس از جایگذاری چگالیها از معادلات (۳) و (۷) در معادله پواسون نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^۲\phi}{\partial\xi^۲} = ۴\pi e(n_{e\circ}\exp(\phi) - \frac{|M|}{\sqrt{M^۲ - ۲\phi}} n_{i\circ} - n_{p\circ}\exp(-\frac{T_e}{T_p}\phi)). \tag{۸}$$

با استفاده از $n_{i\circ} = n_{e\circ} - n_{p\circ}$ و تعریف $p = \frac{n_{p\circ}}{n_{e\circ}}$ (نسبت چگالی مختل نشده پوزیترون به الکترون) معادله (۸) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{\partial^۲\phi}{\partial\xi^۲} = ۴\pi e(n_{e\circ}\exp\phi - \frac{n_{e\circ}|M|}{\sqrt{M^۲ - ۲\phi}}((۱-p) - n_{e\circ} p \exp(-\frac{T_e}{T_p}\phi)), \tag{۹}$$

که در این رابطه به ترتیب از سمت راست چگالی الکترون، پوزیترون و یون می‌باشد.

## ۳. شرایط وجود جواب سالیتونی بعد از افزودن پوزیترون

از آنجایی که طرف دوم معادله (۹) به $\xi$ بستگی ندارد، یکبار انتگرال گیری از این معادله نسبت به $\phi$ معادله زیر را می‌دهد:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{\partial\phi}{\partial\xi})^۲ + V(\phi) = ۰, \tag{۱۰}$$

که در آن $V(\phi)$ عبارت است از:

$$V(\phi) = ۴\pi e n_{e\circ}(۱ + \frac{pT_e}{T_p} - \exp(\phi) - \frac{pT_e}{T_p}\exp(-\frac{T_e}{T_p}\phi) + |M|(۱-p)(|M| - \sqrt{M^۲ - ۲\phi}). \tag{۱۱}$$

این پتانسیل را پتانسیل سقدی اف [۱۰و۱۲] می‌نامند.

در معادله (۱۰) ثابت انتگرال گیری طوری انتخاب شده است که $V(\phi)$ در $\phi = ۰$، صفر شود. همچنین از دو شرط که $\lim_{\xi\to\pm\infty}\phi = ۰$ و $\lim_{\xi\to\pm\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = ۰$ استفاده شده است.

شرط وجود جواب سالیتونی این است که پتانسیل مؤثر $V(\phi)$ در نقطه $\phi = ۰$ ماکزیمم موضعی داشته باشد که به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\left[d^۲V(\phi)\big/ d\phi^۲\right]\Big|_{\phi=\circ} < ۰. \tag{۱۲}$$

پس از اعمال این شرط نتیجه زیر برای عدد ماخ حاصل

**جدول ۱.** ماکزیمم دامنه و عدد ماخ به ازای $p$ ها و دماهای مختلف.

| | $T_p = T_e$ | | $T_p = 10^{3} T_e$ | | $T_p = 10^{6} T_e$ | | $T_p = 10^{-3} T_e$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $M$ | $\phi_{\circ\max}$ | $M$ | $\phi_{\circ\max}$ | $M$ | $\phi_{\circ\max}$ | $M$ | $\phi_{\circ\max}$ |
| ۰/۱ | ۱/۵۰۶۵۰ | ۱/۱۳۴۷۷ | ۱/۵۳۰۱۷ | ۱/۱۷۰۷ | ۱/۵۳۰۲ | ۱/۱۷۰۷ | ۱/۴۶۹۳۵ | ۱/۰۷۹۴۹ |
| ۰/۳ | ۱/۳۲۳۷۹ | ۰/۸۷۶۲۱ | ۱/۴۰۱۰۳ | ۰/۹۸۱۴۴ | ۱/۴۰۱۱۴ | ۰/۹۸۱۵ | ۱/۱۳۱۰۵ | ۰/۶۳۹۶۳ |
| ۰/۵ | ۱/۱۰۱۱۷ | ۰/۶۰۶۲۶ | ۱/۲۳۴۸۸ | ۰/۷۶۲۴ | ۱/۲۳۵۰۶ | ۰/۷۶۲۶ | ۰/۲۵۰۸۲۷ | ۰/۰۳۱۴۵ |
| ۰/۷ | ۰/۸۲۸۷ | ۰/۳۴۲۶۲ | ۱/۰۰۳۳۷ | ۰/۵۰۳۳۷ | ۱/۰۰۳۶۲ | ۰/۵۰۳۶۲ | ۰/۰۴۹۸۶ | ۰/۰۰۱۲۴ |
| ۰/۹ | ۰/۴۵۸۲ | ۰/۱۰۴۹۷ | ۰/۶۱۲۴۲ | ۰/۱۸۷۵۳ | ۰/۶۱۲۶۷ | ۰/۱۸۷۶۸ | ۰/۰۲۱۹۱۲ | ۰/۰۰۰۲۴ |

می‌شود:

$$M^{2} > \frac{1-p}{1+p\dfrac{T_e}{T_p}} \,. \qquad (13)$$

طبق این نتیجه به ازای هر $p$ و نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ فقط به ازای محدوده‌ای از $M$ جواب سالیتونی داریم.

تحت این شرایط جواب حقیقی معادله $V(\phi)=0$ دامنه موج را مشخص می‌کند که در صورت وجود مقدار مثبت و تابعی از عدد ماخ $M$ است. این دامنه را با $\phi_\circ$ نشان می‌دهیم.

## ۴. نتایج

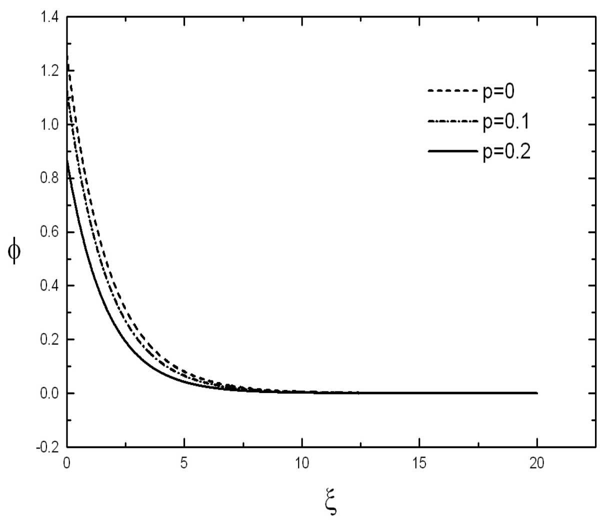
### ۱.۴ افزایش پوزیترون منجر به کاهش دامنه می‌شود

با توجه به آخرین جمله معادله (۱۱)، عبارت زیر رادیکال همواره باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، این شرط باعث محدود شدن ماکزیمم دامنه موج سالیتونی به مقدار $\phi_{\circ\max} = \frac{1}{2}M^{2}$ می‌شود. به ازای هر $p$، ماکزیمم سرعت ممکن (ماکزیمم عدد $M$) این موج از رابطه $V(\phi_{\circ\max})=0$ تعیین می‌گردد.

جدول ۱ نتایج محاسبات عددی ما را به ازای مقادیر مختلف $p$ و نسبتهای مختلف $\frac{T_p}{T_e}$ نشان می‌دهد. همان طور که از جدول مشخص است با افزایش مقدار p یا به عبارتی با افزایش مقدار پوزیترون در پلاسما دامنه موج کاهش می‌یابد. این مطلب برای هر سه حالت $T_p = T_e$، $T_p < T_e$ و $T_p > T_e$ صادق است. به علاوه طبق نتایج این جدول مقدار دامنه با تغییر نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ تغییر محسوسی نمی‌کند. همچنین مقایسه این دامنه‌ها با دامنه موج در حالتی که $p=0$ است ($\phi_{\circ\max} = 1/26$ و $M \cong 1/59$) نشان می‌دهد که دامنه موج در حالت $p=0$ بیشترین مقدار را دارد به عبارت دیگر افزایش پوزیترون مستقل از نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ سبب کاهش دامنه می‌شود. لازم به ذکر است که $M$ های به دست آمده در جدول ۱ در شرط (۱۳) صدق می‌کنند.

به منظور به دست آوردن موج سالیتونی $\phi$ برحسب $\xi$، معادله (۱۰) را به روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم [۱۳] حل کرده‌ایم. نتایج این محاسبات در شکلهای ۱ و ۲ نشان داده شده است. شکل ۱ موج سالیتونی را به ازای سه مقدار مختلف $p$ در $T_p = T_e$ نشان می‌دهد. در شکل ۲ موج سالیتونی به ازای نسبتهای مختلف $\frac{T_p}{T_e}$ رسم شده است. طبق این شکل با افزایش نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ پهنای موج افزایش می‌یابد.

لازم به ذکر است که در هر دو شکل فقط نیمی از موج نشان داده شده است و موج کامل با انعکاس شکل نسبت به محور عمودی به دست می‌آید.




**شکل ۱.** کاهش دامنه به ازای تغییر $p$ در $T_p = T_e$.

### ۲.۴ محاسبه محدوده کسر $p$ برای ایجاد موجی با دامنه $\phi_0$

در این قسمت به این سؤال پاسخ می‌دهیم که چنانچه بخواهیم موجی با دامنه $\phi_0$ در پلاسما ($T_p = T_e$) ایجاد کنیم، چه محدودیتی روی $p$ ایجاد می‌شود؟ واضح است که طبق نتایج قسمت قبل $\phi_0$ باید از $\phi_0 = 1.26$ که مربوط به $p = 0$ است، کوچکتر انتخاب شود، در این صورت $p_{\min} > 0$ می‌باشد.

با استفاده از رابطه $V(\phi_0) = 0$ با توجه به اینکه در $p_{\max}$، $M^2 = 2\phi_0$ است، می‌توان به نتیجه زیر رسید:

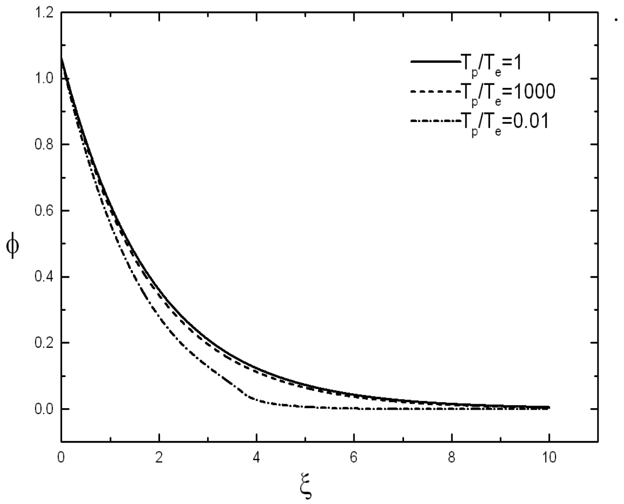
$$p_{\max} = \frac{\exp(\phi_0) - 2\phi_0 - 1}{1 - 2\phi_0 - \exp(-\phi_0)}, \qquad (14)$$

بنابراین برای ایجاد موجی با دامنه $\phi_0$، کسر $p$ باید در محدوده $0 < p \le p_{\max}$ انتخاب شود.

شکل ۳ نتایج محاسبات عددی ما را برای عدد ماخ $M$ به ازای $0 < p \le p_{\max}$ و $\phi_0 = 0.5$ نشان می‌دهد. طبق این شکل $p_{\max} = 0.58$ می‌باشد که تأییدی بر رابطه (۱۴) است.

### ۳.۳ تحول زمانی موج سالیتونی کم- دامنه

در این قسمت پایداری موج سالیتونی را برای دامنه‌های کوچک بررسی می‌کنیم. بدین منظور رابطه (۹) را برای دامنه‌های کوچک تا مرتبه $\phi^3$ بسط می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:




**شکل ۲.** تغییرات پهنای موج با تغییر دما برای $p = 0.1$ و $M = 1.46$ و دامنه ۱/۰۶.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \left(-1 - p\frac{T_e}{T_p} + \frac{1-p}{M^2}\right)\phi + \left(-1 + p\left(\frac{T_e}{T_p}\right)^2 + \frac{3(1-p)}{M^4}\right)\frac{\phi^2}{2} = 0 \ . \qquad (15)$$

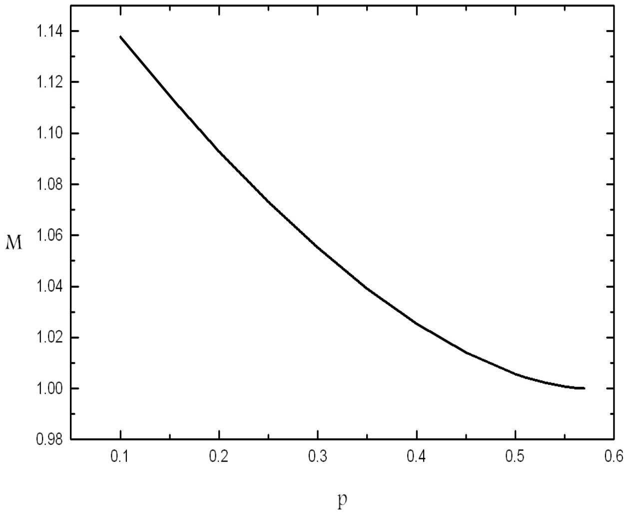
این معادله را به روش تحلیلی حل کرده و جواب موج سالیتونی آن را به دست آورده‌ایم که عبارت است از:

$$\phi = \frac{3\left(1 + p\left(\frac{T_e}{T_p}\right) - \frac{(1-p)}{M^2}\right)}{\left(-1 + p\left(\frac{T_e}{T_p}\right)^2 + \frac{3(1-p)}{M^4}\right)} \times \cosh^{-2}\left(\left(1 + p\left(\frac{T_e}{T_p}\right) - \frac{(1-p)}{M^2}\right)^{1/2}\frac{\xi}{2}\right) \ . \qquad (16)$$

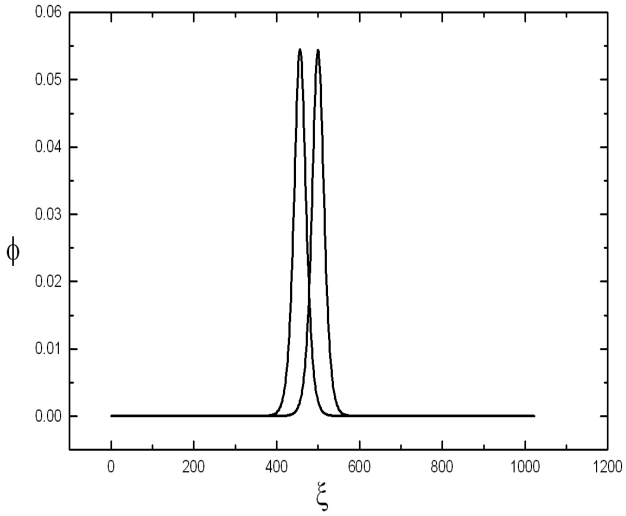
توان تابع cosh نشان می‌دهد، در این حالت معادله KdV [۱۴و۱۵ و۱۶ و۱۷] رفتار پلاسما را توصیف می‌کند.

چنانچه رابطه (۹) را تا مرتبه بالاتر بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \left(-1 - p\frac{T_e}{T_p} + \frac{1-p}{M^2}\right)\phi + \left(-1 + p\left(\frac{T_e}{T_p}\right)^2 + \frac{3(1-p)}{M^4}\right)\frac{\phi^2}{2} + \left(-1 - p\left(\frac{T_e}{T_p}\right)^3 + \frac{15\,(1-p)}{M^8}\right)\frac{\phi^3}{6} = 0 \ . \qquad (17)$$




**شکل ۳.** تغییرات $M$ (عدد ماخ) برحسب $p$ برای $\phi_0 = ۰/۵$.




**شکل ۴.** تحول زمانی موج برای $p=۰/۲$ و $T_e = T_p$.

حل تحلیلی این معادله منجر به جواب زیر می‌شود:

$$\phi = \frac{6c}{a+\sqrt{3cb+a^2}\cosh(\sqrt{c}\xi)}, \qquad (18)$$

که در آن a ، b و c عبارتند از:

$$c = 1 + p(\frac{T_e}{T_p}) - \frac{(1-p)}{M^2} \quad ,$$

$$a = -1 + p(\frac{T_e}{T_p})^2 + \frac{3(1-p)}{M^4} \quad ,$$

$$b = -1 - p(\frac{T_e}{T_p})^3 + \frac{15\ (1-p)}{M^8} \quad ,$$

که با توجه به جواب می‌توان نتیجه گرفت معادله gKdV [۱۴ و۱۵ و۱۶ و۱۷] بر رفتار پلاسما حاکم است. (جزئیات حل معادلات (۱۶) و (۱۸) در ضمیمه توضیح داده شده است)

معادله وابسته به زمان در حالتی که معادله KdV توصیف کننده امواج سالیتونی کم- دامنه در پلاسما باشد عبارت است از [۱۱]:

$$\frac{r_{De}}{c_s}(\frac{1+pT_e/T_p}{1-p})^{1/2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}+ \frac{1}{2}\frac{1}{1+pT_e/T_p}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+pT_e/T_p}[1- p(\frac{T_e}{T_p})^2-\frac{3}{1-p}(1+pT_e/T_p)^2]\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad . \qquad (19)$$

به منظور بررسی پایداری جوابهای سالیتونی با دامنه کوچک ما این معادله را به روش عددی FFT [۱۳] (Fast Fourier Transform) حل کرده‌ایم. شکل ۴ تحول زمانی و پایداری موج سالیتوری را برای $p=۰/۲$ ، $T_e = T_p$ و دامنه موج ۰/۰۵۵ نشان می‌دهد.

### ۴.۴ عبور سالیتون از مرز دو محیط

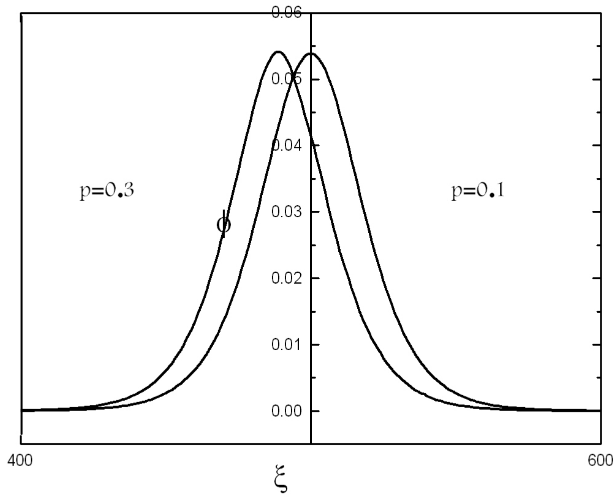
در این قسمت به روش FFT تحول زمانی سالیتون کم- دامنه‌ای را بررسی کرده‌ایم که از محیطی به محیط دیگر وارد می‌شود این بررسی در سه قسمت جداگانه زیر انجام شده است.

**الف) تغییر نسبت $p$ محیط دوم نسبت به محیط اول**

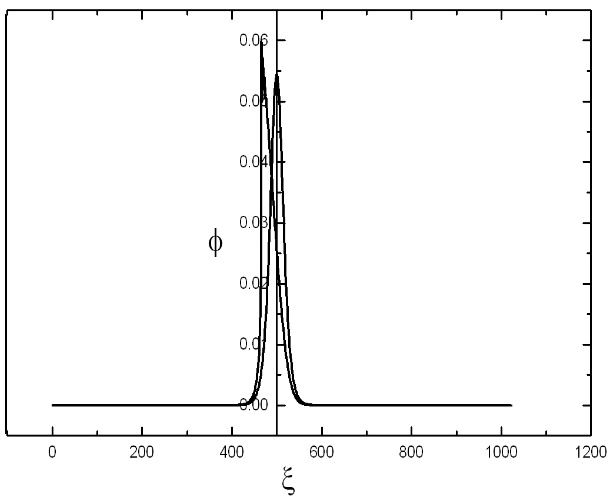
به منظور بررسی تحول زمانی جوابهای سالیتونی در عبور از مرز دو محیط، دو روش زیر را برای تغییر کسر $p$ به کار برده‌ایم:

- تغییر ناگهانی $p$
- تغییر خطی $p$

هرچند خطاهای عددی ایجاد شده مانع از اجرای برنامه به مدت طولانی می‌شود ولی نتایج عددی با استفاده از هر دو روش نشان می‌دهد که سالیتون در عبور از مرز بین دو محیط تغییر محسوسی نمی‌کند (شکل۵). در این شکل چگالی پوزیترون در محیط دوم بیشتر از محیط اول است.




**شکل ۵.** تغییر $p=\cdot/۱$ به $p=\cdot/۳$.



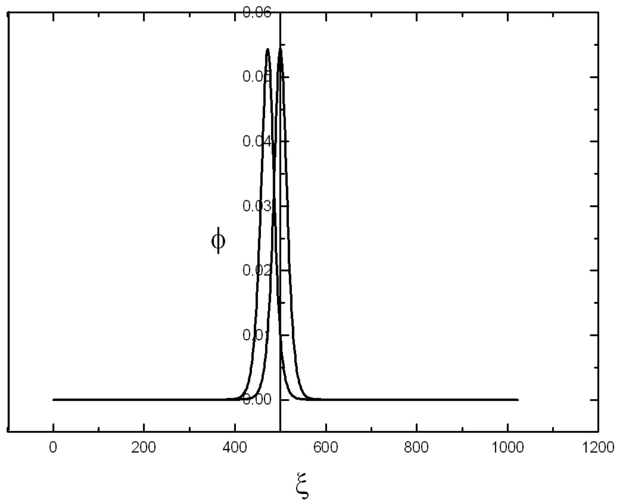

**شکل ۷.** نابودی موج زمانی که در محیط دوم $T_p << T_e$.

**ب) نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ محیط دوم بیشتر از محیط اول**

در این حالت نیز محاسبات پایداری سالیتون را در عبور از مرز دو محیط نشان می‌دهد (شکل۶).

**ج) نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ محیط دوم کمتر از محیط اول**

در این حالت نتایج عددی نشان می‌دهد سالیتون در عبور از مرز دو محیط از بین می‌رود (شکل۷). در همه حالتهای بررسی شده در بخش۳-۴ موج از محیط سمت راست به محیط سمت چپ وارد می‌شود.



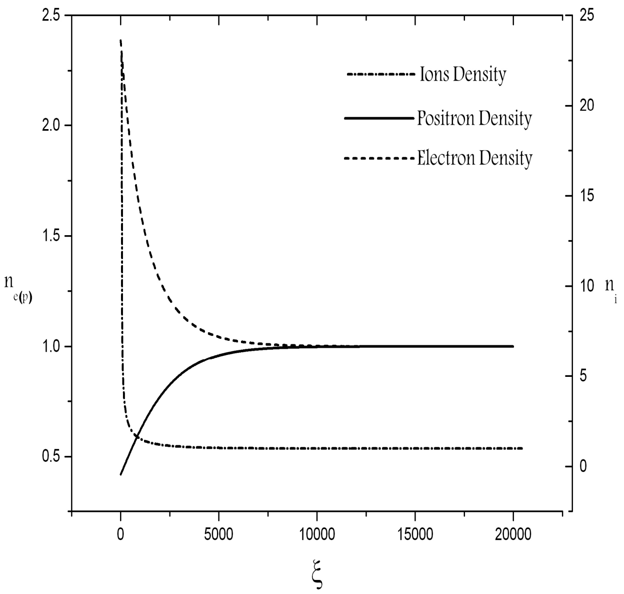

**شکل ۶.** تحول زمانی موج زمانی که در محیط دوم $T_e << T_p$.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از فرمولبندی مدل و بررسی وجود جوابهای سالیتونی نشان دادیم که در اثر افزودن پوزیترون دامنه سالیتون کم و پهنای آن افزایش می‌یابد.

در ادامه پس از حل تحلیلی معادلات برای جوابهای سالیتونی کم- دامنه پایداری این جوابها را به روش عددی بررسی کرده‌ایم. در شبیه سازی این معادلات برای مشتق زمانی از فرمول تفاضل متناهی [۱۳] و برای مشتقات مکانی از هر دو روش FFT و فرمولهای تفاضل متناهی استفاده شده است. مقایسه نتایج در دو روش نشان می‌دهد که روش FFT روش مناسبتری است.

طبق نتایج مقاله [۹] سالیتونها در پلاسمای سه مؤلفه‌ای (یون مثبت- الکترون- یون منفی) باعث افزایش چگالی یونهای منفی اضافه شده در محل تشکیل سالیتون می‌شود. در شکل ۸ چگالیهای الکترون، پوزیترون و یون با استفاده از معادله (۹) بر حسب $\xi$ رسم شده است. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت در پلاسمای (یون- الکترون- پوزیترون) چگالی پوزیترون کاهش و چگالی یونهای مثبت و الکترون افزایش می‌یابد. تفاوت دیگری که بین این دو پلاسما مشاهده می‌شود وجود انواع سالیتونهای KdV، mKdV و non-KdV در پلاسمای ( الکترون- یون منفی- یون مثبت) است. در پلاسمای




**شکل ۸.** تغییرات چگالی الکترون، پوزیترون و یونها بر حسب $\xi$ برای $T_e = T_p$ و $p = ۰/۳$ و $M = ۱/۳۲$ و $\phi_۰ = ۰/۸۷$.

(الکترون - پوزیترون- یون) سالیتونهای mKdV در صورتی وجود دارند که $M^۲ = \frac{۱-p}{۱+pT_e/T_p}$ برقرار باشد (به پیوست مراجعه شود) با توجه به اینکه این شرط در رابطه (۱۳) صدق نمی‌کند لذا در این پلاسما سالیتونهای mKdV تشکیل نمی‌شود.

علاوه بر این طبق محاسبات انجام شده در بخش (۳-۴) موج سالیتونی با عبور از مرز دو محیط در دمای ثابت با تغییر چگالی پوزیترون از بین نمی‌رود در حالی که در چگالی ثابت اگر نسبت $\frac{T_p}{T_e}$ محیط دوم کمتر از محیط اول باشد سالیتون در عبور از مرز پایداری خود را از دست می‌دهد.

## پیوست

در این پیوست توضیحات مختصری در مورد معادلات KdV و mKdV بیان می‌کنیم. همچنین جزئیات به دست آوردن معادلات (۱۶) و (۱۸) ارائه می‌شود.

معادله KdV به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + a\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + c\frac{\partial^۳\eta}{\partial\xi^۳} = ۰, \qquad (۱)$$

که در این رابطه τ متغییر زمان، $\xi$ متغییر مکان می باشند و η نشان دهنده پتانسیل است، در اینجا a و c کمیتهای ثابتی هستند که به مشخصات محیط بستگی دارند. این معادله در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی که شامل یک موج غیرخطی ضعیف است پیش می‌آید. معادله کورته‌وگ- ده‌وری جوابی به شکل یک سالیتون دارد که عبارت است از:

$$\eta(\xi) = \frac{۳V}{a}\sec h^۲\left(\sqrt{\frac{V}{c}}\frac{\xi}{۲}\right). \qquad (۲)$$

معادله تعدیل یافته کورته‌وگ- ده‌وری یا mKdV عبارت است از:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + b\eta^۲\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + c\frac{\partial^۳\eta}{\partial\xi^۳} = ۰, \qquad (۳)$$

که در آن b و c کمیتهای ثابتی هستند. جواب سالیتونی این معادله به صورت زیر است:

$$\eta(\xi) = \sqrt{\frac{V}{b}}\sec h\left(\sqrt{\frac{V}{c}}\xi\right). \qquad (۴)$$

در مدلهای غیرخطی و در بسطهای اختلالی اگر ضریب a در معادله (۴) صفر باشد، جمله بعدی که متناسب با $\eta^۳$ است در نظر گرفته می‌شود که بسط مورد نظر به معادله mKdV منجر می‌شود.

چنانچه هر دو جمله غیرخطی را در معادلات KdV و mKdV در نظر بگیریم به معادله gKdV خواهیم رسید:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + (a\eta + b\eta^۲)\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + c\frac{\partial^۳\eta}{\partial\xi^۳} = ۰, \qquad (۴)$$

که این معادله جوابی به صورت زیر خواهد داشت و چنانچه حالتهای خاص را در نظر بگیریم به جوابهای دو معادله (۱)و (۳) دست می‌یابیم.

$$\phi = \frac{۶V}{a + \sqrt{۶Vb + a^۲}\cosh(\sqrt{V/c}\,\xi)}. \qquad (۵)$$

برای به دست آوردن روابط (۱۶) و (۱۸) ابتدا برای

سهولت در کار ضرایب $\phi$، $\phi^2$ و $\phi^3$ را به ترتیب $-c$، $a$ و $b$ در نظر می‌گیریم و سپس از رابطه (۱۷) نسبت به $\phi$ انتگرال‌گیری می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\int d\xi = \int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{c-\frac{1}{3}a\phi-\frac{1}{6}b\phi^2}}, \qquad (5)$$

$$\xi = -\sqrt{\frac{1}{c}}\log\left[\frac{1}{\sqrt{c}\phi}\left(2c-\frac{1}{3}a\phi+2\sqrt{c}\sqrt{c-\frac{1}{3}a\phi-\frac{1}{12}b\phi^2}\right)\right], \qquad (6)$$

رابطه‌ای برای $\xi$ برحسب $\phi$ به دست می‌آوریم، رابطه را می‌توانیم معکوس کنیم تا $\phi(\xi)$ را به طور صریح به دست آوریم.

$$\sqrt{c}\,\phi\exp(-\sqrt{c}\xi) = 2c-\frac{1}{3}a\phi+2\sqrt{c}\sqrt{c-\frac{1}{3}a\phi-\frac{1}{12}b\phi^2}, \qquad (7)$$

$$\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)\phi-2c = 2\sqrt{c}\sqrt{c-\frac{1}{3}a\phi-\frac{1}{12}b\phi^2},$$

رابطه فوق را به توان دو می‌رسانیم، در این صورت داریم:

$$\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)^2\phi^2+4c^2-4c\sqrt{c}\,\phi\exp(-\sqrt{c}\xi)-\frac{4}{3}ac\phi = 4c^2-\frac{4}{3}ac\phi-\frac{4}{12}bc\phi^2,$$

این رابطه به عبارت

$$\phi = \frac{4c\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)}{\frac{bc}{3}+\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)^2}. \qquad (8)$$

در رابطه (۸ ) قلهٔ موج از مبداء منتقل شده است به طوری که این عبارت در $\xi$ متقارن نیست. با انتقال قله موج به $\xi = 0$ بر می‌گردیم. در این صورت برای به دست آوردن $\xi_{max}$ باید از $\phi$ نسبت به $\xi$ مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{\delta\phi}{\delta\xi} = 0 \rightarrow \frac{\delta\phi}{\delta\xi} = \left[\left(4c^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{c})\exp(-\sqrt{c}\xi)\right)\left(\frac{cb}{3}+\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)^2\right)-2c(-\sqrt{c})\exp(-\sqrt{c}\xi)\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)\left(4c^{\frac{3}{2}}\exp(-\sqrt{c}\xi)\right)\right] \Big/ \left(\frac{bc}{3}+\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)^2\right)^2 = 0,$$

$$-2\exp(-\sqrt{c}\xi)\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{3}a\right)+\left(\sqrt{c}\exp(-\sqrt{c}\xi+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{cb}{3} = 0,$$

$$c\exp^2(-\sqrt{c}\xi) = \frac{cb}{3}+\frac{1}{9}a^2,$$

$$\exp^2(-\sqrt{c}\xi) = \frac{3cb+a^2}{9c},$$

$$\xi_{max} = -\sqrt{\frac{1}{c}}\log\sqrt{\frac{3cb+a^2}{9c}}.$$

برای متقارن کردن رابطه (۸) تبدیل $\xi \rightarrow \xi-\xi_{max}$ را انجام می‌دهیم.

$$\phi = \frac{4c^{\frac{3}{2}}\exp(-\sqrt{c}\xi)\sqrt{\frac{3cb+a^2}{9c}}}{\frac{cb}{3}+\left(\frac{3cb+a^2}{9}\right)\exp^2(-\sqrt{c}\xi)+\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{3}a\sqrt{c}\sqrt{\frac{3cb+a^2}{9c}}\exp(-\sqrt{c}\xi)},$$

$$\phi = \frac{4c\exp(-\sqrt{c}\xi)}{\sqrt{\frac{3cb+a^2}{9}}\left(1+\exp^2(-\sqrt{c}\xi)\right)+\frac{2}{3}a\exp(-\sqrt{c}\xi)},$$

$$\phi = \frac{6c}{\sqrt{3cb+a^2}\left(\exp(\sqrt{c}\xi)+\exp(-\sqrt{c}\xi)\right)/2+a}$$

$$\phi = \frac{6c}{a+\sqrt{3cb+a^2}\cosh(\sqrt{c}\xi)}. \qquad (9)$$

بدین ترتیب معادله (۱۸) اثبات می‌شود. رابطه (۹) درحالتهای خاص $b=0$ و $a=0$ به ترتیب به جوابهای سالیتونی KdV و mKdV تبدیل می‌شود.

## مراجع


1. H R Miller and P J Witter, *Active Galactic Nuclei* (Berlin: Springer, 1987) 202.
2. E Tandberg-Hansen and A G Emshie, *The Physics of Solar Flares* (Cambridge: Cambridge University Press, 1988) 124.
3. V I Berezhiani and S M Mahajan, *Phys. Rev*. E **52** (1995) 1968.
4. N L Shatashvili, J L Javakhishavili, H Kaya *Astrophysics and Space Science*, **250** (1997) 109-115.
5. C M Surko et al., *Rev. Sci. Instrum*, **57** (1986) 1862.
6. C M Surko and T Murphy, *Phys. Fluids* B **2** (1990) 1372.
7. Y N Nejoh*, Austral J. Phys*, **50** (1997) 309.
8. M Salahuddin, H Saleem and M Saddiq, *Phys. Rev*. E **66** (2002) 36407.
9. P Eslami, M Sarbishei and M Mottaghizadeh, "*KdV, mKdV and non-KdV solitons in three-component plasma*", in Proceedings of the first International Conference on Physics (ICP-2004) January 6-9, Tehran, Iran, pp. 383.
10. Francis F Chen, "*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*", Volume 1: Plasma Physics, 2nd ed. Plenum Press: New York & London, (1983).
11. S L Popel, S V Vladimirov and K P Shukla, *Phys. Plasmas*, **2&3** (1995) 716-719.
12. R Z Sagdeev, *Rev. Plasma Phys*, **4** (1966) 65.
13. H W Press, A S Teukolsky, T W Vetterling and P B Flannery, "*Numerical Recipes in Fortran*", 2 nd ed. Cambridge University Press (1992).
14. T E Sheridan and K E Lonngren, *Appl. Phys. J*., **86** (1999) 3530 - 3535.
15. G C Das and S G Tagare, *Phys. Plasma*, **17** (1974) 1025-1032.
16. M Tajiri and M Tuda, *Phys. Soc. Jpn. J*, **54** (1985) 19-22.
17. T E Sheridan, *Plasma Phys. J*, **60** (19981) 7-28.