یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۶، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۵

# بررسی نوسانگرهای کلاین-گوردن و دیراک در فضای ناجابه‌جایی تحت میدان مغناطیسی ثابت

**بهروز میرزا[۱]، رسول نریمانی، اعظم صادقی و طیبه عامری**

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۱. پست الکترونیکی: b.mirza@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۴/۴/۵ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۹/۸)

**چکیده**

در این مقاله نوسانگرهای کلاین-گوردن و دیراک رادر فضای ناجابه‌جایی تحت میدان مغناطیسی ثابت بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که به ازای میدان مغناطیسی خاصی شکل این نوسانگرها در فضای ناجابه‌جایی به فضای معمولی نگاشته می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** نوسانگر دیراک، فضای ناجابه‌جایی



## ۱. مقدمه

در سالهای اخیر برخی از نظریه‌ها در فضای ناجابه‌جایی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از آنها نظریه میدان کوانتمی ناجابه‌جایی است که با اعمال ضرب ستاره مویال (*) روی توابع فضای معمولی به دست می‌آید [۲ و۱]. با مطالعه یک تک ذره می‌توان به شناختی ساده از ساختار ناجابه‌جایی در نظریه میدان دست یافت. این موضوع انگیزه‌ای برای مطالعه مکانیک کوانتمی ناجابه‌جایی است [۳-۱۰]. در برخی از این مطالعات به مکانیک کوانتمی ناجابه‌جایی (NCQM) در دو بعد و ارتباطش با مسئله لاندائو توجه شده است و نتیجه این بوده که معادله حرکت یک نوسانگر هارمونیک در یک فضای ناجابه‌جایی با معادله حرکت یک ذره در میدان مغناطیسی ثابت و در پایین‌ترین تراز لاندائو مشابهت دارد [۹]. این روابط به مکانیک کوانتمی نسبیتی تعمیم داده شده و این نتیجه به دست آمده که نوسانگرهای دیراک وکلاین-گوردن در یک فضای ناجابه‌جایی رفتاری مشابه با مسئله لاندائودر یک فضای معمولی (جابه‌جایی) دارند [۱۱].

ما در این جا نشان خواهیم داد نوسانگرهای دیراک وکلاین-گوردن در فضای ناجابه‌جایی و در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی با اندازه مناسب به فضای معمولی نگاشته می‌شوند.

فضای ناجابه‌جایی فضای است که مختصات به صورت عملگرهایی در نظر گرفته می‌شوند که از روابط ناجابه‌جایی زیر پیروی می‌کنند:

$$[\hat{x}^{\mu},\hat{x}^{\nu}]=i\,\theta^{\mu\nu}\,, \qquad (۱)$$

$\theta^{\mu\nu}$ یک تانسورپاد متقارن است. می‌توان نشان داد که روابط فوق منجر به تعریف جدیدی از ضرب در فضای توابع می‌شوند که به صورت زیراست:

$$(f*g)(x)= \exp[\frac{i}{۲}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}]f(x)g(y)\big|_{x=y}\,, \qquad (۲)$$

و می‌توان مکانیک کوانتمی ناجابه‌جایی را به صورت زیر تعریف کرد [۳]:

$$H(x,p)*\psi(x)=E\psi(x)\,, \qquad (۳)$$

که با شکل زیر در فضای ناجابه‌جایی معادل است:

$$H(\hat{x},\hat{p})\psi(\hat{x})=E\psi(\hat{x})\,, \qquad (۴)$$

در رابطه فوق $x$ و $p$ عبارتند از:

$$\hat{x}_i = x_i-\frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j \quad , \qquad \hat{p}_i=p_i\,.$$

در قسمت دوم این مقاله ابتدا نوسانگر کلاین- گوردن دو بعدی در یک فضای ناجابه‌جایی تحت اثر میدان مغناطیسی ثابت را بررسی کرده و ارتباطش را با شکل نوسانگر در فضای معمولی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش سوم به بررسی نوسانگر دیراک سه بعدی در فضای ناجابه‌جایی و در حضور میدان مغناطیسی ثابت پرداخته و نگاشت آن را به فضای جابه‌جایی بررسی می‌کنیم.

## ۲. نوسانگر کلاین- گوردن در فضای ناجابه‌جایی و در میدان مغناطیسی خارجی

نوسانگر کلاین- گوردن به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$c^2(\vec{P}-im\omega\vec{r})\cdot(\vec{P}+im\omega\vec{r})\psi=(E^2-m^2c^4)\psi\,, \qquad (۵)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت تا شکل نوسانگری آن نمایان شود:

$$c^2(P^2+m^2\omega^2r^2)\psi=(E^2-m^2c^4-2m\omega\hbar)\psi\,. \qquad (۶)$$

در معادلات فوق $m$ جرم سکون و $\omega$ بسامد کلاسیکی نوسانگر است. اگر این نوسانگر تحت میدان مغناطیسی قرار بگیرد $\vec{P}$ به $\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}$ تغییر می‌یابد. $\vec{A}$ پتانسیل برداری است که برای میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت به صورت $\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2}$ تعریف می‌شود. بنابراین معادله نوسانگر کلاین-گوردن در میدان مغناطیسی به شکل زیر است:

$$c^2((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})-im\omega\vec{r})\cdot((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})+im\omega\vec{r})\psi$$
$$=(E^2-m^2c^4)\psi\,, \qquad (۷)$$

عبارت فوق را می‌توان در فضای ناجابه‌جایی به صورت زیر نوشت:

$$c^2[((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})-im\omega\vec{r})\cdot((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})+im\omega\vec{r})]*\psi$$
$$=(E^2-m^2c^4)\psi\,. \qquad (۸)$$

ضرب ستاره مویال ( * ) معادل است با تبدیل $\vec{r}$ به $\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}$ که در آن $\vec{\theta}$ برداری است که بنا به تعریف به صورت $\theta^{ij}=\varepsilon^{kij}\theta_k$ با $\theta^{ij}$ مرتبط است ( $i,j,k=1,2,3$ ) و می‌توان آن را با چرخش دستگاه مختصات به برداری در امتداد محور $z$ تبدیل کرد $(\vec{\theta}=\theta\hat{k})$.

اگر حرکت را در صفحه $x-y$ در نظر بگیریم، تبدیل $\vec{r}$ به $\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}$ به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$x\rightarrow x-\frac{\theta P_y}{2\hbar} \quad , \quad y\rightarrow y+\frac{\theta P_x}{2\hbar} \qquad (۹)$$

پس معادله نوسانگر کلاین-گوردن دو بعدی با این فرض که میدان خارجی درراستای محور $z$ باشد $(\vec{B}=B\hat{k})$ به شکل زیر در می‌آید:

$$c^2\Big[(1+\frac{eB\theta}{2c\hbar}+(\frac{eB\theta}{4c\hbar})^2+(\frac{m\omega\theta}{2\hbar})^2)P^2+$$
$$(m^2\omega^2+(\frac{eB}{2c})^2)(x^2+y^2)-$$
$$-(\frac{2eB}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar})L_z-(2m\omega\hbar+\frac{m\omega eB\theta}{c}))\Big]\psi=$$
$$(E^2-m^2c^4)\psi\,. \qquad (۱۰)$$

می‌توان با انتخاب مناسب شدت میدان $B$ اثر فضای ناجابه‌جایی را در معادله فوق حذف کرد. این عمل با صفر قرار دادن ضریب $L_z$ انجام می‌شود [۱۱]:

$$\frac{2eB}{c}+\frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}=0\,, \qquad (۱۱)$$

حل این معادله به صورت زیر:

$$\theta=\frac{-\frac{eB}{c}}{(\frac{e^2B^2}{8c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2}{2\hbar})} \qquad (۱۲)$$

و یا میدان مغناطیسی زیر است:

$$B=\frac{-4\hbar c}{e\theta}\left[1-\sqrt{1-\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}}\right], \tag{۱۳}$$

با انتخاب فوق معادله (۱۰) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&c^2\Big[P^2+(m^2\omega^2+(\frac{eB}{2c})^2)(x^2+y^2)-\\&(2m\omega\hbar+\frac{m\omega eB\theta}{c}))\Big]\psi=(E^2-m^2c^4)\psi\ ,\end{aligned} \tag{۱٤}$$

که در آن اثر ناجابه‌جایی مشاهده نمی‌شود. به عبارت دیگر با انتخاب مناسب میدان مغناطیسی اثر ناجابه‌جایی وهمچنین اثر میدان مغناطیسی از بین رفته و نوسانگر در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی بدون میدان مغناطیسی نگاشته می‌شود، البته با ثابتهای فیزیکی جدید (معادله (۱٤) پس از باز تعریف ضرایب قابل مقایسه با معادله (۱۰) در حالت $B=0, \theta=0$ است).

## ۳. نوسانگر دیراک سه بعدی در فضای ناجابه‌جایی و در میدان مغناطیسی خارجی

معادله دیراک سه بعدی به صورت زیر است:

$$[c\vec{\alpha}\cdot\vec{P}+\beta mc^2]\psi(\vec{r})=w\psi(\vec{r}) \tag{۱۵}$$

$\vec{\alpha},\beta$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

که در آن $\sigma_i$ها ماتریسهای پائولی هستند.

با تبدیل $\vec{P}$ به $\vec{P}-im\omega\beta\vec{r}$ نوسانگر دیراک به دست می‌آید: [۱۶-۱۲]

$$[c\vec{\alpha}\cdot(\vec{P}-im\omega\beta\vec{r})+\beta mc^2]\psi(\vec{r})=w\psi(\vec{r})\ , \tag{۱۶}$$

که $m$ و $\omega$ به ترتیب جرم سکون و بسامد نوسانگر هستند.

با اعمال میدان مغناطیسی در معادله (۲) و تبدیل $\vec{P}$ به $\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}$ و در نظر گرفتن پتانسیل برداری $\vec{A}$ به شکل $\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2}$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$[c\vec{\alpha}\cdot((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})-im\omega\beta\vec{r})+\beta mc^2]\psi(\vec{r})=w\psi(\vec{r})\ . \tag{۱۷}$$

با تبدیل ضرب معمولی به ضرب ستاره مویال داریم:

$$[c\vec{\alpha}\cdot((\vec{P}-\frac{e}{c}\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2})-im\omega\beta\vec{r})+\beta mc^2]*\psi(\vec{r})=w\psi(\vec{r}) \tag{۱۸}$$

اثر ضرب ستاره (*) را با تبدیل $\vec{r}\to\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}$ به اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases}c\,\vec{\sigma}\cdot\left(\left[\vec{P}-\frac{e}{2c}\vec{B}\times\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right]+\right.\\ \quad\left.im\omega\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right)\psi_b+mc^2\psi_a=w\psi_a\\ c\,\vec{\sigma}\cdot\left(\left[\vec{P}-\frac{e}{2c}\vec{B}\times\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right]-\right.\\ \quad\left.im\omega\left(\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\hbar}\right)\right)\psi_a-mc^2\psi_b=w\psi_b\end{cases} \tag{۱۹}$$

که در آن $\psi(\vec{r})$ به صورت $\psi(\vec{r})=\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. اگر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{\theta}$ را به صورت زیر در نظر بگیریم ($p_z=0$):

$$\begin{aligned}&\vec{B}=B\hat{k}\\&\vec{A}=\frac{B}{2}(-y\hat{i}+x\hat{j})\\&\vec{\theta}=\theta\hat{k}\end{aligned} \tag{۲۰}$$

پس از حل معادلات جفت شده فوق به دو رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&c^2\Bigg[\left(1+\frac{eB\theta}{2\hbar c}+\frac{e^2B^2\theta^2}{16\hbar^2c^2}+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)P^2+\left(m^2\omega^2+\frac{e^2B^2}{4c^2}\right)r^2\\&-\left(4\frac{m\omega}{\hbar}+\frac{2m\omega eB\theta}{\hbar^2c}\right)S_zL_z-\left(\frac{eB}{c}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}+\frac{e^2B^2\theta}{4\hbar c^2}\right)L_z\\&-\left(2\frac{eB}{c}+2\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}+\frac{e^2B^2\theta}{2\hbar c^2}\right)S_z\\&+\left(2\frac{m\omega\theta}{\hbar^2}+\frac{m\omega eB\theta^2}{2\hbar^3c}\right)S_z(p_x^2+p_y^2)\\&-\left(\frac{m\omega eB\theta}{c}+2m\omega\hbar\right)\Bigg]\psi_a=(w^2-m^2c^4)\psi_a\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&c^2\Bigg[\left(1+\frac{eB\theta}{2\hbar c}+\frac{e^2B^2\theta^2}{16\hbar^2c^2}+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)P^2+\left(m^2\omega^2+\frac{e^2B^2}{4c^2}\right)r^2\\&+\left(4\frac{m\omega}{\hbar}+\frac{2m\omega eB\theta}{\hbar^2c}\right)S_zL_z-\left(\frac{eB}{c}+\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}+\frac{e^2B^2\theta}{4\hbar c^2}\right)L_z\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(2\frac{eB}{c}+2\frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar}+\frac{e^2B^2\theta}{2\hbar c^2}\right)S_z \\
&-\left(2\frac{m\omega\theta}{\hbar^2}+\frac{m\omega eB\theta^2}{2\hbar^3 c}\right)S_z(p_x^2+p_y^2) \\
&-\left(\frac{m\omega eB\theta}{c}+2m\omega\hbar\right)\Bigg]\psi_b=(w^2-m^2c^4)\psi_b \ .
\end{aligned}
$$

(۲۱)

در این جا نیز مشاهده می‌شود که به ازای یک $\theta$ خاص، اثر میدان خارجی می‌تواند اثر ناجابه‌جایی را حذف کند. با صفر قرار دادن ضریب $L_z$ مقدار این $\theta$ و میدان مغناطیسی معادل با آن به دست می‌آید:

$$
B=-\frac{2\hbar c}{e\theta}\left[1-\sqrt{1-\frac{m^2\omega^2\theta^2}{\hbar^2}}\right]
$$

$$
\theta=\frac{-\frac{eB}{c}}{\left(\frac{e^2B^2}{4c^2\hbar}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar}\right)} \qquad (۲۲)
$$

بنابراین با انتخاب مناسب میدان مغناطیسی $B$ می‌توان اثر ناجابه‌جایی و همچنین اثر خود میدان مغناطیسی را حذف کرده و مسئله را به حالتی در فضای جابه‌جایی و بدون میدان مغناطیسی نگاشت. در این حالت مسئله با حالت $B=0, \theta=0$ معادله (۲۱) قابل مقایسه است.

## ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله نگاشت نوسانگرهای نسبتی در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شد که به ازای مقادیر خاصی از میدان مغناطیسی، نوسانگر کلاین- گوردن و دیراک در فضای ناجابه‌جایی به فضای جابه‌جایی نگاشته می‌شوند و میدان مغناطیسی و فضای ناجابه‌جایی می‌توانند در این حالتها اثر یکدیگر را از بین ببرند.

## مراجع


1. M R Douglas and N A Nekrasov, *Rev Mod. Phys*. **73** (2001) 977-1029; hep-th/0106048.
2. N Seiberg and E Witten, *JHEP* **9909** (1998) 003; *hep-th* /9808042.
3. L Mezicescu, *hep-th*/0007046.
4. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu. *Phys. Rev. Lett* . **86** (2001)2716; hep-th/0010175.
5. V P Nair. *Phys. Lett*. B **505**; (2001) 249, *hep-th*/0008027
6. J Gamboa, M Loewe and J C Rojas, *Phys. Rev*. D**64** **(**2001) 067901; *hep-th*/0010220.
7. S Belluchi, et al; *Phys. Lett*. B**522** (2001) 345, *hep-th*/0106138.
8. C Acatrinei, JHEP **0109** (2001) 009; *hep-th*/0107078.
9. J Gamboa, et al; *Int. J. Mod. Phys*. A**17** (2002) 2555-2566; *hep-th*/0106125.
10. J Gamboa, et al; *Mod. Phys. Lett*. A**16** (2001) 2075-2078; *hep-th*/0104224.
11. B Mirza and M Mohadesi, *Commun Theor. Phys*. **42** (2004) 664-668; *hep-th*/0412122.
12. D Ito, K Mori and E Carrieri, *Nuovo Cimeto* **51A** (1967) 1119.
13. M Moshinsky and A Szczepaniak, *J. Phys*. A. *Math. Gen*. **22** (1989) L817-L819.
14. M Moreno and A Zentella, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **22** (1989) L821-L825.
15. J Benitez, et al; *Phys. Rev. Lett*. **64** (1990) 14-1643.
16. P Strange, *Relativistic Quantum Mechanics* (1998) Camb. Univ. Press.