مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۷

بررسی تشدید تصادفی با نوفهٔ گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ در سیستمهای دوپایا

امین کیانی و فرهاد شهبازی

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۶/۴/۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۷/۲/۲۶)

چکیده

تشدید تصادفی پدیده‌ای است که در آن پاسخ یک سیستم غیر خطی به سیگنال ضعیف اولیه، توسط یک شدت خاص از نوفه بهینه می‌شود. در این مقاله اثر نوفهٔ تصادفی گوسی با همبستگی بلند برد توانی را بر سیستمهای دوپایا که تشدید تصادفی از خود نشان می‌دهند بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم، همبستگی باعث می‌شود که اولاً نوفه با انحراف معیار کمتر، در این سیستم تشدید ایجاد می‌کند، ثانیا دامنهٔ تشدید کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: تشدید تصادفی، نوفهٔ همبسته، سیستمهای دوپایا

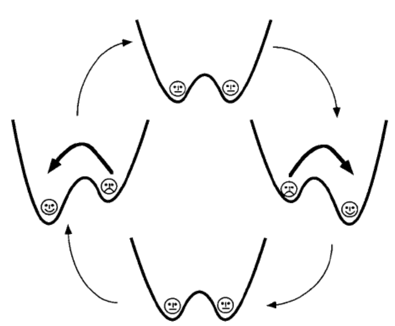
۱. مقدمه

به طور کلی، نوفه به عنوان یک عامل مزاحم و نا منظم شناخته می‌شود که به طور کامل تحت کنترل نمی‌باشد. از آنجا که جدا کردن یک سیستم از محیط خود به طور ایده‌آل امکان‌پذیر نیست، وجود نوفه در سیستمهای فیزیکی اجتناب ناپذیر است. گاهی اضافه کردن نوفه به یک سیستم دینامیکی غیر خطی باعث می‌شود که سیستم منظم‌تر رفتار کند. منظم شدن رفتار سیستم دینامیکی غیرخطی بر اثر اضافه شدن نوفه را تشدید تصادفی [۱] گویند. به عبارت دیگر، اثر تشدید تصادفی را می‌توان به صورت پاسخ منظم سیستم به یک شدت محدود و غیرصفر نوفه، بیان کرد.

عموماً به عنوان یک تصویر شهودی از تشدید تصادفی به حرکت یک ذره براونی در پتانسیل متقارن دوپایا [۲] اشاره می‌شود. در این مدل، نیروی تصادفی وارد بر ذره (نوفه)، باعث گذار آن از یک کمینهٔ چاه پتانسیل به کمینهٔ دیگر می‌گردد. اگر به سیستم یک نیروی تناوبی خیلی ضعیف به صورت $A_0 cos\left(\omega_s t+\varphi\right)$ اضافه شود، مطابق شکل ۱ کمینه‌های چاه پتانسیل به صورت تناوبی (متناسب با فرکانس نیروی اعمال شده) به سمت بالا و پایین جابه‌جا می‌شود. بدین ترتیب چاه پتانسیل از تقارن خود خارج می‌شود. این نیروی تناوبی ضعیف‌تر از آن است که بتواند باعث گذار ذره از یک کمینه به کمینهٔ دیگر چاه پتانسیل شود، بنابراین حضور نوفه در سیستم می‌تواند عامل گذار ذره بین این دو کمینه باشد. البته گاهی نوفه با نیروی تناوبی ضعیف اعمال شده به سیستم، همگام شده که این همگام شدن آماری بین نیروی تناوبی و نیروی تصافی هنگامی‌اتفاق می‌افتد که میانگین زمانی که ذره در یکی از کمینه‌های چاه پتانسیل به سر می‌برد تقریباً برابر با نصف دوره تناوب نیروی تناوبی باشد(شکل ۱). به طور

۱. Stochastic resonance

۲. Bistable Systems



شکل۱. نمایی کلی از تشدید تصادفی در پتانسیل دوپایا.

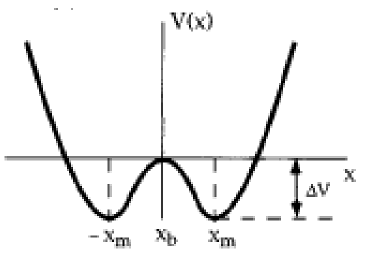
خلاصه، تشدید تصادفی در چاه پتانسیل دوپایـا هنگـامی اتفـاق می‌افتد که نوفه با نیروی تناوبی ضعیف همگام شود.

برای اولـین بـار در سـال ۱۹۸۱، بنـزی[۱] و همکـارانش اثـر تشدید تصادفی را به عنوان یک مدل فیزیکی برای توجیه عـصر یخبندان به کار بردند [۱]. این مدل یک توضیح قابل قبول بـرای تحول آب و هوایی در طول ۷۰۰۰۰۰ سال گذشته ارائه می‌کند. گزارشهای زمین شناسی نشان می‌دهد کـه در طـول ایـن مـدت تقریباً به طور تناوبی هر ۱۰۰۰۰۰ سال یک بار، میـانگین دمـای زمین کاهش چشمگیری داشته است (یعنـی حـدود ۷ دورهٔ یـخ بندان). در این مدل، نوسانات کوچک خـروج از مرکـز مـداری زمین (ناشی از اختلالهای گرانشی با دوره تناوب 10^5 سـال) بـه عنوان نیروی تناوبی ضعیف و تغییـرات ناگهـانی آب و هـوایی (مثل تغییرات آب و هوایی ناشی از تغییرات در تابش خورشید) به عنوان نیروی تصادفی درنظر گرفته می‌شود. ازطرفی، سیـستم آب و هوایی زمین همان چاه پتانسیل دوپایا اسـت کـه یکـی از کمینه‌های آن، مربوط به دمای زمین در عصر یخبندان است.

تشدید تصادفی کاربردهـای دیگـری نیـز دارد، از جملـه در سیستمهای اپتیکی نظیر تلهٔ اپتیکی [۲]، سیستمهای الکترونیکـی و مغناطیـسی نظیـر تـشدید پارامغنـاطیس الکترونـی [۳]، در سیستمهای عصبی و سیستمهای زیستی نظیر کانالهای یونی [۴].

تاکنون در اکثر موارد در تشدید تصادفی از نوفه سفید (یعنی نوفه بدون همبستگی زمانی) استفاده شده است. از طرفی امروزه هم، نوفه رنگی $\frac{1}{f^{\beta}}$ (یعنی نوفه با همبستگی بلند برد توانی) در

۱. Benzi



شکل ۲. پتانسیل دوپایا با فرم کلی $ax^4 - bx^2$ ، کـه کمینـه‌هـای آن در $\pm x$ قرار گرفته‌اند.

بسیاری از سیستمهای زیستی گزارش شده است. برای مثال این نوع نوفه در سیستم حسی گربه[۲] [۵] و سیستم عـصبی خودکـار انسان[۳] [۶] مشاهده شده است. همچنین مرجـع[۷]، بـه بررسـی تشدید تصادفی در سیستمها بـا اسـتفاده از نوفـهٔ رنگـی و غیـر گوسی پرداخته است. از طرفی در تمامی این مراجـع [۸ و۹] بـا مطالعهٔ رفتار سیگنال به نوفه، تشدید تصادفی در مقابل تغییـرات شدت نوفه و همبستگی آن بررسی شده است. بنابراین بـه نظـر می‌رسد که نوفه گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ نقش مهمـی در تـشدید تـصادفی بازی می‌کند [۹ و۱۰].

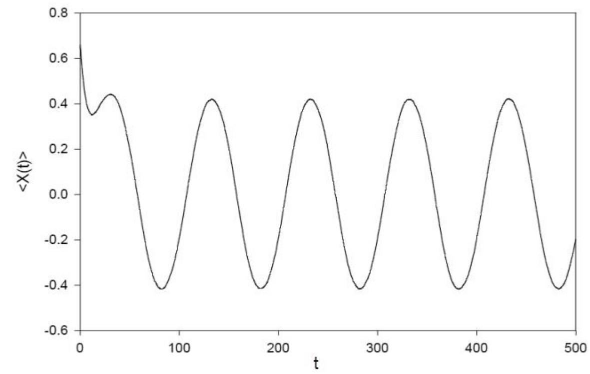
در این مقاله اثر نوفه گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ به ازای $1 \le \beta \le 0$ در ایجـاد تشدید تصادفی در سیستمهای دوپایا بررسی مـی‌شـود و در آن بـه تجزیه و تحلیل این مطلب می‌پردازیم که میزان همبسته بـودن نوفـه چقدر می‌تواند در تشدید تصادفی اثـر داشـته باشـد، سـپس نتـایج به‌دست آمده را با استفاده از تحلیلی که براساس یک سـری تقریبهـا و مدل سازیها پایه ریزی شده است، مقایسه می‌کنیم [۱۱].

۲. مدل کلی

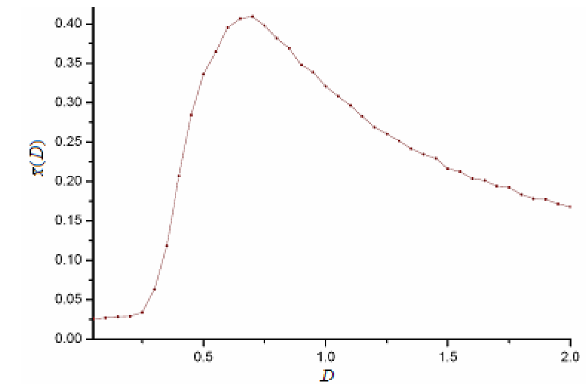
با توجه به شکل ۲، ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانـسیل دوگانـه متقارن (دو پایا)، تحـت تـأثیر شـدید نیـروی اصـطکاک و نیـروی تصادفی $\xi(t)$ قرار دارد. معادلـهٔ حرکـت ذره در ایـن پتانـسیل بـه صورت $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - V'(x) + \xi(t)$ است. با توجـه بـه ایـن کـه نیروی اصطکاک بزرگ است می‌توان از جملـه $\ddot{x}$ در مقابـل سـایر

۲. Cat sensory system

۳. Human autonomic nervous system



شکل۳. نمودار میانگین $x(t)$ بر حسب t برای نوفه سفید و پتانسیل $V(x)=x^{۴}-۲x^{۲}$ و نیروی تناوبی $A_{۰}sin(\omega_s t)$ و با دامنهٔ $A_{۰}=۰/۲$ و $\omega_s=\frac{۲\pi}{۱۰۰}$.



شکل ۴. نمودار $\bar{x}(D)$ بر حسب شدت نوفه برای نوفه سفید، پتانسیل $V(x)=x^{۴}-۲x^{۲}$ و نیروی تناوبی $A_{۰}Sin(\omega_s t)$ با دامنه $A_{۰}=۰/۲$ و $\omega_s=\frac{۲\pi}{۱۰۰}$.

جملات صرف نظر کرد. با باز مقیاس بندی سیستم به صورت $t\to\gamma t$ رابطهٔ حرکت ذره در چاه پتانسیل به شکل $\dot{x}=-V'(x)+\xi(t)$ به دست می‌آید. نیروی تصادفی وارد بر ذره، باعث گذار آن از یک کمینهٔ چاه پتانسیل به کمینهٔ دیگر چاه پتانسیل می‌گردد. نرخ این گذارها به صورت تقریبی توسط رابطهٔ کرامرز[۱] $W_k=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{|V''(x_b)|\,V''(x_m)}\;e^{-\frac{\Delta v}{D}}$، داده می‌شود [۱۱]. در رابطهٔ بالا D شدت یا واریانس نوفه و ΔV ارتفاع سد پتانسیل است که دو کمینهٔ چاه پتانسیل را از هم جدا می‌کند. اگر به سیستم یک نیروی تناوبی خیلی ضعیف به صورت $A_{۰}cos(\omega_s t+\varphi)$ اضافه کنیم، خواهیم داشت [۱۳]:

$$\dot{x}(t)=-\frac{dV(x)}{dx}+A_{۰}cos(\omega_s t+\varphi)+\xi(t), \qquad (۱)$$

در این رابطه، $V(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۴}x^{۴}$ و $\xi(t)$ نیروی تصادفی یا نوفه سفید است.

پتانسیل $V(x)$ دارای دو کمینه در نقاط $x=-۱$ و $x=+۱$ و یک بیشینه در $x=۰$ است. درغیاب نیروی تناوبی، مکان ذره در این پتانسیل حول مقدارهای پایدار افت وخیز می‌کند، به طوری که میانگین $x(t)$ برابر با صفر خواهد شد، اما در حضور نیروی تناوبی، میانگین $x(t)$ غیر صفر بوده و به صورت دوره‌ای تغییر می‌کند. بنابراین در حد مجانبی میانگین $x(t)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید[۱۳].

$$\langle x(t)\rangle=\bar{x}(D)\,cos(\omega_s t-\bar{\varphi}), \qquad (۲)$$

که $\bar{x}(D)=\frac{A_{۰}x_m^{۲}}{D}\frac{۲W_k}{\sqrt{۴W_k^{۲}+\omega_s^{۲}}}$ دامنهٔ میانگین $x(t)$ و $\bar{\varphi}(D)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega_s}{۲W_k}\right)$ (شکل۳ را ببینید).

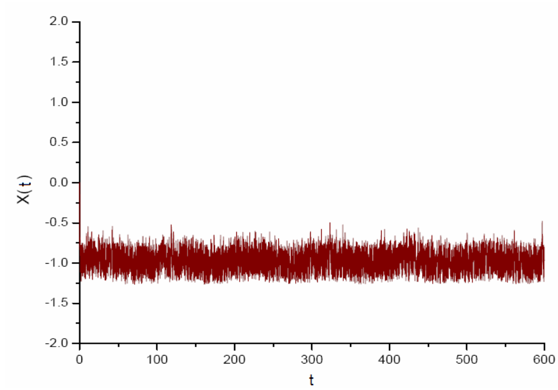
در حد مجانبی اثر شرایط اولیه از بین می‌رود، به عبارت دیگر در این حد قسمت گذرای نمودار میانگین $x(t)$ در نظر گرفته نمی‌شود.

یکی از راههای تعیین شدت مناسب برای ایجاد تشدید تصادفی با نوفه سفید، بررسی دامنهٔ میانگین $x(t)$ یعنی $\bar{x}(D)$ است. در واقع آن شدتی از نوفه که $\bar{x}(D)$ را بیشینه می‌کند، شدت مورد نظر برای ایجاد تشدید تصادفی است. با توجه به شکل ۴، $\bar{x}(D)$ به پاسخ تناوبی سیستم که می‌تواند به وسیلهٔ تغییرات شدت نوفه ایجاد شود، بستگی دارد. $\bar{x}(D)$، در ابتدا با افزایش شدت نوفه، افزایش می‌یابد تا این که به یک بیشینه برسد و از آنجا به بعد به ازای افزایش شدت نوفه کاهش می‌یابد.

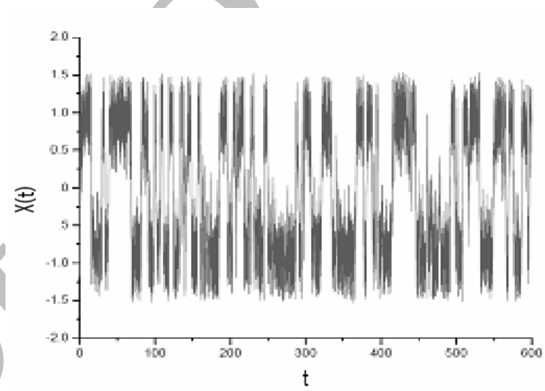
نکتهٔ دیگر آن که، با کاهش فرکانس نیروی تناوبی موقعیت این قله به سمت نوفه‌های با شدت کمتر میل می‌کند. در این مدل شدتی که در آن تشدید تصادفی رخ

---

۱. Kramers



شکل ۵. الف نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D < D_{SR}$.

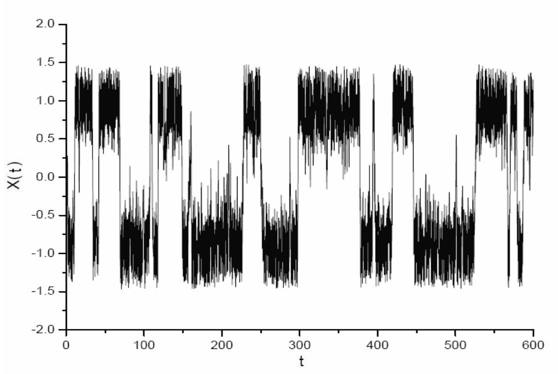


شکل ۵. ج نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D < D_{SR}$.

می‌دهد (D_{SR}) با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$4W_k^2(D_{SR}) = \omega_s^2\left(\frac{\Delta V}{D_{SR}} - 1\right). \qquad (۳)$$

لازم به ذکر است در یک شدت ثابت از نوفه، تغییر در دامنهٔ نیروی تناوبی هیچ تأثیری در موقعیت قلهٔ نمودار $\overline{x}(D)$ برحسب Dایجاد نخواهد کرد. این مطالب را می‌توان به صورت کیفی با بررسی نمودارهای مربوط به $x(t)-t$ مشاهده نمود. در شکل ۵ ـالف، $D < D_{SR}$ بوده و همان‌طور که دیده می‌شود، ذره به این دلیل که شدت نوفه به اندازه کافی بزرگ نیست که بتواند آن را از حالت ۱ به حالت ۲ و بالعکس منتقل کند، مدت زمان زیادی را در یکی از حالتهای ۱ یا ۲ سپری می‌کند. در شکل ۵ – ب، شدت نوفه به گونه‌ای تنظیم شده است که گذار ذره بین دو حالت ۱ و ۲ به صورت تناوبی اتفاق



شکل۵. ب نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D \cong D_{SR}$.

بیفتد. بنابراین در اکثر موارد در یک دورهٔ تناوب نیروی تناوبی، ذره از حالت ۱ به حالت ۲ و بالعکس گذار می‌کند. گذار بین دو حالت ۱ و ۲ اغلب در زمانهایی اتفاق می‌افتد که نرخ گذار در این زمانها مقدار بیشینهٔ خود را داشته باشند. در D_{SR}، میانگین زمان حضور ذره در هر کدام از حالتها تقریباً با هم مساوی بوده و برابر با نصف دوره تناوب نیروی تناوبی است. در شکل ۵ – ج هم، شدت نوفه به قدری زیاد شده است که عملاً نیروی تناوبی هیچ تأثیری در گذار ذره بین حالتها نداشته و تنها این نوفه است که ذره را از یک حالت به حالت دیگر می‌اندازد. اگرچه به دلیل افزایش نیروی تصادفی بر ذره، تعداد گذارها در طول یک دورهٔ تناوب افزایش یافته است اما در این شدت، همگام شدن نوفه با سیگنال که در شکل ۵ – ب پدیدار شده بود، از بین رفته است.

۳. نوفه بلند برد گوسی

قبل از این که به بررسی تشدید تصادفی با نوفه بلند برد گوسی بپردازیم، به نحوهٔ تولید آن به صورت تجربی و محاسباتی اشاره می‌کنیم. به صورت تجربی، نوفه بلند برد را می‌توان با عبور دادن نوفه سفید از یک سری فیلترهای خاص تولید کرد. این فیلترها دارای این خاصیت هستند که یک سری از فرکانسهای خاص را از خود عبور می‌دهند و بسته به این که چه میزانی از فرکانسها را از خود عبور داده اند، همبستگی نوفه خارج شده متفاوت خواهد بود. در برق و مخابرات از نوفه برای تحلیل سیگنالهای سیستم استفاده می‌کنند. در [۱۴] مدلی ارائه شده است که طی آن تنها به تولید نوفهٔ بلند برد

$\frac{1}{f}$ به صورت تحلیلی پرداخته شده است. در مرجع[۱۱] هم براساس مرجع [۱۴] مدلی دیگر برای تولید نوفهٔ همبسته معرفی و سپس با استفاده از آن به بررسی تشدید تصادفی با استفاده از تقریبهای گوناگون در سیستم دوپایا می‌پردازد. اما به صورت محاسباتی، یکی از روشهایی که برای تولید نوفه بلند برد با رفتار توانی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد روش فیلتر کردن فوریه[۱] است. این روش شامل فیلتر کردن مولفه‌های فوریه از یک رشتهٔ غیر همبسته از اعداد تصادفی با فیلتر توانی مناسب به منظور وارد کردن همبستگی بین متغیرها است.

۳.۱. روش فیلتر کردن فوریه

اعداد u_i و $i=1,2,...$ را در نظر بگیرید که همبستگی خاصی ندارند. تابع همبستگی عبارت است از $\langle u_i u_{i+1} \rangle \sim \delta_{l,0}$ که $\delta_{l,0}$ دلتای کرونکر است. هدف این است که با استفاده از u_iها اعداد η_j را با تابع همبستگی توانی بلند برد، $C(l)$، به صورت زیر تولید کنیم.

$$C(l) = \langle \eta_i \eta_{i+l} \rangle \sim l^{-\gamma}, \qquad (۴)$$

که γ نمای همبستگی است و همبستگیهای بلند برد، به بازه $0<\gamma<1$ مربوط می‌شوند. $S(q)$ را به عنوان تبدیل فوریه $C(l)$ تعریف می‌کنیم که شکل مجانبی آن عبارت است از:

$$S(q) = \langle \eta_q \eta_{-q} \rangle \sim q^{\gamma-1} = q^{-\beta} \qquad q \to 0 \qquad (۵)$$

در این رابطه η_q تبدیل فوریهٔ η_i است و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\eta_q = [S(q)]^{1/2} u_q, \qquad (۶)$$

u_qها ضرایب تبدیل فوریه u_iها هستند.

۳.۲. الگوریتم عددی FFM

۱- عبارت یک بعدی u_i که اعداد تصادفی غیر همبسته با توزیع گوسی و میانگین صفر هستند را تولید کرده، ضرایب تبدیلات فوریه u_q را محاسبه می‌کنیم.

۲- از دو رابطهٔ (۵) و (۶) استفاده می‌کنیم.

۳- تبدیل فوریهٔ معکوس η_q را محاسبه کرده و η_i را به دست می‌آوریم. این عبارت در فضای حقیقی با تابع همبستگی توانی خواسته شده در رابطهٔ (۴) معادل است [۱۵].

۴. محاسبات و نتایج

علاقمندی ما برای استفاده از روش FFM از اینجا ناشی می‌شود که معادلهٔ فوکر پلانک را برای نوفهٔ گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ و $0 \le \beta \le 1$ نمی‌توان به دست آورد و بنابراین یک رابطهٔ تحلیلی دقیق برای نرخ گذار ذره و میانگین $x(t)$ در داخل این چاه پتانسیل با نوفه بلند برد گوسی نداریم. البته در [۱۱] با استفاده از تئوری زنجیرهٔ مؤثر مارکوف [۱۶و ۱۷] رابطه‌ای تقریباً تحلیلی برای معادله فوکر پلانک برای نوفهٔ همبسته ارائه شده است.

مسئله‌ای که ما به آن می‌پردازیم، بررسی تشدید تصادفی با نوفه گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ و مقایسه نتایج به‌دست آمده با استفاده مدل ارائه شده در [۱۱] است. می‌خواهیم ببینیم که نوفهٔ همبسته با رفتار توانی در تشدید تصادفی چه اثری می‌تواند داشته باشد.

همان طور که در قسمت قبل مشاهده شد، یکی از راههای تعیین D_{SR} برای ایجاد تشدید تصادفی با نوفهٔ سفید، بررسی رفتار دامنهٔ میانگین $x(t)$ برحسب شدتهای مختلف نوفه می‌باشد. البته روشهای دیگری هم برای این منظور وجود دارد (مثل بررسی رفتار تابع SNR[۲] [۷و ۱۱و ۱۳])، که در این مقاله به این موضوع پرداخته نمی‌شود.

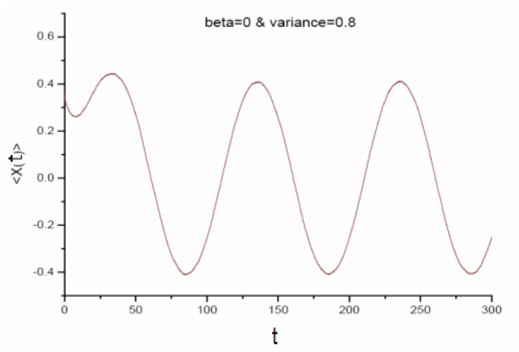
اگر به بررسی رفتار میانگین $x(t)$ ذره در سیستم دوپایا با نوفهٔ بلند برد گوسی بپردازیم، مشاهده می‌کنیم که میانگین $x(t)$ در ابتدا یک حالت گذرا دارد و با گذشت زمان به صورت تناوبی تغییر می‌کند(شکل ۶).

اگر حد مجانبی میانگین $x(t)$ را برای نوفه بلند برد گوسی در نظر بگیریم (یعنی از قسمت گذرای نمودار صرف نظر کنیم) به خوبی دیده می‌شود که رفتاری کاملاً شبیه با میانگین $x(t)$ برای نوفهٔ سفید دارد. پس معقول است که از دامنهٔ میانگین $x(t)$، برای تعیین D_{SR} نوفه گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ استفاده کنیم.

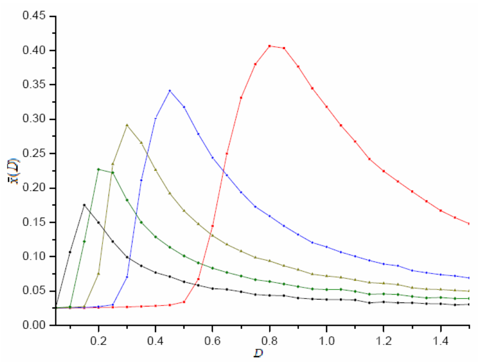
---

۱. Fourier Filtering Method (FFM)

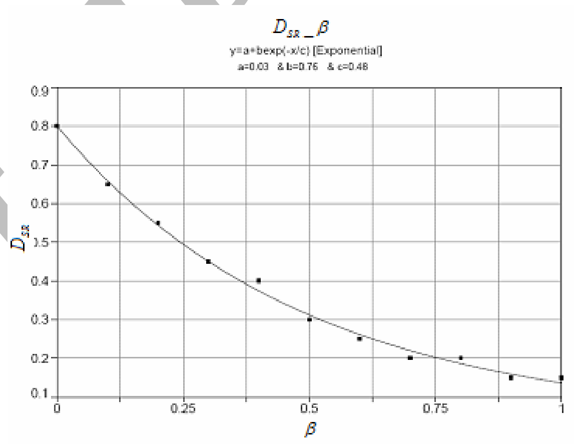
۲. Signal to Noise Ratio



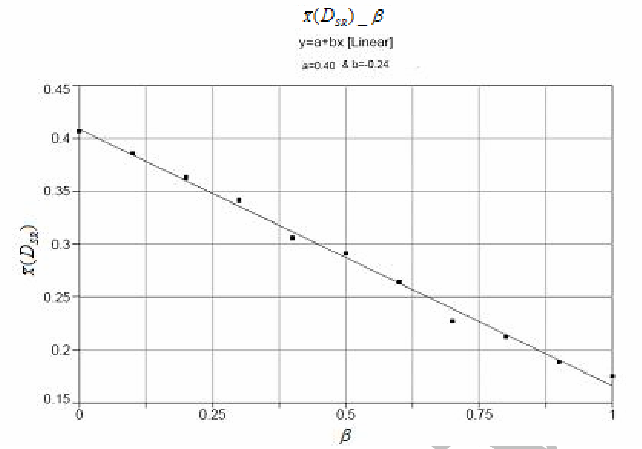
شکل ۶. نمودار میانگین $x(t)$ بر حسب t با نوفهٔ بلند برد گوسی برای $\beta=0$ و $\beta=0/1$. $V(x)=x^4-2x^2$ و نیروی تناوبی $A_0\sin(\omega_s t)$ و $A_0=0/2$ و $\omega_s=\frac{2\pi}{100}$.



شکل ۷. نمودار $\bar{x}(D)$ بر حسب شدت نوفه برای نوفهٔ بلند برد گوسی، پتانسیل $V(x)=x^4-2x^2$ و نیروی تناوبی $A_0 Sin(\omega_s t)$ با دامنهٔ $A_0=0/2$ و $\omega_s=\frac{2\pi}{100}$ و به ازای $\beta=0, 0/3, 0/5, 0/7, 1$ به ترتیب از راست به چپ.



شکل ۸. نمودار β بر حسب D_{SR}.



شکل۹. نمودار β بر حسب دامنهٔ تشدید.

نتیجهٔ محاسبات نشان می‌دهد که اگر نمای β را افزایش دهیم، موقعیت قلهٔ نمودار به سمت شدتهای کم جا به جا می‌شود (شکل ۷). بدین معنا که هرچه میزان همبستگی نوفه افزایش یابد (افزایش β) شدت لازم برای نوفه، که بتواند تشدید تصادفی ایجاد کند کاهش می‌یابد. بنابراین حتی می‌توان با استفاده از یک نوفهٔ بلند برد مناسب با شدت کم تشدید تصادفی ایجاد نمود. وضعیت واریانس تشدید (D_{SR}) به ازای βهای مختلف در شکل (۸) زیر رسم شده است.

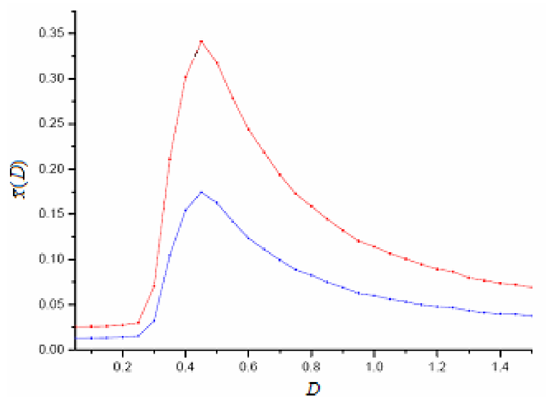
با برازش نمودار شکل ۸ این نتیجه به دست می‌آید که همبستگی نوفه با D_{SR} رابطهٔ نمایی دارد. که از این رابطه می‌توان D_{SR} را به ازای هر مقدار دلخواهی از β به طور تقریبی به دست آورد. همچنین برازش نمودار دامنهٔ تشدید بر حسب β (شکل ۹) این نتیجه را می‌دهد که همبستگی نوفه با دامنهٔ تشدید رابطه‌ای تقریباً خطی دارد.

نکتهٔ دیگر این که، برای نوفه گوسی $\frac{1}{f^{\beta}}$ مشابه نوفه سفید، تغییر دامنهٔ نیروی تناوبی هیچ تأثیری در محل قله در نمودار $\bar{x}(D)-D$ نخواهد داشت (شکل ۱۰).

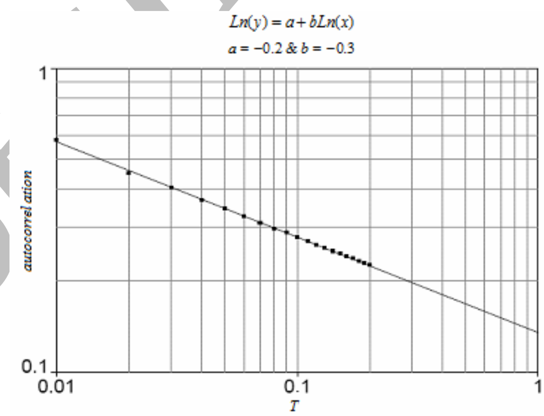
اکنون به بررسی تشدید تصادفی با استفاده از مدلی که در [۱۱] ارائه شده است می‌پردازیم. نقطهٔ شروع برای بررسی تشدید تصادفی در این روش دو معادلهٔ زیر است:

$$\dot{x}=f(x)+y(t), \qquad (۷)$$

$$\dot{y}=\frac{u(y)}{\tau}+\frac{D}{\tau}v(y)\xi(t), \qquad (۸)$$



شکل ۱۰. نمودار $\bar{x}(D)$ بر حسب شدت نوفه برای نوفه بلند برد گوسی، پتانسیل $V(x)=x^{۴}-۲x^{۲}$ و نیروی تناوبی $A_0 Sin(\omega_s t)$ با دامنه‌های $A_{\circ}=۰/۱$ (نمودار پایین) و $A_{\circ}=۰/۲$ (نمودار بالا) و $\omega_s=\frac{۲\pi}{۱۰۰}$ به ازای $\beta=۰/۳$.



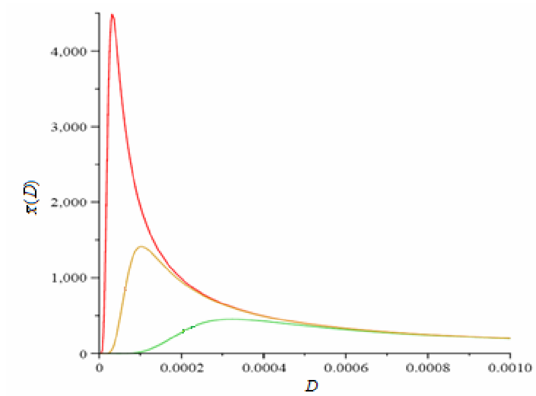
شکل ۱۲. نمودار خودهمبستگی نوفهٔ بلند برد گوسی با رفتار توانی به ازای $\beta=۰/۷$.

که معادلهٔ (۷) مربوط به تغییرات مکان ذره در چاه پتانسیل و معادلهٔ (۸) هم همان معادلهٔ معروف لانژون است. در این روابط $U_{\circ}(x)=\int^{x} f(z)\,dz=\frac{x^{۴}}{۴}-\frac{x^{۲}}{۲}$، $\xi(t)$ نوفهٔ سفید و τ هم گسترش زمانی است. در معادلهٔ (۸) هم یک پتانسیل جدید به صورت $V(y)=-\int^{y} u(x)\,dx$ در نظر گرفته شده است.

در اینجا با توجه به در نظر گرفتن روابط زیر برای $u(y)$ و $v(y)$، مقادیر به‌دست آمده از معادلهٔ دوم را به عنوان نوفهٔ مورد نظر در رابطهٔ اول مورد استفاده قرار می‌دهد.

$$u(y)=\alpha y^{۳}-\beta y^{۴}+\mathrm{sgn}(y)y^{۴}, \qquad (۹)$$

$$v(y)=|y|^{\mu}+c. \qquad (۱۰)$$



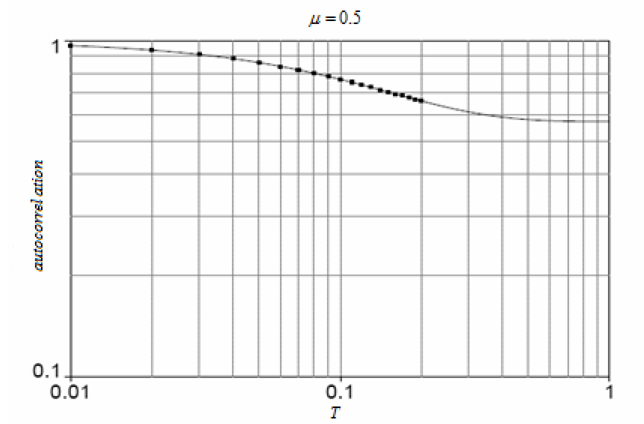
شکل ۱۱. نمودار $\bar{x}(D)$ بر حسب شدت نوفه برای نوفه بلند برد رابطهٔ (۸) به ازای $\mu=۰/۷۵,\ ۱/۵,\ ۲/۵$ (به ترتیب از چپ به راست).

در این روابط α وβ ضرایب ثابت دلخواه و c و μ هم ضرایب ثابت مثبت هستند. که در آن به ازای $\mu=۲/۵,\ ۱/۵$، $\beta=۱,\ ۰/۷۵$ به دست می‌آید[۱۴و۱۱]. در این روش با استفاده از زنجیرهٔ موثر مارکوف و تقریب دوحالتی برای دامنهٔ میانگین نمودار شکل ۱۱ را به‌دست می‌آوریم.

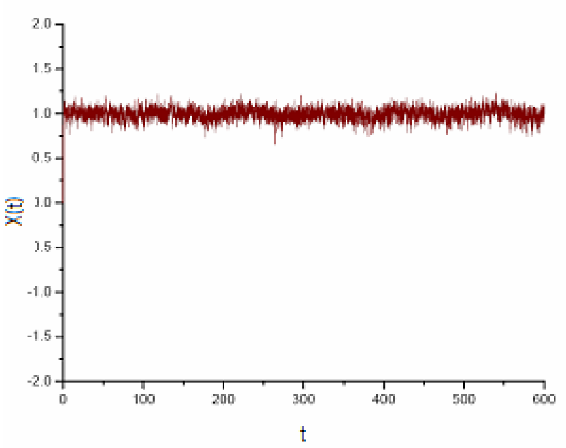
با توجه به شکل ۱۱ با افزایش μ (یا افزایش β) شدت تشدید افزایش(عکس نتیجهٔ به دست آمده از نوفهٔ همبسته بلندبرد با رفتار توانی) و دامنهٔ تشدید کاهش می‌یابد.

اکنون به بررسی خود همبستگی نوفه به کار برده شده در هر دو روش می‌پردازیم. در مورد نوفهٔ بلند برد، خود همبستگی به صورت رابطهٔ (۵) است. بنابراین انتظار داریم که شیب نمودارخود همبستگی بر حسب لگاریتم l برابر با $\beta-۱$ باشد (شکل ۱۲). در حالی که نمودار خود همبستگی نوفهٔ به‌دست آمده از رابطهٔ(۸) به ازای $\mu=۰/۵$ به صورت شکل ۱۳ است. در این نمودار به وضوح مشخص است که رفتار توانی وجود ندارد. بنابراین نوفهٔ به‌دست آمده از الگوریتم FFM دقیقاً رفتار توانی داشته و دلیلی ندارد که نتیجهٔ به دست آمده در مورد تغییرات همبستگی با شدت تشدید با نوفهٔ به دست آمده از رابطهٔ (۸) یکسان باشد.

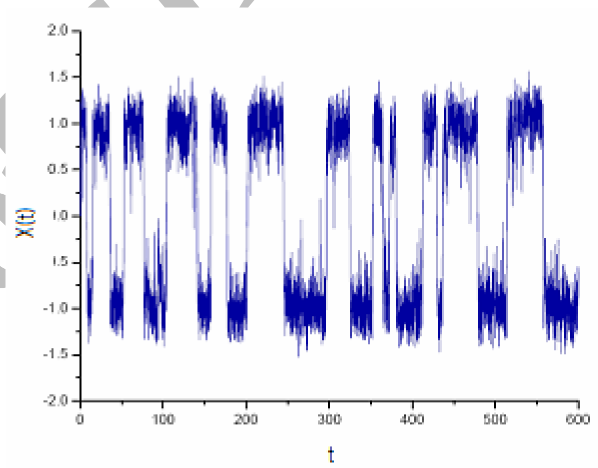
در پایان، نمودارهای $x(t)-t$ به ازای $\beta=۰/۳$ و برای $D<D_{SR}$، $D\cong D_{SR}$ و $D>D_{SR}$ در شکل ۱۴ رسم شده است.



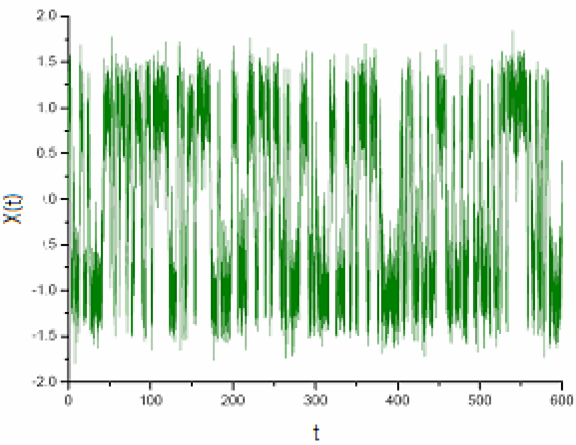
شکل ۱۳. نمودار خودهمبستگی نوفهٔ بلند برد رابطهٔ(۸) به ازای $\mu = ۰/۵$.



شکل ۱۴- الف. نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D < D_{SR}$ و $\beta = ۰/۳$.



شکل ۱۴- ب. نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D \cong D_{SR}$ و $\beta = ۰/۳$.



شکل ۱۴- ج. نمودار $x(t)$ بر حسب t برای $D > D_{SR}$ و $\beta = ۰/۳$.

۵. نتیجه‌گیری

از بررسی نمودارهای به دست آمده نتیجه می‌شود که افزایش همبستگی نوفهٔ بلند برد گوسی با رفتار توانی باعث بهبود تشدید تصادفی می‌شود، به عبارت دیگر شدتی که برای ایجاد تشدید تصادفی لازم است، کاهش می‌یابد. این در حالی است که رفتار توانی نوفه در شدت تشدید ایجاد شده، اهمیت دارد. به طوری که برای نوفه‌های همبسته، ولی بدون رفتار توانی همان طور که [۷و۱۱] نشان داده شده است با افزایش همبستگی، شدت تشدید افزایش می‌یابد. از طرفی افزایش همبستگی باعث کاهش دامنه میانگین $x(t)$ می‌شود. ممکن است این یک جنبهٔ منفی برای تشدید تصادفی با نوفهٔ بلند برد گوسی در نظر گرفته شود که می‌توان این کاهش میانگین دامنه را با افزایش دامنهٔ نیروی تناوبی ضعیف جبران کرد.

در پایان بررسی تشدید تصادفی با نوفهٔ q گوسی را به عنوان یک مسئلهٔ قابل بررسی پیشنهاد می‌کنیم. که در این نوع نوفه تغییرات q باعث تغییر تابع توزیع نوفه، از گوسی $(q = ۱)$ به توزیع یکنواخت $(q \to -\infty)$ می‌شود [۱۹].

قدردانی

از آقای مهدی دهقانی به خاطر راهنماییهای ایشان تشکر می‌شود.

مراجع

1. R Benzi, A Sutera and A Vulpian, *J. Phys*. A **14** (1981) L453.
2. A Simon and A Libchaber, *Phys. Rev. Lett*. **68** (1992) 3375.
3. L Gammaitoni, M Martinelli, L Pardi and Santucci, *Phys. Rev. Lett*. **67** (1991) 1799.
4. S M Berzurkov and I Vodyanoy, *Nature* **378** (1995) 363.
5. A L Goldberger, D R Rignej and B J West, *Sci. Am*. **262** (1990) 34; J B Bassingthwaighte, L S Lievovitch and B J West, *Fractal Physiology*, Oxford University Press, New York (1994).
6. Y Yamamoto and R L Hughson, *Physica* D **68** (1993) 250.
7. M A Fuentes, R Toral, H S Wio, *Physica* A **295** (2001) 114.
8. Peter Marka, Zoltan Gingl, Tamas Fulei, *Phys. Lett*. A **317** (2003) 228.
9. Daichi Nozaki, Yoshiharo Yamamoto, *Phys. Lett*. A **243** (1998).
10. Daichi Nozaki, James J Collins, and Yoshiharu Yamamoto, *Phys. Rev*. E**60** (1999).
11. M A Fuentes, H S Wio, *Eur. Phys. J.* B**52** (2006) 249.
12. H Kramers, *Physical* (Utrecht) **7** (1940) 284.
13. L Gammaitoni, P Hanggi, P Jung, F Marchesoni, *Rev. Mod. Phys*. **70** (1990) 1.
14. B Kaulakys, J Ruseckas, *Phys. Rev*. E **70** (2004) 020101.
15. H A Maks, S Havlin., M Schwartz. And H E Stanley *Phys. Rev*. E **53** (1996).
16. H S Wio, P Colet, L Pesquera, M A Rodringuez, M. San Miguel, *Phys. Rev*. A **40** (1989) 7312.
17. P Jung, P Hanggi, *Phys. Rev*. A **35** (1987) 4464.
18. C W Gardinar, *Handbook of Stochastic Method for Physics, Chemistry and Natural Sciences,* Springer-Verlag, Berlin (1985)
19. W Thistleton, J A Marsh, K Nelson, C Tsallis, cond-mat/0605570.