مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۰، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۹

اتلاف در مدارهاي الكتريكي كوانتومي مزوسكوپيRLC

حسن پهلواني و آرش رزمجو

گروه فيزيك، دانشگاه قم

پست الكترونيكي: h-pahlavani@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۲/۲۰ ؛ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۲/۱۶)

چكيده

تئوري كوانتومي براي يك مدار الكتريكي مزوسكوپي LC با بار گسسته بررسي شده است. با در نظر گرفتن نظريـة كالـديرلا-كانـاي در مطالعـة سيـستم‌هـاي اتلافـي مكانيـك كوانتومي، جريان ماندگاري و طيف انرژي يك مدارالكتريكي كوانتومي مزوسكوپي LC داراي مقاومت R تحت تأثير يك ميدان خارجي وابسته به زمان محاسبه شده است.

واژه‌هاي كليدي: گسستگي بار، مدارهاي الكتريكي مزوسكوپي ، سيستم‌هاي اتلافي، جريان ماندگاري

۱. مقدمه

هامیلتونی کلاسیکی یک مدار الکتریکی LC غیر اتلافـی تحـت تأثیر یک پتانسیل اختیاری وابسته به زمـان $\varepsilon(t)$ بـه شـکل زیـر است

$$H(t)=\frac{۱}{۲L}p^{۲}+\frac{۱}{۲C}q^{۲}+\varepsilon(t)q. \tag{۱}$$

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{۲}$$

که در آن L خودالقا، C ظرفیت مدار، q متغیر بار الکتریکی و $p(t)=L\frac{dq}{dt}$ جریان الکتریکی مدار اسـت. بـا اسـتفاده از ایـن هامیلتونی می‌توان معادله‌ای برای تحول بار الکتریکی به صورت زیر به‌دست آورد

$$\frac{d^{۲}q(t)}{dt^{۲}}+\frac{۱}{LC}q(t)-\frac{۱}{L}\varepsilon(t)=۰, \tag{۳}$$

از آنجایی که معادلهٔ کلاسیکی حرکـت مـدار الکتریکـی LC بـا نوسانگر هماهنگ یکسان است، به طور مشابه با آن ، مـی‌تـوان مدارهای الکتریکی را کوانتیده کرد[۱] بنابراین داریم:

$$\hat{H}=\frac{۱}{۲L}\hat{p}^{۲}+\frac{۱}{۲C}\hat{q}^{۲} \tag{۴}$$

که در آن متغیرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ در رابطهٔ جابـه‌جـایی زیـر صـدق می‌کنند

$$\left[\hat{q},\hat{p}\right]=i\hbar. \tag{۵}$$

مقاومت الکتریکی (قانون اهـم)یکـی از پارامترهـای اساسـی در مدارهای الکتریکی است و نقش مهمـی در رسـانش الکتریکـی دارد. در مکانیک کوانتومی روش‌هـایی بـرای بررسـی کـوانتش سیستم‌های اتلافی وجود دارد[۲-۹]. یکی از این روش‌ها که در آن با ارائهٔ هـامیلتونی بـرای سیـستم اتلافـی کـوانتش کانونیـک به‌طور پدیده شناختی از این سیـستم بـه عمـل مـی‌آیـد، نظریـهٔ کالدیرلا-کانای [۲-۵] است. بر این اساس مـی‌تـوان هـامیلتونی مدارLC شامل مقاومت R را به شکل زیر نوشت

$$\hat{H}=\frac{۱}{۲L}\hat{p}^{۲}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{۱}{۲C}\hat{q}^{۲}e^{\frac{R}{L}t} \tag{۶}$$

که با استفاده از آن می‌توان معادلهٔ حرکت زیر را به‌دست آورد

$$L\frac{d^{2}\hat{q}}{dt^{2}}+R\frac{d\hat{q}}{dt}+\frac{\hat{q}}{C}=0 \qquad (۷)$$

با توجه به اهمیت اتلاف در مدارهای الکتریکی، ما در این مقاله هامیلتونی کالدیرلا-کانای را برای مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC به کار خواهیم برد و در مورد دینامیک آن بحث می‌کنیم. مدارهای کوانتومی LC [۱۰-۲۰] یک مدل ساده از سامانه‌های مزوسکوپی هستند. در چنین سامانه‌هایی رفتار الکترون به صورت موجی است و این رفتار به شکل هندسی نمونه بستگی دارد. وقتی ابعاد سامانه در حدود طول همدوسی حامل‌هاست (طول همدوسی حامل‌ها حداکثر فاصله‌ای است که یک ذره می‌تواند با حفظ اطلاعات مربوط به فاز خودطی نماید) برای بررسی دینامیک سامانه، باید مکانیک کوانتومی به کارگرفته شود. در این حالت گسسته بودن بار (بارها مضارب درستی از بار الکترون هستند) در بررسی مدارهای کوانتومی مزوسکوپی باید به حساب آورده شود. برای اولین بار لی و چِن یک نظریهٔ کوانتومی برای مدارهای مزوسکوپی با بار گسسته ارائه نمودند [۱۰]. در این نظریه گسسته بودن بار الکتریکی توسط عملگر خودالحاق بار $\hat{q}$ که دارای یک طیف گسسته است در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله با در نظر گرفتن مقاومت الکتریکی به عنوان یکی از پارامترهای اصلی در مدارهای الکتریکی مزوسکوپی کوانتومی LC که تحت تأثیر یک میدان خارجی اختیاری وابسته به زمان قرار دارد به بررسی ویژگی‌های دینامیک کوانتومی آنها می‌پردازیم. در بخش دوم مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی معرفی شده و بر اساس روش‌های موجود در بررسی اتلاف در سیستم‌های کوانتومی، هامیلتونی وابسته به زمان کالدیرلا-کانای برای مدارهای مزوسکوپی با بار گسسته RLC بیان شده است. در بخش سوم، ما معادله‌های حرکت عملگرهای نردبانی و عملگر بار را در تصویر هایزنبرگ برای یک مدار مزوسکوپی RLC به‌دست آورده وسپس به طور تقریبی جریان ماندگاری را برای این مدار کوانتومی مزوسکوپی محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که در حالت‌های حدی با کارهای دیگران [۱۰] سازگاری کامل دارد. در بخش چهارم طیف انرژی برای یک مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC تحت تأثیر یک میدان خارجی اختیاری وابسته به زمان به روش اختلالی محاسبه شده است و در بخش پنجم بحث و نتیجه‌گیری ارائه گردیده است.

۲. مروري بر مدارهاي كوانتومي مزوسكوپيLC

اولین بار لی و چِن در قالب یک نظریهٔ کوانتومی، برای مدارهای مزوسکوپی گسستگی بار الکتریکی را معرفی کردند[۱۰] و نشان دادند که طیف گسسته‌ای از عملگر خود الحاقی $\hat{q}$ به شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{q}|q\rangle = nq_e|q\rangle, \qquad (۸)$$

که در آن $n\in z$ است و $q_e = 1/602\times10^{-19}C$ ، کوانتوم بار می‌باشد. با توجه به این گسستگی، آنها کمینه عملگر جابه جایی $\hat{Q}$ را به شکل زیر معرفی کردند

$$\hat{Q}=e^{iq_e\frac{\hat{p}}{\hbar}}, \qquad (۹)$$

به طوری که در روابط جابه‌جایی زیر صدق کند

$$\left[\hat{q},\hat{Q}\right]=-q_e\hat{Q},$$
$$\left[\hat{q},\hat{Q}^{\dagger}\right]=q_e\hat{Q}^{\dagger}, \qquad (۱۰)$$
$$\hat{Q}^{\dagger}\hat{Q}=\hat{Q}\hat{Q}^{\dagger}=1.$$

بر این اساس، شکل انتگرالی ضرب اسکالری در نمایش بار به جمع تبدیل شده و می‌توان با تعریف مشتق‌های گسسته‌ای بر حسب عملگرهای نردبانی $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^{\dagger}$ به شکل زیر

$$\nabla_{q_e}=\frac{\hat{Q}-1}{q_e}, \qquad \overline{\nabla}_{q_e}=\frac{1-\hat{Q}^{\dagger}}{q_e}. \qquad (۱۱)$$

معادلهٔ دیفرانسیل شرودینگر را برای مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC به صورت متناهی زیر به‌دست آورد.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=[-\frac{\hbar^{2}}{2q_eL}(\nabla_{q_e}-\overline{\nabla}_{q_e})+V(\hat{q})]|\psi\rangle=\hat{H}|\psi\rangle \qquad (۱۲)$$

که در آن $V(\hat{q})$ عملگر پتانسیل مدار مربوطه است. معادلهٔ (۱۲) در حد $q_e\to 0$ به معادلهٔ دیفرانسیل شرودینگر برای مدارهای الکتریکی کوانتومی با بار پیوسته (مکانیک کوانتومی قراردادی) تبدیل می‌شود.

با استفاده از معادلهٔ هایزنبرگ $\hat{I}(t)=\frac{d\hat{q}}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\hat{q},\hat{H}]$ و روابط جابه‌جایی (۱۰) می‌توان از معادله (۱۲) عملگر جریان را

به شکل زیر به‌دست آورد

$$\hat{I}(t)=\frac{\hbar}{2iLq_e}(\hat{Q}(t)-\hat{Q}^{\dagger}(t)), \tag{۱۳}$$

با استفاده از معادلهٔ $\hat{I}\left|I_{\varphi}\right\rangle = I_{\varphi}\left|I_{\varphi}\right\rangle$ می‌توان جریان ماندگاری و ویژه توابع عملگر جریان را به شکل زیر محاسبه کرد

$$I_{\varphi}=\frac{\hbar}{q_e L}\sin(\frac{q_e}{\hbar}\varphi), \tag{۱۴}$$

$$\left|I_{\varphi}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(\frac{inq_e}{\hbar}\varphi)\left|n\right\rangle, \tag{۱۵}$$

که در آن $\varphi\in\mathbb{R}$ یک عدد کوانتومی حقیقی با ویژه مقادیر پیوسته $0<\varphi<2\pi$ که به طور معمول به آن شبه شار گویند.

معادلهٔ شرودینگر(۱۲) توصیف کنندهٔ یک مدارالکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC با بار گسسته است که در آن اتلاف در نظرگرفته نشده است. همان‌طور که می‌دانیم همیشه در مدارهای الکتریکی مقاومت الکتریکی وجود دارد و قانون اهم یکی از پدیده‌های اساسی در رسانش الکتریکی است. بنابراین یک جملهٔ اتلافی شبیه $R\frac{dq}{dt}$ باید در معادلهٔ تحول زمانی برای بار در نظر گرفت. برای این منظور شبیه تئوری کالدیرلا-کانای برای یک ذرهٔ اتلافی در مکانیک کوانتومی، می‌توان با استفاده از معادله‌های (۶) و (۱۲) هامیلتونی وابسته به زمانی مطابق شکل زیر برای یک مدارالکتریکی کوانتومی مزوسکوپی RLC نوشت

$$\hat{H}(t)=-e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{\hbar^2}{2Lq_e^2}(\hat{Q}+\hat{Q}^{\dagger}-2)+e^{\frac{Rt}{L}}V(\hat{q}). \tag{۱۶}$$

۳. جریان در مدار کوانتومي مزوسکوپيRLC

هامیلتونی (۱۶) برای یک مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC در نمایش بار تحت تأثیر پتانسیل خارجی اختیاری وابسته به زمان به شکل زیر است

$$\hat{H}(t)=-e^{-\frac{Rt}{L}}\frac{\hbar^2}{2Lq_e^2}(\hat{Q}+\hat{Q}^{\dagger}-2)+e^{\frac{Rt}{L}}(\frac{\hat{q}^2}{2C}+\varepsilon(t)\hat{q}) \tag{۱۷}$$

با استفاده از معادلهٔ حرکت هایزنبرگ و با کمک روابط جابه جایی (۱۰) می‌توان تحول عملگرهای $\hat{Q}$ ، $\hat{Q}^{\dagger}$ و $\hat{q}$ را در نمایش بار به شکل زیر به دست آورد

$$\dot{\hat{Q}}(t)=\frac{-iq_e}{\hbar}e^{\frac{Rt}{L}}[\frac{1}{2C}(\hat{q}(t)\hat{Q}(t)+\hat{Q}(t)\hat{q}(t))+\varepsilon(t)\hat{Q}(t)], \tag{۱۸}$$

$$\dot{\hat{Q}}^{\dagger}(t)=\frac{iq_e}{\hbar}e^{\frac{Rt}{L}}[\frac{1}{2C}(\hat{Q}^{\dagger}(t)\hat{q}(t)+\hat{q}(t)\hat{Q}^{\dagger}(t))+\varepsilon(t)\hat{Q}^{\dagger}(t)], \tag{۱۹}$$

$$\hat{I}(t)=\dot{\hat{q}}(t)=\frac{\hbar}{2iLq_e}e^{-\frac{Rt}{L}}(\hat{Q}(t)-\hat{Q}^{\dagger}(t)), \tag{۲۰}$$

در حقیقت حل دقیق معادله

$$\dot{\hat{Q}}(t)=-\frac{iq_e}{\hbar}e^{\frac{Rt}{L}}[(\varepsilon(t)+\frac{q_e}{2C})+\frac{\hat{q}(t)}{C}]\hat{Q}(t) \tag{۲۱}$$

کار ساده‌ای نیست و باید از تقریب استفاده کرد. برای این منظور جوابی به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\hat{Q}(t)=\hat{A}(t)\exp[\frac{-iq_e}{\hbar}\int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}}(\varepsilon(t')+\frac{q_e}{2C})dt'], \tag{۲۲}$$

با جای گذاری این معادله در رابطهٔ (۲۱) خواهیم داشت

$$\dot{\hat{A}}(t)=\frac{-iq_e}{\hbar C}e^{\frac{Rt}{L}}\hat{q}(t)\hat{A}(t). \tag{۲۳}$$

جواب معادلهٔ (۲۳) پس از انتگرال‌گیری به صورت زیر دست می‌آید

$$\hat{A}(t)=\hat{A}(0)-\frac{iq_e}{\hbar C}\int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}}\hat{q}(t')\hat{A}(t')dt'. \tag{۲۴}$$

درتقریب مرتبهٔ اول معادلهٔ (۲۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\hat{A}(t)=[1-\frac{iq_e}{\hbar C}\int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}}\hat{q}(t')\,dt']\,\hat{A}(0). \tag{۲۵}$$

برای محاسبه عملگر $\hat{q}(t)$ ابتدا از طرفین معادلهٔ هایزنبرگ (۲۰) نسبت به زمان مشتق گرفته، سپس با جای گذاری رابطه‌های (۱۸) و(۱۹) آن را در حالت حدی $q_e\approx 0$ (حدی که بار پیوسته می‌شود) محاسبه می‌کنیم. در این حالت $\hat{Q}=\hat{Q}^{\dagger}=1$ است و معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d^2\hat{q}(t)}{dt^2}+(\frac{1}{LC})\hat{q}(t)=\frac{-1}{L}\varepsilon(t). \tag{۲۶}$$

با روش تابع گرین می‌توان جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل (۲۶) را به شکل زیر به دست آورد

$$\hat{q}(t)=\hat{q}(0)\cos(\omega\, t)+\frac{1}{\omega}\int_0^t\varepsilon(t')\sin[\omega(t-t')]\,dt', \tag{۲۷}$$

که در آن $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ است.

در این مرحله با استفاده از معادله‌های (۲۷) و(۲۵) از رابطهٔ (۲۲) عملگر $\hat{Q}(t)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{Q}(t) = [1 - \frac{iq_e}{\hbar C}\zeta(t)\hat{q}(0) - \frac{iq_e}{\hbar C}\gamma(t)] \exp[\frac{-iq_e}{\hbar}(\eta(t) + \frac{q_e}{2C}\chi(t))]\hat{Q}(0), \quad (۲۸)$$

که در آن توابع $\gamma(t)$ ، $\eta(t)$، $\zeta(t)$ و $\chi(t)$ به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\gamma(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t\int_0^{t'} \varepsilon(t'')e^{\frac{Rt'}{L}} \sin[\omega(t'-t'')]\, dt''dt', \quad (۲۹)$$

$$\eta(t) = \int_0^t \varepsilon(t')e^{\frac{Rt'}{L}} dt', \quad (۳۰)$$

$$\zeta(t) = \int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}} \cos\omega t' dt', \quad (۳۱)$$

$$\chi(t) = \int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}} dt'. \quad (۳۲)$$

با یک روش مشابه می‌توان عملگر $\hat{Q}^\dagger(t)$ را به دست آورد یعنی

$$\hat{Q}^\dagger(t) = \hat{Q}^\dagger(0)[1 + \frac{iq_e}{\hbar C}\zeta(t)\hat{q}(0) + \frac{iq_e}{\hbar C}\gamma(t)] \exp[\frac{iq_e}{\hbar}(\eta(t) + \frac{q_e}{2C}\chi(t))]. \quad (۳۳)$$

حال با جای گذاری معادله‌های (۲۸) و (۳۳)در معادلهٔ (۲۰) می‌توان جریان ماندگاری را برای یک مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC تحت تأثیر پتانسیل خارجی اختیاری وابسته به زمان $\varepsilon(t)$ به شکل زیر تعیین کرد

$$I_\varphi(t) = \langle I_\varphi | \hat{I}(t) | I_\varphi \rangle = e^{-\frac{Rt}{L}}(\frac{\hbar}{Lq_e}\sin[\frac{q_e}{\hbar}(\varphi - \eta(t) - \frac{q_e}{2C}\chi(t))] - \frac{\gamma(t)}{LC}\cos[\frac{q_e}{\hbar}(\varphi - \eta(t) - \frac{q_e}{2C}\chi(t))]), \quad (۳۴)$$

که در آن از عبارت

$$\langle I_\varphi | \hat{q}(0) | I_\varphi \rangle = 0, \quad (۳۵)$$

استفاده شده است.

در ادامهٔ این بخش به منظور تعیین درجهٔ اعتبار معادلهٔ(۳۴) موارد حدی زیر را مطالعه می‌کنیم

الف) در حد $q_e \to 0$ (حالت بار پیوسته) جریان عبارت است از

$$I_\varphi(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}(\varphi - \eta(t) - \frac{\gamma(t)}{C}), \quad (۳۶)$$

که یک رابطهٔ معمول در مکانیک کوانتومی قراردادی است.

ب) وقتی ظرفیت مدار کوانتومی مزوسکوپی LC فوق العاده زیاد ($C \to \infty$) فرض شود، می‌توان از جملات متناسب با معکوس ظرفیت C صرف نظر کرد و مدار RLC به یک مدار RL تبدیل کرد. در این صورت از معادله‌های (۳۴) و(۳۶) می‌توان جریان ماندگاری را برای یک حلقهٔ کوانتومی که دارای اتلاف اهمی است به‌دست آورد. همچنین وقتی $R \to 0$ این معادله‌ها جریان ماندگاری یک حلقهٔ کوانتومی بدون اتلاف را می‌دهندکه با کار لی و چن در [۱۰ و ۱۱] سازگاری کامل دارد.

۴. طيف انرژي مدار كوانتومي مزوسكوپي RLC

از آنجایی که روش کوانتش برای مدارهای LC با نوسانگر هماهنگ یکسان است، می‌توان در هامیلتونی (۴) عملگرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ را بر حسب عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به شکل زیر تعریف کرد.

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar\omega C}{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1, \quad (۳۷)$$

که در آن $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ بسامد نوسانگر است و رابطهٔ جابه‌جایی برای متغیرهای پیوسته عبارت است از

$$\left[\hat{q}, \hat{p}\right] = i\hbar. \quad (۳۸)$$

برای احتساب گسستگی بار، با جای‌گذاری(۳۷) در معادلهٔ (۹) ، عملگرهای $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^\dagger$ را می‌توان بر حسب عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به شکل زیر نوشت

$$\hat{Q} = e^{\frac{-q_e}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}, \quad \hat{Q}^\dagger = e^{\frac{q_e}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}. \quad (۳۹)$$

روش اصلی ما در این بخش به نحوی است که بتوان

عملگرهای $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^\dagger$ را بر حسب توان‌هایی از q_e بسط داد، در حد $q_e = 0$ این عملگرها در رژیم بار پیوسته(مکانیک کوانتومی قراردادی) هستند ولی با توجه به مقدار عددی q_e ($1/602 \times 10^{-19}\ C$)، قابل قبول است که q_e را بتوان به عنوان یک پارامتر اختلال در نظر گرفت. بنابراین

$$\begin{aligned}\hat{Q} = {} & 1 - \frac{q_e}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \\ & + \frac{1}{4\hbar} q_e^2 \omega L (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \\ & - \frac{1}{3!} q_e^3 \left(\frac{\omega L}{2\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^3 \\ & + \frac{q_e^4}{4*4!}\left(\frac{\omega L}{2\hbar}\right)^2 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 + \cdots,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}^\dagger = {} & 1 + \frac{q_e}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) + \frac{1}{4\hbar} q_e^2 \omega L (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \\ & + \frac{1}{3!} q_e^3 \left(\frac{\omega L}{2\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^3 \\ & + \frac{q_e^4}{4*4!}\left(\frac{\omega L}{2\hbar}\right)^2 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 + \cdots,\end{aligned} \tag{41}$$

اگر تا مرتبهٔ q_e^4 از بسط فوق را در معادلهٔ (۱۷) جای‌گذاری کنیم، بعد از انجام محاسبات، هامیلتونی مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC به شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) = {} & \hbar\omega e^{\frac{Rt}{L}} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \\ & + \varepsilon(t) e^{\frac{Rt}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega C}{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ & + \hbar\omega (e^{\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}})(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \\ & - \frac{1}{96} e^{-\frac{Rt}{L}} q_e^2 \omega^2 L (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4.\end{aligned} \tag{42}$$

این هامیلتونی را می‌توان به دو قسمت تجزیه کرد یعنی

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + \hat{H}_1(t), \tag{43}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(t) = {} & \hbar\omega (e^{\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}})(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \\ & - \frac{1}{96} q_e^2 \omega^2 L (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 e^{-\frac{Rt}{L}}.\end{aligned} \tag{44}$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر

$$\hat{A} = \hat{a} + \lambda(t), \qquad \hat{A}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \lambda(t), \tag{45}$$

با شرط اینکه

$$\lambda(t) = \varepsilon(t)\sqrt{\frac{C}{2\hbar\omega}}, \tag{46}$$

باشد می‌توان هامیلتونی $\hat{H}_0$ را بر حسب عملگرهای جدید $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ به شکل زیر به دست آورد.

$$\hat{H}_0(t) = [\hbar\omega\ (\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}) - \frac{C}{2}\varepsilon^2(t)] e^{\frac{Rt}{L}}. \tag{47}$$

که دارای ویژه مقادیر انرژی زیر است

$$E_n(t) = [\hbar\omega\ (n + \frac{1}{2}) - \frac{C}{2}\varepsilon^2(t)] e^{\frac{Rt}{L}}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{48}$$

اولین مرتبه انتقال انرژی برای هامیلتونی $\hat{H}_1$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\Delta E_n = {} & \hbar\omega (e^{\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}) \langle n | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 | n \rangle \\ & - \frac{1}{96} q_e^2 \omega^2 L \langle n | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 | n \rangle e^{-\frac{Rt}{L}}.\end{aligned} \tag{49}$$

با اضافه کردن جملهٔ اصلاحی (۴۹) به معادلهٔ (۴۸)، طیف انرژی یک مدار کوانتومی مزوسکوپیRLC که تحت تأثیر یک منبع اختیاری وابسته به زمان قرار دارد به شکل زیر تعیین می‌گردد

$$\begin{aligned}E_n(t) = {} & [\hbar\omega\ (n + \frac{1}{2}) - \frac{C}{2}\varepsilon^2(t)] e^{\frac{Rt}{L}} \\ & - \hbar\omega (e^{\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}) - \frac{1}{32}\frac{q_e^2}{C}(2n^2 + 2n + 1) e^{-\frac{Rt}{L}}.\end{aligned} \tag{50}$$

۵. نتیجه‌گیری

از آنجایی که در مدارهای الکتریکی، مقاومت الکتریکی (قانون اهم) یکی از پارامترهای اصلی بوده و نقش اساسی در رسانش الکتریکی دارد باید اثر آن را در قالب یک جمله اتلافی شبیه $R\frac{dq}{dt}$ در معادلهٔ تحول زمانی بار برای یک مدار الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC در نظر گرفت. برای این منظور در این مقاله، ابتدا مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC مورد بررسی قرار گرفت، سپس با استفاده از تئوری کالدیرلا-کانای مربوط به یک ذره اتلافی در مکانیک کوانتومی، هامیلتونی برای این مدارها نوشته شد. بر اساس این هامیلتونی، جریان ماندگاری

و طیف انرژی یک مدار الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC که شامل یک مقاومت الکتریکی R و یک منبع پتانسیل خارجی وابسته به زمان است، محاسبه شد. در حالت‌های حدی سازگاری این روش با کار دیگران نشان داده شد.

مراجع

1. W H Louisell, "*Quantum statistical properties of radiation*" John Wiley (1973).
2. P Caldirola, *Nuovo Cimento* **18** (1941) 393.
3. E Kanai, *Prog. Theor. Phys*. **3** (1948) 440.
4. V E Tarasov, *Phys. Lett*. A **288** (2001) 173.
5. D C Latimer, *Preprint* quat-ph/0410078, V 1 (2004).
6. W E Brittin, *Phys. Rev*. **150** (1966) 1079.
7. Chung-In Um, K. H. Yeon, T F George, *Phys. Rep*. **362** (2002) 63.
8. G W Ford, J T Lewis, R F O Connell, *Phys. Rev*. A **37** (1988) 4419.
9. A O Caldeira, A J Leggett, *Ann*. *Phys*. (N. Y) **153** (1984) 445.
10. Y Q Li, B. Chen, *Phys. Rev*. B **53** (1996) 4027.
11. B Chen, X Shen and Y Q Li, *Phys. Lett*. A **313** (2003) 431.
12. J C Flores, *Phys. Rev*. B **64** (2001) 235309.
13. H S Snyder, *Phys. Rev* **71** (1947) 38.
14. S Mantecinos, I Saavedra and O Kunstmann, *Phys. Lett.* A **109** (1985) 139.
15. H Cheung, Y Gefen, E K Riedel and W H Shih, *Phys. Rev*. B **37** (1988) 6050.
16. Y Q Li, in Proc. 5th Wigner Symposium, eds. P Kasperkovitz and D Grau, World Scientific, Singpore (1998) 307-310.
17. F Kheirandish and H pahlavani, *Iranian Journal of Physics Research*, **8** (2008) 149.
18. B Chen, X Shen, Y Li, L Sun and R Han, *Physica E* **31** (2006) 27.
19. B Chen, X Shen, Y Li, D Yu and R Han, *Physica E* **31** (2006) 165.
20. J C Flores, *Euro. Phys. Lett* **69** (2005) 116.