مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۰، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۹
مقاله‌نامهٔ دومین کنفرانس ملی پیشرفت‌های ابررسانایی، بهمن ۱۳۸۸

بررسي اثرات پتانسيل‌هاي ناهمسانگرد بر گاف انرژي گاز بوزي

فاطمه نبي پور و محمد علي شاهزمانيان
دانشكدهٔ فيزيك، دانشگاه اصفهان، اصفهان
پست الكترونيكي: f_nabipoor@yahoo.com

چكيده

اثرات پتانسيل دوقطبي - دوقطبي و چهارقطبي - چهارقطبي ناهمسانگرد بر گاف انرژي گاز بوزي را در تقريب ميدان متوسط بررسي مي‌كنيم. از مدل دوشاره‌اي براي به دست آوردن بيناب انرژي قسمت‌هاي چگاله و ناچگاله(حرارتي) استفاده مي‌كنيم. با به دست آوردن اين بيناب، تغيير گاف انرژي به دست مي‌آيد. در مقايسه با سيستم بوزي با برهم‌كنش ضعيف تماسي كه اثر ناچگاله‌ها بزرگتر است، مشاهده مي‌شود كه در سيستم با برهم‌كنش دوقطبي اثر چگاله‌ها بر گاف انرژي بزرگتر است و تغيير گاف انرژي در مورد پتانسيل دوقطبي به هندسه دام بستگي دارد. همچنين پتانسيل چهارقطبي- چهارقطبي تأثيري بر گاف انرژي ندارد.

واژه‌هاي كليدي: گاز بوزي، برهم‌كنش دوقطبي دوقطبي، چگالش بوز انيشتين، گاف انرژي

۱. مقدمه

علی رغم برهم‌کنش کوتاه برد بین بخار اتم‌های قلیایی چگالیده بوز- انیشتین که بر حسب تابع تقریبی $V(\vec{r}'-\vec{r}) = g\delta(\vec{r}'-\vec{r})$ بیان می‌شود[۱] بین بخار اتم‌های Cr برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بلند برد وناهمسانگرد زیر وجود دارد که در سال ۲۰۰۵ به طور تجربی مشاهده شد[۲].

$$U_{dd} = \frac{C_{dd}}{4\pi}\hat{e}_i\hat{e}_j\frac{(\delta_{ij} - 3r_ir_j)}{r^3}, \qquad (1)$$

که در آن $C_{dd} = E^2\alpha^2/\varepsilon_0$ برای دوقطبی الکتریکی است و $C_{dd} = \mu_0 d_m^2$ برای دوقطبی مغناطیسی است.

پارامتر ε_{dd} که نسبت برهم‌کنش دوقطبی - دوقطبی را نسبت به برهم‌کنش تماسی مشخص می‌کند برابر است با

$$\varepsilon_{dd} = \frac{C_{dd}}{3g}. \qquad (2)$$

برای $0 \le \varepsilon_{dd} < 1$ چگالش بوز - انیشتین پایدار است و برای $\varepsilon_{dd} > 1$ سیستم ناپایدار است [۳].

برهم‌کنش دوقطبی در اتم‌های ^{52}Cr که گشتاور دوقطبی مغناطیسی نسبتاً بزرگی دارند ($m = 6\mu_B$) مشاهده شده است ($\varepsilon_{dd} = 0/144$) و در اتم‌های قلیایی که گشتاور مغناطیسی اندکی دارند ($\varepsilon_{dd} = 0/007$) تاکنون مشاهده نشده است.

مورد دیگری که در برهم‌کنش بین بخار اتم‌ها می‌تواند اتفاق بیفتد برهم‌کنش‌های چهارقطبی است که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته و در اینجا ضمن بررسی اثرات برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی بر گاف انرژی گاز بوزی تا اندازه‌ای مسئله چهارقطبی را بررسی می‌کنیم . البته در اینجا متذکر می‌شویم که با استفاده از فن تشدید فشباخ اثرات برهم‌کنش تماسی ناچیز می‌شود و می‌توانیم اثرات برهم‌کنش‌های مرتبه‌های دیگر روی بخار اتم‌های قلیایی را مشاهده کنیم.

۲. فرمولبندي مسئله

همان‌طور که گفتیم از پتانسیل تماسی با استفاده از فن تشدید فشباخ جلوگیری و فقط مرتبه‌های دوقطبی و اگر در بخار اتم‌ها گشتاورهای دوقطبی ضعیف باشند مانند سدیم مرتبه‌های چهارقطبی را می‌توان در نظر گرفت . در یک بخار اتم‌های بوزی، عملگر $\hat{\psi}(r,t)$ میدان بوزی معادله‌های زنبرگ زیر را ارضاء می‌کند

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial\hat{\psi}(\vec{r},t)}{\partial t} &= \left(-\frac{\nabla^2}{2m}+V_{ext}(r)-\mu\right)\hat{\psi}(\vec{r},t)\\
&+g_d\left(\int d^3r'\hat{\psi}^{+}(\vec{r}',t)\,\hat{\psi}(r',t)V(\vec{r},\vec{r}')\right)\hat{\psi}(\vec{r},t),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

که در آن $V_{ext}(\vec{r})=\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)$ پتانسیل‌دام هماهنگ با تقارن استوانه‌ای است ($\omega_x=\omega_y=\omega_z/\kappa$) و $g_d=\frac{\mu_0\mu_{cr}^2}{4\pi}$. برای پتانسیل دوقطبی $V(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1-3\cos^2\theta}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}=-2\frac{p_2(\cos\theta)}{|\vec{r}-r'|^3}$ و برای چهارقطبی $V(\vec{r},\vec{r}')=\frac{p_3(\cos\theta)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^4}$ می‌باشد. در دماهای پایین و در گازهای بوزی رقیق می‌توان از مدل دوشاره‌ای و تقریب بوگولیوبوف استفاده کرد بنابراین

$$
\hat{\psi}(\vec{r},t)=\Phi(\vec{r})+\psi(\vec{r},t),
\tag{4}
$$

که در آن $\Phi(\vec{r})\equiv\langle\hat{\psi}(\vec{r},t)\rangle$ نقش میدان بوزی ماکروسکوپیک وابسته به مکان را بازی می‌کند و میانگین‌گیری زمانی افت وخیز $\psi(\vec{r},t)$ صفر است ($\langle\psi(\vec{r},t)\rangle=0$). با جایگذاری معادلهٔ (۴) در معادلهٔ (۳) معادلهٔ گراوس پیتاوسکی تعمیم یافته زیر برای پارامتر نظم به دست می‌آید

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{\nabla^2}{2m}+V_{ext}(r)-\mu\right)\Phi(\vec{r})\\
&+g_d\left(\int d^3r'[n_c(\vec{r}')+n_T(\vec{r}')]V(\vec{r},\vec{r}')\right)\Phi(\vec{r})\\
&+g_d\left(\int d^3r'n_T(\vec{r}',\vec{r})V(\vec{r},\vec{r}')\Phi(\vec{r}')\right)\\
&+g_d\left(\int d^3r'm_T(\vec{r}',\vec{r})V(\vec{r},\vec{r}')\Phi^*(\vec{r}')\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

برای به دست آوردن معادلهٔ ناچگاله‌ها که توسط $\psi(r,t)$ توصیف می‌شوند می‌توان از اختلاف میانگیری زمانی معادلهٔ (۳) و خود آن، معادلهٔ ناچگاله‌ها را چنین به دست آورد:

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} &= \left(-\frac{\nabla^2}{2m}+V_{ext}(\vec{r})-\mu\right)\psi(\vec{r},t)\\
&+g_d\left(\int d^3r'n(\vec{r}')V(\vec{r},\vec{r}')\right)\psi(\vec{r},t)\\
&+g_d\left(\int d^3r'n_c(\vec{r}',\vec{r})V(\vec{r},\vec{r}')\psi(\vec{r}',t)\right)\\
&+g_d\left(\int d^3r'm_c(\vec{r}',\vec{r})V(\vec{r},\vec{r}')\psi^{\dagger}(\vec{r}',t)\right),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

که در آن g_d به جای ضرایب پتانسیل‌های دوقطبی و چهارقطبی و $V(\vec{r},\vec{r}')$ به جای قسمت اصلی این پتانسیل‌ها قرار می‌گیرد و توابع همبستگی عبارتند از

$$
\begin{aligned}
&\Phi^*(\vec{r})\Phi(\vec{r}')\equiv n_c(\vec{r},\vec{r}'),\\
&\Phi(\vec{r})\Phi(\vec{r}')\equiv m_c(\vec{r},\vec{r}'),\\
&\left\langle\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi(\vec{r}',t)\right\rangle\equiv n_T(\vec{r},\vec{r}'),\\
&\left\langle\psi(\vec{r},t)\psi(\vec{r}',t)\right\rangle\equiv m_T(\vec{r},\vec{r}'),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

که در آن $n_c(r,r')$ و $n_T(r,r')$ مولفه‌های قطری ماتریس چگالی هستند و به ترتیب چگالی چگاله و چگالی ناچگاله می‌باشند در صورتی که $m_c(r,r')$ و $m_T(r,r')$ مولفه‌های ناقطری ماتریس چگالی می‌باشند. $m_T(r,r')$ به معنای نابودی جفت ذره است که برای سیستم‌های ابررسانا و ابرشاره مخالف صفر و برای سیستم‌های عادی صفر است.

چگالی‌های خود سازگار به صورت زیرهستند

$$
\begin{aligned}
&n(\vec{r})\equiv\left\langle\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r},t)\hat{\psi}(\vec{r},t)\right\rangle=n_c(\vec{r})+n_T(\vec{r}),\\
&m(\vec{r})\equiv\left\langle\hat{\psi}(\vec{r},t)\hat{\psi}(\vec{r},t)\right\rangle=\Phi^2(\vec{r})+m_T(\vec{r}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

برای محاسبه تغییر گاف انرژی، نخست تغییر انرژی ناچگاله و چگاله‌ها را محاسبه می‌کنیم. دردمای بالا $m_T(\vec{r})<<n_T(\vec{r})$، می‌توانیم فرض کنیم که مولفهٔ چگالی ناقطری خیلی کوچکتر از مولفهٔ قطری است، یعنی $m_c(\vec{r})<<n_c(\vec{r})$ و توابع همبستگی نزدیک T_c قابل چشمپوشی هستند.

بیناب انرژی را برای گاز ناچگاله به این صورت می‌نویسیم.

$$
\Delta\varepsilon_T=g_d\bar{n}_{TT},
\tag{9}
$$

که در آن $\bar{n}_{TT}$ چگالی مؤثر ناچگاله است برای تعیین $\bar{n}_{TT}$ توزیع بوز انیشتین فضای فاز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$
f(\vec{p},\vec{r})=\frac{1}{\exp\left[\varepsilon(\vec{p},\vec{r})/k_BT\right]-1},
\tag{10}
$$

که در آن $\varepsilon(\vec{p},\vec{r})$ بیناب برانگیخته نیمه کلاسیکی از رابطهٔ (۶) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\varepsilon(\vec{p},\vec{r}) \cong \varepsilon^{ide}(\vec{p},\vec{r}) + g_d n_{eff}(\vec{r}) - \mu \qquad (11)$$

که در آن $n_{eff}(\vec{r}) \equiv \int d^3 r' V_d(\vec{r},\vec{r}') n(\vec{r}')$ چگالی مؤثر در حضور برهم‌کنش بین اتم‌ها است. با بسط رابطهٔ (۱۰) تا مرتبهٔ اول g_d داریم :

$$f(\vec{p},\vec{r}) = f(\vec{p},\vec{r})\Big|_{g_d=0} + g_d \left(\frac{\partial f(\vec{p},\vec{r})}{\partial g_d}\right)_{g=0}$$
$$= f_0(\vec{p},\vec{r}) - g n_{eff} \frac{\partial f_0(\vec{p},\vec{r})}{\partial \mu}, \qquad (12)$$

که در آن $f_0(\vec{p},\vec{r})$ تابع توزیع بوز- انیشتین گاز بوزی نابر هم‌کنشی است. با انتگرال‌گیری روی تکانه، تابع توزیع نا چگاله‌ها به واسطهٔ وجود بر هم‌کنش به صورت زیر به دست می‌آید

$$n_T^{\rm int}(r) \cong n_T - g_d n_{eff} \frac{\partial n_T}{\partial \mu}, \qquad (13)$$

توزیع چگالی گرمایی گاز بوز غیر برهم‌کنشی است. n_T که با انتگرال‌گیری روی مختصات در رابطهٔ (۱۳)، تعداد ذرات گرمایی به صورت زیر به دست می‌آید

$$N_T^{\rm int} = \int n_T d^3 r - g_d \int n_{eff} \frac{\partial n_T}{\partial \mu} d^3 r. \qquad (14)$$

به عبارت دیگر، با بسط تیلور تا مرتبهٔ اول g_d داریم

$$N_T^{\rm int} \cong N_T + g_d \frac{\partial N_T}{\partial g_d}, \qquad (15)$$

با این فرض که

$$\varepsilon = \varepsilon_T^{ide} + g_d \bar{n}_{TT} - \mu, \qquad (16)$$

داریم

$$\frac{\partial N_T}{\partial g_d} = -\bar{n}_{TT} \frac{\partial N_T}{\partial \mu} = -\bar{n}_{TT} \int \frac{\partial n_T}{\partial \mu} d^3 r. \qquad (17)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۱۷) در معادلهٔ (۱۵) و مقایسهٔ آن با رابطهٔ (۱۴)، چگالی مؤثر به صورت زیر به دست می‌آید

$$\bar{n}_{TT} = \frac{\int d^3 r \frac{\partial n_T}{\partial \mu} n_{eff}(\vec{r})}{\int d^3 r \frac{\partial n_T}{\partial \mu}} \equiv Q_{TT} n_T(0). \qquad (18)$$

با تقریب چگالی موضعی[۴]، توزیع ویژه حالت گرمایی n_T می‌تواند مانند زیر نوشته شود.

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} e^{-[V_{ext}(r)-\mu]/k_B T}, \qquad (19)$$

که در آن $\lambda_T = \hbar(2\pi / m k_B T)^{1/2}$ طول موج گرمایی، و $g_\upsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n / n^\upsilon$ تابع بوز- انیشتین است. با قراردادن $\mu = 0$ داریم:

$$Q_{TT} = \frac{-4\pi}{3} F_0(\kappa) Q, \qquad (20)$$

و $n_T(0) = \zeta(3/2)/\lambda_T^3$ چگالی گرمایی $n_T(\vec{r})$ در مرکز دام $\vec{r} = 0$ و $Q \approx 0/281$ است. تابع $F_0(\kappa)$ برای برهم‌کنش‌های دوقطبی از انتگرال زاویه‌ای به دست می‌آید و برابر است با [۵]

$$F_0(\kappa) = \left(\frac{1 + 2\kappa^2 - 3\kappa^2 (\tanh^{-1}\sqrt{1-\kappa^2} / \sqrt{1-\kappa^2}}{\kappa^2 - 1}\right), \qquad (21)$$

که در آن $\kappa = \omega_z / \omega_x$ پارامتر دام و تابع $F_0(\kappa)$ به شکل پتانسیل دام بستگی دارد. برای شکل لوله‌ای که $\kappa \to 0$، برابر ۱ و برای شکل سکه‌ای که $\kappa \to \infty$، برابر ۲- است و نیز برای دام همسانگرد که $\kappa = 1$، برابر صفر است.

اکنون برای پیدا کردن تغییر انرژی چگاله در حضور برهم‌کنش‌های دوقطبی عبارت مربوط به انرژی چگاله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$E = N_c \varepsilon_c^{ide} + N_c g_d \bar{n}_{cT} + \frac{N_c}{2} g_d \bar{n}_{cc}, \qquad (22)$$

که $\varepsilon_c^{ide} = 3\hbar\varpi/2$ انرژی گاز بوز ایده‌ال در حالت پایه است، و برای توصیف اثر چگاله - ناچگاله رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{n}_{cT} = \iint d^3 r d^3 r' [n_T(\vec{r}) n_c(\vec{r}') V_d(|\vec{r}-\vec{r}'|)] / N_c$$
$$\equiv Q_{cT} n_T(0), \qquad (23)$$

و برای توصیف برهم‌کنش بین چگاله - چگاله رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{n}_{cc} = \iint d^3 r d^3 r' [n_c(\vec{r}).n_c(\vec{r}') V_d(|\vec{r}-\vec{r}'|)] / N_c$$
$$\equiv Q_{cc} n_c(0). \qquad (24)$$

انرژی را می‌توان از رابطهٔ $\varepsilon_c = \frac{\partial E}{\partial N_c}$ به دست آورد. تغییر انرژی چگاله به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\varepsilon_c = g_d \bar{n}_{cT} + g_d \bar{n}_{cc} \qquad (25)$$

این تغییر انرژی نسبت به گاز بوز غیربرهم‌کنشی در پتانسیل به

دام اندازی است. برای اتم‌های قطبیده در جهت $\hat{z}$ به دست آوردیم

$$Q_{cT} = Q_{cc} = \frac{-4\pi}{3} F_{\circ}(\kappa). \tag{۲۶}$$

تغییر گاف انرژی گاز بوزی نسبت به گاز غیر برهم‌کنشی برابر است با

$$\delta\Delta_g = \Delta\varepsilon_T - \Delta\varepsilon_C = \delta\Delta_g^T + \delta\Delta_g^c. \tag{۲۷}$$

طبق معادلۀ (۹) و (۱۸) و (۲۷) تغییر گاف انرژی به واسطۀ ناچگاله‌ها برابر است با

$$\delta\Delta_g^T = \frac{4\pi}{3} g_d (1-Q) F_{\circ}(\kappa) n_T(\circ), \tag{۲۸}$$

و همچنین با توجه به معادلۀ (۲۷) تغییر گاف انرژی به واسطۀ چگاله‌ها برابر است با

$$\delta\Delta_g^C = \frac{4\pi}{3} g_d F_{\circ}(\kappa) n_c(\circ). \tag{۲۹}$$

مشاهده می‌کنیم که تغییر گاف انرژی در مورد پتانسیل دوقطبی طبق معادلۀ (۲۸) و (۲۹) به هندسۀ دام (توسط تابع $(F_{\circ}(\kappa))$ بستگی دارد. به عبارت دیگر، گاف انرژی ذرات محصوردر دام لوله‌ای ($F_{\circ}(\kappa) < \circ$) به واسطۀ برهم‌کنش دوقطبی –دوقطبی افزایش می‌یابد و در دام سکه‌ای ($F_{\circ}(\kappa) > \circ$) کاهش می‌یابد و برای دام همسانگرد $(F_{\circ}(\kappa) = \circ)$ تغییر در گاف انرژی وجود ندارد.

اثر چگاله‌ها در تغییر گاف انرژی نسبت به اثر ناچگاله‌ها برابر است با

$$\frac{\delta\Delta_g^c}{\delta\Delta_g^T} = \frac{n_c(\circ)}{(Q-1) n_T(\circ)} \approx 1/97, \tag{۳۰}$$

در نتیجه طبق رابطۀ (۳۰) اثر چگاله‌ها بر تغییر گاف انرژی بیشتر است.

Cr گشتاور دوقطبی مغناطیسی ۶ مگنتون بوهر دارد ($\mu_{Cr} = 6\mu_B$) و طول پراکندگی موج s آن ($a_{\circ}$) در حدود ۱۰۵ بوهر است ($a_B = 55/7 A^{\circ}$ و $a_{\circ} = 105$). طول پراکندگی دوقطبی مؤثرآن نیز $a_d = 1/93 A^{\circ}$ است و $a_d / a_{\circ} = \circ/\circ 35$ که نسبت کوچکی است. درحقیقت انرژی برهم‌کنشی تماسی در حدود ۳۰ برابر بزرگتر از انرژی دوقطبی است. بنابراین اثرهای بر هم‌کنش دو قطبی – دوقطبی تنها یک اختلال در سیستم است.

همان‌طور که دیدیم تابع $F_{\circ}(\kappa)$ درمعادلۀ (۲۱) برای برهم‌کنش‌های دوقطبی– دوقطبی داده شده و برای برهم‌کنش‌های چهارقطبی- چهارقطبی برابرصفر به دست می‌آید. به عبارت دیگر پتانسیل چهارقطبی- چهارقطبی مانند مورد خاص پتانسیل دوقطبی- دوقطبی با دام همسانگرد، تاثیری بر گاف انرژی ندارد و تغییر گاف انرژی آن صفر است.

۳. نتیجه‌گیری

با استفاده از تقریب میدان متوسط اثر برهم‌کنش دوقطبی- دوقطبی وچهارقطبی- چهارقطبی را بر گاف انرژی گاز بوزی و پتانسیل به دام اندازی استوانه‌ای بررسی کردیم. در سیستم بوزی با پتانسیل تماسی همسانگرد اثر ناچگاله‌ها بر تغییرگاف انرژی بزرگتر است وتغییر گاف انرژی مستقل از هندسۀ دام است [۶]، در صورتی که در یک سیستم دوقطبی ناهمسانگرد اثر چگاله‌ها روی گاف انرژی بیشتر است و همچنین تغییر گاف انرژی به هندسه دام بستگی دارد. پتانسیل چهار قطبی- چهارقطبی نیز تاثیری بر گاف انرژی ندارد.

مراجع

1. F Dalfovo, S Giorgini, L P Pitaevskii and S Stringari, *Rev*, Mod. Phys**.** **71** (1999) 463.
2. J Stuhler, A Griesmaier, T Koch, M fattori, T Pfau, S Giovanazzi, P Pedri and L Santons, *Phys. Rev. Lett*. **95** (2005) 150406.
3. C Eberlein, S Giovanazzi and D H J ODell, *Phys. Rev*. A **71** (2005) 033618.
4. T T Chou, Chen Ning Yang and L H Yu, *Phys. Rev.* A **53** (1996) 4257.
5. S Giovanazzi, A Gorlitz and T Pfau, "*J. Opt*. B **5** (2003) s208.
6. Y M Kao and T F Jiang, *Phys. Rev*. A **73** (2006) 043604.