مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۷، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۶

نظریهٔ میدان اسکالر کلاسیک با تقارن همدیس و پتانسیل نامثبت

وحید کمالی و فرهنگ لران

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان – کدپستی ۸۴۱۵۶، ایران

(دریافت مقاله: ۸۵/۸/۱۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۵/۱۲/۱۳)

چکیده

در این مقاله به بررسی گروه همدیس می‌پردازیم و همریخت بودن این گروه و گروه $O(D, 2)$ را خواهیم دید. نظریهٔ میدن اسکالر بـا تقـارن همـدیس و پتانسـیل نامثبـت را در فضای D بعدی مطالعه می‌کنیم و معادلهٔ حرکت را با نسبت دادن گروه تقارنی $O(D-1, 2)$ به جواب و شکستن تقارن انتقالی در همهٔ راستاها حل می‌کنیم. در ادامه با شکسـتن تقارن در برخی راستاها، جوابی را برای معادلهٔ حرکت در فضای ۶ بعدی پیدا می‌کنیم که تنها در ۴ راستا تقارن انتقالی داشته باشد و از آنجا یک نظریهٔ مؤثر ۴ بعـدی را بـه کمـک کنش فضای ۶ بعدی به دست می‌آوریم. در پایان، کلی‌ترین حل معادلهٔ حرکت برای مدل ϕ^4 بی جرم در فضای ۴ بعدی تخت را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: نظریهٔ میدان اسکالر، جفت‌شدگی هم‌دیس، پتانسیل نامثبت، فضای دوسیته

۱. مقدمه

فوبینی[۱] در سال ۱۹۷۶ با هدف یافتن یک مقیاس طول بنیادی در فیزیک هادرونها در مقاله‌ای [۱] به بررسی نظریهٔ میدان اسکالر با تقارن همدیس پرداخت. او در این مقاله ابتدا گروه همدیس را مطالعه کرد و همریخت بودن این گروه با گروه $O(D, 2)$ را نشان داد. در ادامه کنش اسکالر را در فضای D بعدی تعریف کرد که تقارن همدیس داشته باشد و معادلهٔ حرکت حاصل از این کنش را بررسی کرد. از آنجا با استفاده از خواص گروه و تقارنهایی که به جواب نسبت داد این معادله را حل کرد. جواب به دست آمده برای نظریه‌ای که با پتانسیل نامثبت داده می‌شود تقارن دوسیته دارد که زیر – گروه $O(D, 2)$ می‌باشد. با بسط کنش همدیس – متقارن با پتانسیل نامثبت در $D=4$ حول جواب حالت پایه (جواب فوبینی) می‌شود نشان داد که افت و خیز میدان اسکالر حول مسیر کلاسیک در فضا – زمان اقلیدسی تخت با یک نظریهٔ میدان اسکالر همدیس – جفت شده به یک زمینهٔ دوسیته هم ارز است [۲]. نظریهٔ میدان اسکالر با پتانسیل نامثبت هرچند در نظریهٔ میدانهای کوانتمی چندان خوش – تعریف نیست ولی در مدلهای گرانشی شناخته شده است [۳].

در این مقاله در ابتدای بخش اول، گروه همدیس به کمک مولدهای این گروه توضیح داده می‌شود. سپس به بررسی نظریهٔ میدان اسکالر در فضای D بعدی می‌پردازیم که تحت تبدیلات همدیس متقارن است. معادلهٔ حرکت در این مسئله یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی است. برای یافتن جواب آن از یک معادلهٔ خطی که به وسیلهٔ خواص تقارنی جواب به دست می‌آید کمک می‌گیریم. جواب این معادلهٔ خطی در معادلهٔ حرکت نیز صدق می‌کند. در بخش دوم به مطالعهٔ نظریهٔ میدان ۶ بعدی می‌پردازیم. با شکستن تقارنی انتقالی در ۲ بعد به یک نظریهٔ مؤثر در ۴ بعد می‌رسیم. این روش کاهش ابعاد را می‌توان به

۱. Fubini

عنوان جایگزینی برای روش کالوزا – کلاین در نظر گرفت. در بخش سوم به بررسی کلی‌ترین جواب معادلهٔ همدیس متقارن در چهار بعد می‌پردازیم. برای این منظور معادلهٔ حرکت را برای تغییرات نسبی جواب حول حالت پایه می‌نویسیم. این معادله را در چند حالت خاص بررسی می‌کنیم. در نقاط دور از مبدأ به طور تحلیلی نشان می‌دهیم که جواب این معادله نوسانی است و در آخر دورهٔ نوسانات این جوابها را به ازای حالتهای مختلف بررسی خواهیم کرد.

۲. گروه تقارنهای همدیس در D بعد

یکی از کشفهای جالب در مبحث نظریهٔ میدان، یافتن حلهای حالت پایه است که نامتقارن هستند یعنی تعدادی از تقارنهای نظریه را ندارند. برای مثال تقارن کایرال نکلئونهای بدون جرم را معرفی می‌کند. شکستن این تقارن نکلئونهای با جرم فیزیکی را مجاز خواهد کرد که طبیعت نیز این اتفاق را تأیید می‌کند.

نظریهٔ میدان اسکالر به وسیلهٔ یک لاگرانژی و کنش مربوط به آن به طور کامل تعریف می‌شود. لاگرانژی مسئلهٔ ما یعنی نظریهٔ میدان اسکالر با تقارن همدیس به شکل زیر داده می‌شود.

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-g\phi^{\frac{2D}{D-2}},\qquad \mu=0,...,D-1. \qquad (1)$$

میدان اسکالر $\phi(x^\mu)$ در یک فضای مینکوفسکی D بعدی تعریف می‌شود. جبر مربوط به گروه همدیس را می‌توان به کمک مولدهای آن توضیح داد. تعداد این مولدها در فضای D بعدی $\frac{D^2+3D+2}{2}$ است. روابط جابه‌جایی بین مولدها و میدان اسکالر به شکل زیر است [۱]،

$$[\phi(x),M_{\mu\nu}] \;=\; i\left\{x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu\right\}\phi, \qquad (2)$$

$$[\phi(x),\mathcal{D}] \;=\; i\left\{x^\mu\partial_\mu+\frac{D-2}{2}\right\}\phi, \qquad (3)$$

$$[\phi(x),p_\mu] \;=\; i\partial_\mu\phi, \qquad (4)$$

$$[\phi(x),K_\mu] \;=\; i\left\{\left(-x^2\right)\partial_\mu+2x_\mu\left(x^\rho\partial_\rho+\frac{D-2}{2}\right)\right\}\phi. \qquad (5)$$

مجموعهٔ این مولدها یک جبر بسته می‌سازند (یعنی رابطهٔ جابه‌جایی دو مولد ترکیبی از سایر مولدهاست)، این مولدها یک گروه را توصیف می‌کنند. یکی از این روابط جابه‌جایی به شکل زیر است،

$$[M_{\mu\nu},M_{\rho\sigma}]=-i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}-g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu}-g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}), \qquad (6)$$

رابطهٔ بالا به تنهایی گروه لورنتس را توصیف می‌کند که زیر گروه گروه همدیس می‌باشد. مولدهای P_μ و $M_{\mu\nu}$ گروه پوانکاره را می‌سازند. D تولید کنندهٔ تبدیل تجانس است که مؤلفه‌های فضا را در یک عدد ثابت ناصفر ضرب می‌کند. K_μ مولد تبدیلی موسوم به تبدیل خاص می‌باشد.

گروه همدیس با گروه $O\ (D,2)$ هم ریخت است. به منظور بررسی این موضوع روش زیر را دنبال می‌کنیم برای توضیح ساختار گروه همدیس یک عملگر (مولد) برداری جدید به کمک مولدهای گروه همدیس تعریف می‌کنیم،

$$R_\mu=\frac{1}{2}\left(ap_\mu+\frac{1}{a}K_\mu\right), \qquad (7)$$

در این رابطه a یک پارامتر ثابت با بعد طول است، با وارد کردن پارامتر a این رابطه از نظر ابعادی صحیح می‌باشد. رابطهٔ بین R_μ و سایر مولدها را می‌توان با در نظر گرفتن یک بعد فرضی اضافه به سادگی بیان کرد. بعد جدید $(D+1)$ام، زمان – گونه است به این معنا که

$$g_{D+1D+1}=-1,\qquad g_{D+1\mu}=0. \qquad (8)$$

اگر R_μ را به شکل زیر تعریف کنیم،

$$R_\mu=M_{(D+1)\mu}, \qquad (9)$$

می‌شود دید که رابطهٔ جابه‌جایی این عملگر R_μ و مولدهای گروه تبدیلات لورنتس را در بر می‌گیرد تعمیم رابطهٔ (۶) در $(D+1)$ بعد است. این رابطه نشان می‌دهد که مولدهای $(R_\mu, M_{\mu\nu})$ گروه $O\ (D-1,2)$ را می‌سازند. این گروه به زیر گروه گروه همدیس می‌باشد.

سایر مولدهای باقی‌مانده از گروه همدیس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$S_\mu \;=\; \frac{1}{2}\left(ap_\mu-\frac{1}{a}K_\mu\right), \qquad (10)$$

$$S_{D+1} \;=\; -\mathcal{D}. \qquad (11)$$

در ادامه می‌توان با اضافه کردن یک بعد جدید فضا – گونه و تعریف جدید برای S_μ همهٔ مولدها را در یک جبر بسته قرار داد، متریک نظیر این بعد به صورت زیر است،

$$g_{D+2\,D+2}=1, \tag{۱۲}$$

S_μ را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$S_\mu = M_{D+2\,\mu}, \tag{۱۳}$$

در نتیجه S_μ با توجه به تعریف بالا به مجموعهٔ مولدهای $M_{\mu\nu}$ اضافه می‌شود و در رابطهٔ (۶) صدق می‌کند. با تعریفهای جدید برای R_μ و S_μ، همهٔ مولدهای گروه همدیس به کمک رابطهٔ جابه‌جایی گروه لورنتس باهم مربوط می‌شوند (البته بعد فضا در این حالت $D+2$ است). در نتیجه گروه همدیس و گروه دوران در فضای $D+2$ (۲ بعد این فضا زمان – گونه است) همریخت هستند [1].

در ادامه به دنبال یافتن جواب معادله حرکت کلاسیک برای نظریهٔ میدان اسکالر (۱) هستیم که تقارن انتقالی آن در تمام راستاها شکسته شده باشد. معادلهٔ حرکت با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$\Box\phi + 2g\left(\frac{D}{D-2}\right)\phi^{\frac{D+2}{D-2}}=0. \tag{۱۴}$$

به منظور رسیدن به جواب فرض می‌کنیم گروه تقارنی که جواب تحت آن متقارن است $O(D-1,2)$ باشد. این گروه از مولدهای R_μ و $M_{\mu\nu}$ تشکیل شده است. ناوردایی میدان ϕ تحت تبدیلی که با مولد G_i، ساخته می‌شود با رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود،

$$[G_i,\phi(x)]=0, \tag{۱۵}$$

با قراردادن $M_{\mu\nu}$ در رابطهٔ بالا داریم،

$$[M_{\mu,\nu},\phi(x)]=-i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi(x^\mu)=0. \tag{۱۶}$$

این بدان معنی است که ϕ تابعی از $x^2=x_\mu x^\mu$ است. در ادامه متقارن بودن میدان را تحت R_μ بررسی می‌کنیم،

$$[R_\mu,\phi(x)]=0. \tag{۱۷}$$

از رابطه‌های (۴)، (۵)و (۷) نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود،

$$\left(\frac{a^2+x^2}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}+\frac{1}{2}(D-2)x_\mu\phi=0, \tag{۱۸}$$

جوابی که برای این معادلهٔ خطی پیدا می‌شود به شکل زیر است،

$$\phi(x^2)=b\left(\frac{a^2+x^2}{2a}\right)^{-\frac{D-2}{2}}. \tag{۱۹}$$

b در رابطهٔ بالا یک مقدار ثابت است. این جواب در معادلهٔ حرکت نیز صدق می‌کند. با استفاده از معادلهٔ حرکت خواهیم داشت،

$$b=\left(\frac{8g}{(D-2)^2}\right)^{-\frac{D-2}{4}}. \tag{۲۰}$$

به این ترتیب جواب حالت پایه به شکل زیر است،

$$\phi(x^2)=\left(\sqrt{\frac{8g}{(D-2)^2}}\frac{a^2+x^2}{2a}\right)^{-\frac{D-2}{2}}. \tag{۲۱}$$

۳. کاهش ابعاد از ۶ بعد به ۴ بعد

لاگرانژی (۱) نظریهٔ میدان اسکالر D بعدی را توصیف می‌کند که تقارن همدیس دارد. در این بخش توجه خود را به یک فضای ۶ بعدی معطوف می‌کنیم. لاگرانژی فضای ۶ بعدی به شکل زیر بیان می‌شود،

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{g}{3}\phi^3, \qquad \mu=1,\ldots,6. \tag{۲۲}$$

در ادامه برای یافتن نظریهٔ میدان مؤثر چهار بعدی به دنبال جوابی می‌گردیم که در ۴ راستا تقارن انتقالی دارد و در ۲ راستای دیگر تقارن انتقالی ندارد. کاهش ابعاد از $d\to d-1$ در [4] مطالعه شده است. با توجه به شرایطی که از جواب مسئله انتظار می‌رود، بزرگترین زیرگروه ممکن از گروه همدیس را که جواب تحت آن متقارن باشد، تقاضا می‌کنیم. ابعادی که جواب در راستای آنها تقارن انتقالی دارد با اندیس a و b و ابعادی که در راستای آنها تقارن انتقالی وجود ندارد با i و j نشان داده می‌شود. با توجه به انتظار اولیهٔ مسئله خواهیم داشت،

$$[\phi(x),p_a]=0 \quad\Rightarrow\quad \partial_a\phi=0. \tag{۲۳}$$

این عبارت یعنی ϕ نباید تابعی از x^aها باشد و فقط تابعی از x^iها است، با این تفاسیر زیرگروه تقارنی نظیر ϕ تا اینجا مولدهای p_a و M_{ab} را در بر می‌گیرد. برای سادگی در حل مسئله مولدهای M_{ij} را به گروه تقارنی جواب اضافه می‌کنیم. در نتیجه جواب باید تابعی از $|r|$ باشد، (i : ۱، ۲، $|r|^2=x^ix_i$) اگر فرض کنیم که جواب ما تحت تجانس ناورداست آنگاه،

$$\left(x^{\mu}\partial_{\mu}+\frac{D-2}{2}\right)\phi=0. \tag{۲۴}$$

از آنجا که $\partial_a\phi=0$ است خواهیم داشت،

$$\left(x^{i}\partial_{i}+\frac{D-2}{2}\right)\phi=0. \tag{۲۵}$$

جوابی که برای این معادله به دست می‌آید به شکل زیر است،

$$\phi=Ar^{-\frac{D-2}{2}},\qquad r^2=x^ix_i. \tag{۲۶}$$

A به کمک معادلهٔ حرکت زیر قابل محاسبه است،

$$\Box\phi+g\phi^2=0. \tag{۲۷}$$

جواب نهایی به شکل زیر است،

$$\phi_0=-\frac{4}{g}\frac{1}{x^2+y^2}. \tag{۲۸}$$

این جواب دارای گروه تقارنی است که به کمک مولدهای P_a و $M_{\mu\nu}$ و D و K_a ساخته می‌شوند. با توجه به جواب به دست آمده در رابطهٔ (۲۸)، تحت تبدیل تجانس [illegible] x^{μ}،

$$\phi_0\rightarrow\lambda^{-2}\phi_0. \tag{۲۹}$$

این نتیجه با بعد میدان اسکالر در ۶ بعد می‌خواند.

هرگاه کنش فضای ۶ بعدی را به ازای $\phi=\psi+\phi_0$ بازنویسی کنیم، به طوری که ϕ_0 تابعی از x^iهاست (تقارن انتقالی در این راستاها شکسته شده است) و ψ تابعی از x^aهاست، (در این راستاها تقارن انتقالی را نگاه داشته‌ایم) کنش به دست آمده یک نظریهٔ میدان مؤثر ۴ بعدی را توصیف می‌کند.

کنش همدیس - متقارن در ۶ بعد با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$S_6=\int d^6x\left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-\frac{g}{3}\phi^3\right). \tag{۳۰}$$

با قرار دادن $\phi=\psi+\phi_0$ در کنش (۳۰) به رابطهٔ زیر می‌رسیم،

$$S_6=\int d^6x\left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}(\psi+\phi_0)\partial^{\mu}(\psi+\phi_0)-\frac{g}{3}(\psi+\phi_0)^3\right). \tag{۳۱}$$

با ساده کردن، عبارت بالا جملات زیر تبدیل می‌شود،

$$S[\phi_0]+\int d^6x\left(\frac{1}{2}\partial_a\psi\partial^a\psi\right)-g\int\phi_0\psi^2d^6x-g\int\phi_0^2\psi d^6x-\frac{g}{3}\int\psi^3d^6x, \tag{۳۲}$$

اگر بتوانیم کنش بالا را طوری بیان کنیم که بر اساس ψ و در ۴ بعد نوشته شود، توانسته‌ایم از کنش اولیه که معرف نظریه میدان در ۶ بعد است به کنشی برسیم که نظریهٔ میدان در ۴ بعد را توصیف می‌کند. برای این منظور همان طور که بیان خواهد شد باید ψ و g را دوباره تعریف کنیم و روی جملات شامل ϕ_0 انتگرال بگیریم تا دو بعد x^i را از کنش حذف کنیم. در ادامه جملات این کنش و ضرایب آن را بررسی می‌کنیم.

- **جملهٔ انرژی جنبشی:**

$$\int d^6x\left(\frac{1}{2}\partial_a\psi\partial^a\psi\right)=L^2\int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_a\psi\partial^a\psi\right), \tag{۳۳}$$

ضریب عبارت بالا در حد Lهای بزرگ (L بعد طول دارد و حد بالا برای طول در این نظریه می‌باشد) بی نهایت است. این بی نهایت را می‌توان با باز تعریف ψ برطرف کرد،

$$\psi\rightarrow\overline{\psi}=L\psi. \tag{۳۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت،

$$\int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_a\overline{\psi}\partial^a\overline{\psi}\right), \tag{۳۵}$$

در رابطهٔ (۳۵) بعد $\overline{\psi}$، $^{-1}$(طول) است که با بعد طولی میدان اسکالر در چهار بعد توافق دارد. جملهٔ برهمکنش:

$$\frac{g}{3}\int\psi^3d^6x=L^2\frac{g}{3}\int\psi^3d^4x \tag{۳۶}$$

با جای گذاری (۳۴) به رابطهٔ زیر می‌رسیم،

$$\frac{g}{3}\frac{1}{L}\int\overline{\psi}^3d^4x. \tag{۳۷}$$

این عبارت جملهٔ برهمکنشی است. تقاضا می‌کنیم ضریب آن که ثابت جفت شدگی در نظریهٔ چهار بعدی است مقدار محدودی [illegible] ثابت جفت شدگی g را باز تعریف می‌کنیم،

$$\overline{g}=\frac{g}{L}. \tag{۳۸}$$

در نتیجه به رابطهٔ زیر می‌رسیم،

$$\frac{\overline{g}}{3}\int\overline{\psi}^3d^4x. \tag{۳۹}$$

در ادامه از جای گذاریهای (۳۴) و (۳۸) استفاده می‌کنیم.

- **جملهٔ جرمی:**

$$g\int\phi_0\psi^2d^6x=g\int\phi_0d^2x\int\psi^2d^4x, \tag{۴۰}$$

با حل انتگرال $\int\phi_0d^2x$ با جای گذاری آن در رابطهٔ بالا جملهٔ سوم به صورت زیر محاسبه می‌شود (ψ را از رابطهٔ (۳۴) جایگزین می‌کنیم).

$$-8\pi\ln\left(\frac{L}{l}\right)\frac{1}{L^2}\int\overline{\psi}^2d^4x. \tag{۴۱}$$

در رابطهٔ (۴۱) l بعد طول دارد، و حد پایین برای طول در این نظریه می‌باشد. L نیز حد بالاست. عبارت بالا نشان می‌دهد که ضریب جملهٔ درجهٔ ۲ که نشان دهندهٔ جرم در نظریهٔ می‌باشد، به ازای L و lهای محدود یعنی انرژیهای محدود مقدار مشخصی دارد، در نتیجه این نظریه با شکست تقارن انتقالی جرمدار شده است. ولی در حد L بزرگ و l کوچک این نظریه بی‌جرم است، زیرا به ازای این حدود ضریب جملهٔ جرمی صفر می‌شود. البته در این حدها همان طور که جلوتر توضیح می‌دهیم نظریهٔ مؤثر نادرست است.

• **جملهٔ خطی:**

$$g\int \phi_\circ^2 \psi d^6x = g\int \phi_\circ^2 d^2x \int \psi d^4x, \tag{۴۲}$$

با حل انتگرال $\int \phi_\circ d^2x$ و جایگذاریهای (۳۴) و (۳۵) جملهٔ خطی نیز به شکل زیر محاسبه می‌شود،

$$\frac{16\pi}{b^2\overline{g}}\int \overline{\psi} d^4x, \qquad b = Ll. \tag{۴۳}$$

در رابطهٔ (۴۳) b بعد ۲(طول) دارد و فرض می‌کنیم که مقدار آن محدود باشد. جملهٔ خطی به معنای جفت شدن میدان به زمینه است. جلوتر نشان می‌دهیم که این جمله فیزیکی است یعنی با یک انتقال ساده در ψ قابل حذف کردن نیست.

• **جملهٔ ثابت**

هرگاه در رابطهٔ (۳۰) به جای ϕ و $\phi_\circ$ قرار دهیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$S[\phi_\circ] = \int d^6x \left(\frac{1}{2}\partial_i\phi_\circ\partial^i\phi_\circ - \frac{g}{3}\phi_\circ^3\right) = L^4\int d^2x\left(\frac{1}{2}\partial_i\phi_\circ\partial^i\phi_\circ - \frac{g}{3}\phi_\circ^3\right), \tag{۴۴}$$

با جایگذاری $\phi_\circ$ در رابطهٔ بالا و محاسبهٔ انتگرال خواهیم داشت،

$$S_\circ = \frac{128\pi}{3g^2\frac{l^4}{L^4}}, \tag{۴۵}$$

با استفاده از رابطهٔ (۳۸) به نتیجهٔ زیر می‌رسیم.

$$S_\circ = \frac{128\pi L^2}{3\overline{g}^2 l^4}, \tag{۴۶}$$

این جمله نقش یک ثابت را در کنش بازی می‌کند، پس در معادله حرکت کلاسیک تأثیر ندارد. کنش کلی عبارت است از،

$$S_6[\overline{\psi}] = \frac{128\pi L^4}{3\overline{g}^2 l^2} + \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_a\overline{\psi}\partial^a\overline{\psi}\right) + 8\pi\ln\left(\frac{L}{l}\right)\frac{1}{L^2}\int \overline{\psi}^2 d^4x - \frac{16\pi}{b^2\overline{g}}\int\overline{\psi}d^4x - \frac{\overline{g}}{3}\int\overline{\psi}^3 d^4x. \tag{۴۷}$$

این رابطه به شکل زیر بیان می‌کنیم،

$$S_6 = S_\circ + S_4, \tag{۴۸}$$

که S_4 با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$S_4[\overline{\psi}] = \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_a\overline{\psi}\partial^a\overline{\psi}\right) - 8\pi\ln\left(\frac{L}{l}\right)\frac{1}{L^2}\int\overline{\psi}^2 d^4x - \frac{16\pi}{m^2\overline{g}}\int\overline{\psi}d^4x - \frac{\overline{g}}{3}\int\overline{\psi}^3 d^4x. \tag{۴۹}$$

با توجه به رابطهٔ بالا ضریب جملهٔ جرمی (ψ^2) که نشان دهندهٔ جرم در این نظریه می‌باشد، مستقل از ثابت جفت‌شدگی است. از طرفی جملهٔ خطی در این نظریه ظاهر می‌شود، این جمله وجود یک چشمهٔ ثابت در نظریهٔ میدان را بیان می‌کند علی‌الاصول برای حذف این جمله از نظریه باید ψ را به اندازهٔ یک مقدار ثابت تغییر دهیم و کنش را بر اساس ψ تغییر یافته ان[illegible] کنیم. مقدار این ثابت با صفر قرار دادن ضریب جملهٔ خطی در کنش جدید به دست می‌آید. مقدار این ثابت با صفر قرار دادن ضریب جملهٔ خطی در کنش جدید به دست می‌آید. مقدار محاسبه شده برای چنین تغییری در ψ یک عدد موهومی ($\pm i\sqrt{\frac{16\pi}{b^2\overline{g}}}$) است، اما نظریهٔ S به واسطهٔ برهمکنش ϕ^3 تنها برای میدانهای حقیقی تعریف می‌شود. از این رو جملهٔ خطی باقی می‌ماند که بیان کنندهٔ جفت‌شدگی میدانهای چهار بعدی به زمینهٔ $\phi_\circ$ است.

در رابطهٔ (۴۸) جملهٔ ثابت در حد $l \to 0$ یا $L \to \infty$ یک جملهٔ بی نهایت است. این جمله در معادلهٔ حرکت کلاسیک نقش ندارد ولی در محاسبهٔ تابع پارش در نظریهٔ کوانتمی اهمیت دارد. تابع پارش،

$$Z_4 = \exp(S_\circ)Z_6, \tag{۵۰}$$

که تابع پارش در D بعد با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$Z_D = \exp(-S_D). \tag{۵۱}$$

در رابطهٔ (۵۰) هرگاه تابع پارش ۶ بعد را محدود فرض کنیم، تابع پارش در ۴ بعد در حد انرژیهای بسیار زیاد و بسیار کم (نظیر $l \to 0$ و یا $L \to \infty$) بی نهایت می‌شود. در نتیجه روش کاهش بعد بر اساس شکست تقارن انتقالی که بیان شد به نظریهٔ مؤثری منجر می‌شود که در حد انرژیهای محدود و برای طول موجهای $L >> \lambda >> l$ صحیح می‌باشد.

۴. بررسی کلی‌ترین جواب در ۴ بعد

در این بخش معادلهٔ (۱۴) در فضاهای چهار بعدی بررسی می‌شود. رهیافت حل مسئله به این شکل است که ϕ_0 را به میزان $\Delta\phi$ تغییر داده و معادلهٔ حرکت را برای تغییر نسبی $\eta = \dfrac{\Delta\phi}{\phi_0}$ می‌نویسیم. معادلهٔ حرکت در $D=4$ به شکل است،

$$\Box\phi + 4g\phi^3 = 0. \tag{۵۲}$$

تعریف می‌کنیم،

$$\phi = \phi_0 + \eta\phi_0, \qquad \phi_0 = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{a}{a^2+x^2}. \tag{۵۳}$$

معادلهٔ حرکت برای η با جای گذاری ϕ از رابطهٔ (۵۳) به دست می‌آید.

$$\Box(\phi_0 + \eta\phi_0) + 4g(\phi_0 + \eta\phi_0)^3 = 0. \tag{۵۴}$$

با ساده کردن این معادله به رابطهٔ زیر می‌رسیم،

$$\phi_0\Box\eta + \eta\Box\phi_0 + 2\partial^\mu\eta\partial_\mu\phi + 4g\phi_0^3(3\eta + 3\eta^2 + \eta^3) = 0. \tag{۵۵}$$

به کمک معادلهٔ (۵۴) داریم:

$$\phi_0\Box\eta + 2\partial^\mu\eta\partial_\mu\phi + 4g\phi_0^3(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3) = 0. \tag{۵۶}$$

هرگاه فرض کنیم η تابعی از $r^2 = x^\mu x_\mu$ و $\mu = 1, \ldots, 4$ باشد، می‌توانیم از روابط زیر کمک بگیریم،

$$\Box = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr}, \tag{۵۷}$$

از طرفی همواره داریم،

$$\partial^\mu\eta\partial_\mu\phi = \frac{d\phi_0}{dr}\frac{d\eta}{dr}, \tag{۵۸}$$

مشتق ϕ_0 نسبت به r به شکل زیر است،

$$\frac{d\phi_0}{dr} = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{-2ar}{(a^2+r^2)^2}, \tag{۵۹}$$

جملهٔ اول معادلهٔ (۵۶) به شکل زیر است،

$$\phi_0\Box\eta = \sqrt{\frac{8}{g}}\left(\frac{a}{x^2+a^2}\right)\left(\frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\eta}{dr}\right), \tag{۶۰}$$

شکل معادلهٔ دیفرانسیل با جای گذاریهای بالا،

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{a}{x^2+a^2}\left(\frac{d^2\eta}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{4r}{r^2+a^2}\right)\frac{d\eta}{dr}\right)$$
$$+ 4g\phi_0^3\left(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3\right) = 0. \tag{۶۱}$$

هرگاه دو طرف این معادله را بر ϕ_0 تقسیم کنیم خواهیم داشت،

$$\frac{d^2\eta}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{4r}{r^2+a^2}\right)\frac{d\eta}{dr} + 4g\phi_0^2(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3) = 0, \tag{۶۲}$$

برای ساده‌تر شدن بررسی این معادله آن را بر حسب $s = \dfrac{r}{a}$ بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(\frac{3}{s} - \frac{4s}{s^2+1}\right)\frac{d\eta}{ds} + \frac{8}{(s^2+1)^2}\left(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3\right) = 0. \tag{۶۳}$$

حل معادلهٔ دیفرانسیل (۶۳) کار ساده‌ای نیست، این معادله یک معادلهٔ غیر خطی است و روش مشخصی ندارد. از این رو برای به دست آوردن اطلاعاتی در مورد جواب آن باید راههایی را بررسی کنیم که با معادلهٔ ساده‌تری سر و کار داشته باشیم. در این معادله را برای sهای بزرگ بررسی می‌کنیم.

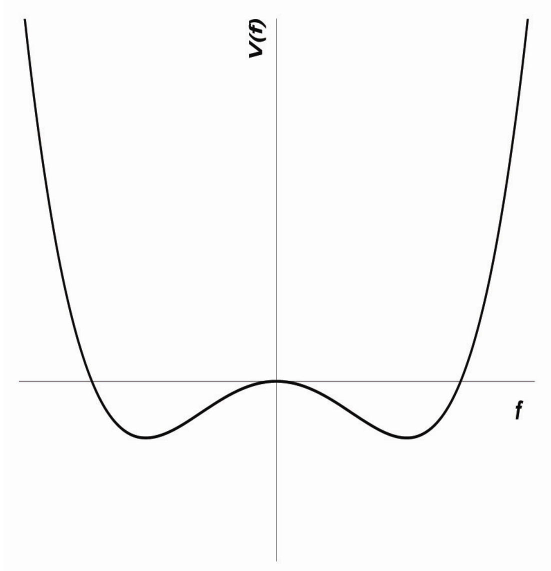
شکل معادلهٔ دیفرانسیل در این حالت به صورت زیر می‌باشد،

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{1}{s}\frac{d\eta}{ds} + \frac{8}{s^4}(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3) = 0. \tag{۶۴}$$

با یک تغییر متغیر $\tau = \ln s$ خواهیم داشت،

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} + 8\exp(-2\tau)(2\eta + 3\eta^2 + \eta^3) = 0. \tag{۶۵}$$

نمودار جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان به کمک نرم افزار Mathematica رسم کرد. البته این نرم افزار این شکل را به کمک روشهای عددی رسم می‌کند. با توجه به نمودار جواب، حدسی که دربارهٔ آن می‌توان زد این است که جواب متناوب است و از طرفی دامنهٔ آن به ضریب $\exp(\tau)$ زیاد می‌شود، این موضوع به راحتی قابل بررسی است. با جایگذاری $\eta = \exp(\tau)f(\tau)$ در معادلهٔ دیفرانسیل، آن را بر حسب $f(\tau)$ می‌نویسیم،



شکل ۱. نمودار $V(f)$، بسته به مقدار E، نوسانی بودن η را به ازای s های بزرگ نشان می‌دهد.

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + (16\exp(-2\tau) - 1)f + 24\exp(-\tau)f^2 + 8f^3 = 0, \tag{66}$$

هر گاه از شرط τهای بزرگ نیز کمک بگیریم شکل این معادله به صورت زیر می‌شود،

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} - f(\tau) + 8f(\tau)^3 = 0, \tag{67}$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به کنشی نسبت داد که پتانسیل مربوط به آن، بر حسب f این گونه است،

$$V(f) = -\frac{1}{2}f^2 + 2f^4. \tag{68}$$

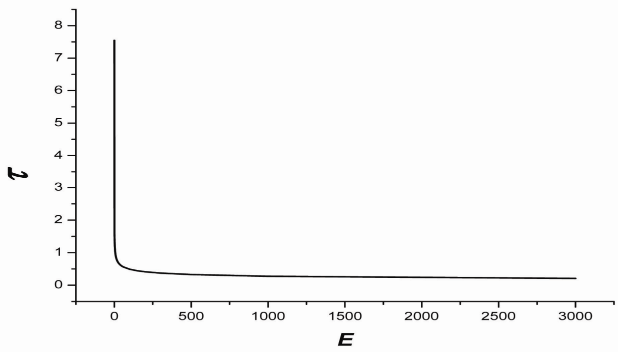
در ادامه پتانسیل بالا را بررسی می‌کنیم. با توجه به شکل نمودار $V(f)$ جوابهای $f(\tau)$ نوسانی می‌باشند. از معادلهٔ (۶۶) داریم:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}f^2 + 2f^4 = E. \tag{69}$$

برای بررسی جوابهای نوسانی $f(\tau)$ معادلهٔ بالا را برای حالتهای زیر بررسی می‌کنیم:

الف) $E > 0$

جواب این معادله یک تابع نوسانی است که نمودار $\tau(E)$ آن با شکل دو داده می‌شود. این نمودار بیان می‌دارد که با افزایش E دورهٔ نوسانات کوچک می‌شود تا به یک حد پایین برسد. هرگاه $E >> 0$، با توجه به شکل پتانسیل می‌توان این گونه تصور کرد



شکل ۲. نمودار دورهٔ نوسانات $\tau(E)$ به ازای $E > 0$.

که نوسانگر قسمت پایین پتانسیل را نمی‌بیند و در واقع تنها تحت تأثیر جملهٔ f^4 است. یعنی شکل معادله در Eهای بزرگ به صورت زیر صحیح می‌شود،

$$\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2 + 2f^4 = E. \tag{70}$$

جواب این معادله به شکل *JacobiSN* است یعنی یک تابع نوسانی با یک دورهٔ نوسان مشخص. دورهٔ نوسان مربوط به *JacobiSN* همان حد پایین دورهٔ تناوب است که نمودار به سمت آن میل می‌کند.

ب) $E < 0$

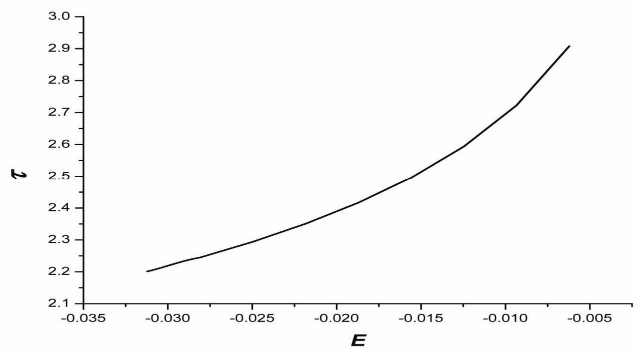
با توجه به شکل یک این قسمت خود شامل محدوده‌های $f > 0$ و $f < 0$ می‌باشد که در هر دو بخش نموار $\tau(E)$ با شکل سه داده می‌شود.

نکته: از آنجا که $\tau = \ln(\frac{r}{a})$ است دورهٔ تناوب $t = \ln(b)$ به معنای b برابر شدن r می‌باشد یعنی هر گاه r به br تبدیل شود. f روی خودش بر می‌گردد.

پ) $E = 0$

با توجه به شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت که با نزدیک شدن به $E = 0$ از E_{min} همواره دورهٔ تناوب زیاد می‌شود تا در $E = 0$ دورهٔ تناوب بی نهایت می‌شود. در $E = 0$، f در معادلهٔ زیر صدق می‌کند،

$$\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}f^2 + 2f^4 = 0. \tag{71}$$



شکل ۳. نمودار دورهٔ نوسانات $\tau(E)$ به ازای $E<0$.

حل این معادله به جواب غیر نوسانی زیر می‌انجامد،

$$f=\frac{۱}{۲}JacobiCN(\tau). \qquad (۷۲)$$

این جواب بیان می‌کند که نوسانگر هرگاه از $f=\frac{1}{2}$ شروع به حرکت کند در $\frac{\tau}{2}\to\infty$ به $f=0$ می‌رسد. این مدت حرکت، نیمی از دوره است. این مطلب را قبلاً با استفاده از شکل ۳ فهمیده بودیم. (به ازای $E=0$ دورهٔ تناوب بی نهایت است.)

۴. ۱. آزمون

آخرین قسمت این بحث مربوط به $\eta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ است که معادل با E_{min} است. هرگاه این η را در رابطهٔ (۵۳) قرار دهیم. جواب ϕ به ازای $r>>a$ به شکل زیر می‌شود.

$$\phi=\frac{۱}{\sqrt{۲g}}\frac{۱}{r}. \qquad (۷۳)$$

این جواب را به ازای همهٔ rها (نه فقط $r>>a$)به دست می‌آید. ϕ جوابی از معادلهٔ (۵۲) است که تحت تجانس متقارن است.

رسیدن به این جواب روش بررسی ما را تأیید می‌کند. در این قسمت با بررسی η کلی‌ترین جواب ممکن برای معادلهٔ حرکت (۱۴) در فضای ۴ بعدی را بررسی کردیم. حل معادلهٔ (۶۳) به طور دقیق ناممکن می‌نماید با وجود این نتایج عددی ارائه شده، رفتار کیفی جواب را به خوبی مشخص می‌نماید.

۵. جمع بندی

الف) در این مقاله کنش همدیس متقارن در ۶ بعد را که دارای جملهٔ پتانسیل ϕ^3 است مطالعه کردیم و با شکست تقارن انتقالی برای تعدادی از راستاها به دنبال روشی برای کاهش ابعاد بودیم. معادلهٔ حرکت این نظریه یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است. جوابی از این معادله را درخواست کردیم که در ۴ راستا تقارن انتقالی داشته باشد. جواب به دست آمده در این حالت تابعی از ۲ بعد است. کنش ۶ بعدی را حول این جواب بسط دادیم. کنش ساده شده فضای ۴ بعدی را توصیف می‌کند. روش کاهش بعد بر اساس شکست تقارن انتقالی به نظریهٔ مؤثری منجر می‌شود که در حد انرژیهای محدود و برای طول موجهای $l<<\lambda<<L$ صحیح می‌باشد.

ب) پتانسیل نظریهٔ میدان همدیس متقارن در ۴ بعد، ϕ^4 است. برای پیدا کردن کلی‌ترین جواب معادلهٔ حرکت، تغییر نسبی جواب حول جواب پایه (جواب فوبینی) را به کمک معادلهٔ حرکت بررسی کردیم. تغییر نسبی جواب در یک معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی صدق می‌کند و جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل را به کمک حل عددی با نرم افزار Mathematica جستجو کردیم. در حد rهای بزرگ به طور تحلیلی نشان دادیم که جوابهای این معادله نوسانی هستند و دامنهٔ آنها به طور نمایی زیاد می‌شود.

مراجع

1. S Fubini, Nuovo Cim. **341** (1976) 512.
2. F Loran, *Phys. Rev.* D **721** (2005) 126003, hep-th/0501189; F Loran and E Bavarsad, Metastable de Sitter vacua from critical scalar theory, hep-th/0506026; F Loran, Observing and open FRW de Sitter universe living in a Minkowski space time, hep-th/0506194; F Loran, Fubini vacua as a classical de Sitter vacua, hep-th/0612089, *Mod. Phys. Lett.* A, in press.
3. J Maldacena, C Nunez, *Int. J. Mod. Phys.* A **16** (2001) 822, hep-th/0007018.
4. F Loran, *Phys. Lett.* B **645** (2007) 377, hep-th/0612255.