

PIC

jazsm@iust.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۱۲/۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۵/۵)

PIC

MPI

PIC

:

که با استفاده از آنها، شبیه سازی به بهترین شکل انجام پذیرد. به عنوان مثال در زمینه پلاسما یکی از روش های متداول در شبیه سازی پلاسما روش "ذره در سلول" است که به اختصار به آن PIC می گویند.

در سال های اخیر با توجه به افزایش توان محاسباتی و راه اندازی سیستم های خوشه ای^۲ و ابررایانه ها^۳ تحول عظیمی در افزایش توان شبیه سازی مسائل فیزیکی به وجود آمد. در این نوع از شبیه سازی ها با تقسیم وظایف و یا مراحل اجرای یک الگوریتم بین چند پردازنده، زمان اجرای برنامه تا حد بسیاری کاهش می یابد.

در بخش های دوم و سوم این مقاله به معرفی کامل روش شبیه سازی PIC پرداخته شده است. در بخش های چهارم و

شبیه سازی یکی از روش های متداول برای بررسی و به تصویر کشیدن پدیده هایی است که به راحتی در آزمایشگاه ها قابل مشاهده و یا آزمایش نبوده و یا اینکه مستلزم صرف وقت و هزینه های فراوان است. در این حوزه با ساده سازی الگوی مسئله همواره تلاش بر آن بوده تا با بهینه سازی الگوریتم مسئله، پیشینه اطلاعات مورد نیاز در کمترین زمان اجرای برنامه مورد پردازش قرار گیرد. با این حال در برخی مسائل ساده سازی و بهینه سازی الگوریتم برنامه برای کاهش زمان اجرای برنامه کارآمد نبوده به طوری که گاهی با الگوریتم هایی مواجه می شویم که برای اجرای آنها زمان زیادی مورد نیاز است. ایده استفاده از پردازنده های موازی و موازی سازی الگوریتم برنامه ها از جمله گام های مؤثری است که کاهش زمان اجرای برنامه ها را سبب شده است. آنچه در دهه های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، ابداع و به کارگرفتن روش هایی است

۱. Particle in cell

۲. Cluster Systems

۳. Supercomputers

مرحله از روش ذره در سلول، شامل شتاب گرفتن و حرکت ذرات است. این مرحله شامل محاسبه موقعیت‌ها و سرعت‌های ذرات پس از شتاب گرفتن در یک قدم زمانی است. مرحله دوم، یکی از مراحل مهم در چرخه محاسباتی مورد نظر می‌باشد، که شامل محاسبه چگالی‌های بار و جریان، با به کار بردن بار هر ذره و موقعیت‌های جاری هر ذره، بر روی نقاط شبکه است. مرحله سوم حل معادلات میدان برای یافتن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، روی نقاط شبکه است. و در نهایت مرحله چهارم، محاسبه نیروی وارد بر هر ذره است که از میدان الکتریکی محاسبه شده بر روی نقاط شبکه نزدیک هر ذره به دست خواهد آمد. مراحل دوم و چهارم به ترتیب مراحل پخش^۱ و تجمع^۲ نامیده می‌شوند. در مرحله پخش اطلاعات از ذرات بر روی شبکه پخش خواهد شد و در مرحله تجمع اطلاعات از روی نقاط شبکه به ذرات منتقل می‌شود. در این روش شکل مؤثر ذرات، به صورت یک تابع مثلثی در نظر گرفته می‌شود.

ناپایداری دو جریانی یکی از مسائل معروف در فیزیک پلاسما است. در این پدیده یکی از ناپایداری‌های متداول در پلاسما مورد بررسی واقع می‌شود. در این مسئله محیط پلاسما غیرمغناطیسی و یک بعدی است و تغییرات در راستای محور x ها در نظر گرفته شده است. همچنین این محیط شامل N الکترون و N یون با بار واحد می‌باشد. با توجه به سنگینی یونها در مقایسه با الکترون‌ها در فواصل زمانی کوتاه، می‌توان یونها را به عنوان یک پس زمینه ساکن در نظر گرفت و تنها حرکت الکترون‌ها را لحاظ نمود. تابع توزیع اولیه الکترون‌ها، شامل دو پرتو ماکسولی است، که با سرعت متوسط v_b و سرعت پخش گرمایی v_{th} در خلاف جهت هم منتشر می‌شوند. تابع توزیع اولیه الکترون‌ها با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود [۷]:

پنجم، شبیه سازی ناپایداری دو جریانی و مراحل شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفته است. و در بخش ششم روند موازی سازی برنامه معرفی شده است و در نهایت در بخش آخر این مقاله نتایج حاصل از شبیه سازی سری و شبیه سازی موازی که با استفاده از سیستم پردازشگرهای موازی، آزمایشگاه پردازش فوق سریع دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران به انجام رسیده است، ارائه می‌شود.

شبیه سازی سیستم‌های بس ذره‌ای از دو دیدگاه قابل تأمل است [۳]. در برخی مدل‌ها رفتار ذره‌ای به واسطه برهم کنش ذرات با یکدیگر مد نظر است حال آنکه در دسته‌ای دیگر رفتار جمعی ذرات از اهمیت برخوردار بوده و جزئیات برهم کنش میان ذرات از اهمیت کمتری برخوردار است. در مسئله‌ای چون پلاسما از آنجا که سیستم مورد مطالعه از تعداد بی‌شماری ذره باردار تشکیل شده در نظر گرفتن مدل‌های ذره‌ای نیاز به منابع عظیم محاسباتی دارد و در نتیجه رفتار کلی سیستم در طول مشخصه دیبای مورد توجه قرار می‌گیرد. در یک شبکه فضایی با تعداد ذرات بسیار زیاد در فضای هر سلول که شامل حد فاصل دو نقطه همسایه شبکه است، ذرات تا حدی هویت ذره‌ای خود را از دست می‌دهند. به طور مشابه ذرات پلاسما نیز هویت فردی خود را در پدیده‌های دسته جمعی که در مقیاس‌های بزرگتر از طول مشخصه دیبای عمل می‌کنند از دست می‌دهند. یکی از مدل‌هایی که در آن رفتار هر ذره متأثر از اثرات دسته جمعی ذرات سیستم می‌باشد را تکنیک ذره در سلول می‌نامند.

چرخه محاسباتی روش ذره در سلول که برای شبیه سازی پلاسما به کار برده می‌شود شامل ۴ مرحله اساسی است که در هر قدم زمانی تکرار می‌شوند [۲]. در این محاسبات دو دسته کمیت مطرح می‌باشند، دسته اول کمیت‌های وابسته به ذرات که با اندیس i مشخص می‌شوند و دسته دوم کمیت‌های وابسته به شبکه که با اندیس z مشخص می‌شوند. اولین

۱. Scatter

۲. Gather

$X_j = j\Delta x$ شناخته می شود. اولین مرحله شبیه سازی شامل تعیین موقعیت ها و سرعت های اولیه ذرات است. برای تعیین موقعیت های اولیه ذرات، از تابع تولید اعداد تصادفی که اعدادی را در محدوده $0 \leq x \leq L$ تولید می نماید، استفاده می شود. و برای تعیین سرعت های اولیه ذرات از روش قبول/رد^۱ استفاده شده است، چرا که این روش با استفاده از تابع توزیع ارائه شده سرعت های اولیه را مقدار دهی می کند [۶]. در مرحله بعدی موقعیت ذرات در شبکه مشخص می شود، و نزدیکترین نقاط شبکه به هر ذره تعیین و مکان هر ذره در سلول مورد نظر تعیین می شود. پس از اتمام این مراحل، با استفاده از روش PIC اطلاعات ذرات به شبکه منتقل می شود و چگالی های بار بر روی نقاط شبکه تعیین می شود. در این مرحله با استفاده از تبدیل گسسته فوری، چگالی های بار به دست آمده، به فضای بردار موج منتقل می شوند، در این فضا معادله پواسون تبدیل یافته برای محاسبه پتانسیل ها بر روی نقاط شبکه حل می شود. در مرحله بعد با به کارگیری عکس تبدیل گسسته فوری پتانسیل ها به فضای مکان منتقل می شوند. به وسیله این پتانسیل ها که بر روی نقاط شبکه محاسبه شده اند، با به کارگیری روش مشتق مرکزی، میدان های الکتریکی بر روی نقاط شبکه تعیین می شوند. در مرحله بعدی این شبیه سازی، بار دیگر با استفاده از روش PIC، اطلاعات از نقاط شبکه به ذرات منتقل می شود، تا میدان الکتریکی اعمال شده بر هر ذره در این سیستم تعیین شود. با اتمام این مرحله نیروی وارد بر هر ذره تعیین می شود، در مرحله آخر با حل معادلات حرکت برای هر ذره موقعیت ها و سرعت های جدید به دست می آیند و تمام مراحل ذکر شده بار دیگر برای این موقعیت ها و سرعت های جدید در قدم زمانی بعدی تکرار خواهد شد. شکل ۱ فضای فاز متناظر با یکی از شبیه سازی های انجام شده را نمایش می دهد. همان گونه که انتظار می رود، دو پرتوی الکترونی در پس زمینه یونی با گذر زمان تحت تأثیر اندرکنش های الکترونی پدیده شاخه ای شدن^۲ را تجربه نمودند. حفره های ایجاد شده، بیانگر

$$f(x, v) = \frac{n_0}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \right\} \left\{ \exp \left(-\frac{(v-v_b)^2}{2v_{th}^2} \right) + \exp \left(-\frac{(v+v_b)^2}{2v_{th}^2} \right) \right\}, \quad (1)$$

در اینجا $f(x, v) dx dv$ تعداد الکترون هایی است که مکان آنها در بازه x تا $x+dx$ قرار دارد و سرعت آنها در بازه v تا $v+dv$ قرار می گیرد و همچنین دمای پرتو، T ، با رابطه $v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}$ به سرعت گرمایی پرتوها مربوط است. در اینجا k_B ثابت بولتزمن می باشد. معادلات حاکم بر شبیه سازی محیط مورد نظر عبارتند از [۷]:

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i, \quad (1)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{m_e} E(r_i), \quad (2)$$

$$E(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} [n_0 - n(x)]. \quad (4)$$

در اینجا ϵ_0 ، ضریب گذردهی خلاء می باشد، $n(x)$ چگالی عددی الکترون ها (به عبارتی $n(x) dx$ تعداد الکترون ها در بازه x تا $x+dx$ است)، و n_0 چگالی عددی یکنواخت یونها می باشد.

شرط مرزی انتخاب شده برای حل مسئله از نوع تناوبی

است، به عبارت دیگر [۷]:

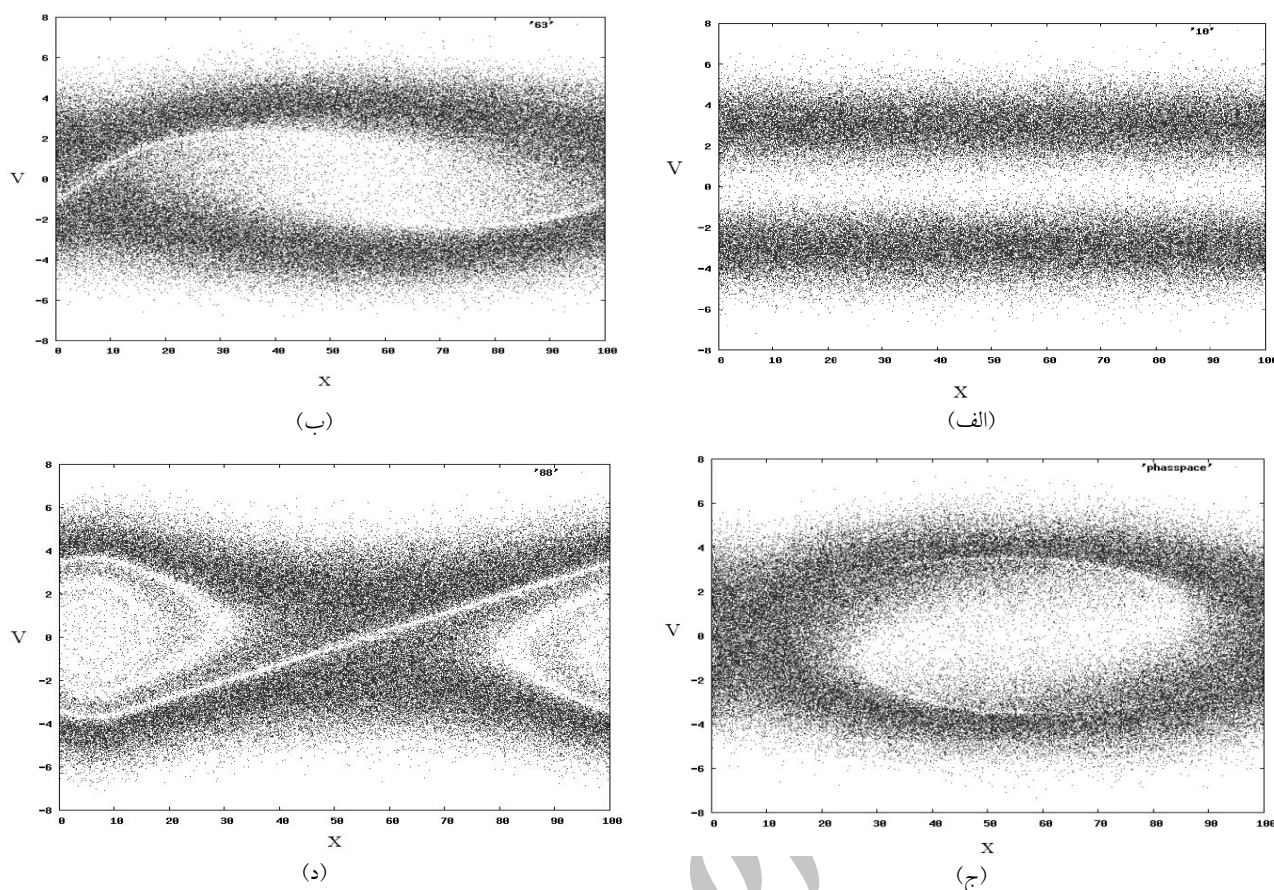
$$\Phi(x) = \Phi(x+L), \quad (5)$$

که در آن L طول سیستم تحت بررسی ما است.

شبیه سازی انجام شده یک بعدی و در تقریب الکتروستاتیک است. در این قسمت به ذکر مراحل شبیه سازی می پردازیم. در ابتدا محدوده شبیه سازی را شبکه بندی می کنیم، طول سیستم مورد نظر برابر L انتخاب شده است. محدوده انتخاب شده شامل J نقطه شبکه خواهد بود، که فاصله میان هر دو نقطه شبکه از رابطه $\Delta x = \frac{L}{J}$ تبعیت می کند. شمارنده نقاط شبکه j می باشد به طوری که، $j = 0, \dots, J-1$. هر نقطه شبکه با مختصات

۱. Acception/Rejection

۲. Branching



شکل ۱. نمونه‌ای از فضای فاز شبیه سازی شده پدیده ناپایداری دو جریانی برای دو پرتو الکترونی در محیط پلاسما. (الف) در زمان $t=10s$ ، (ب) در زمان $t=53s$ ، (ج) در زمان $t=87s$ ، (د) در زمان $t=88s$.

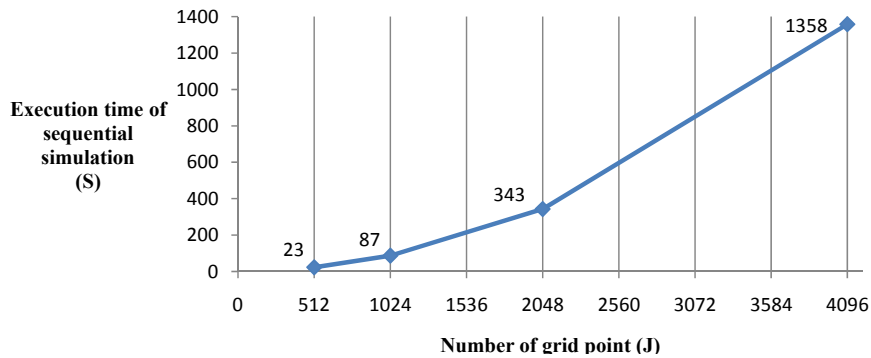
برنامه میان پردازنده‌ها این الگوریتم به شکل موازی بازنویسی می‌شود. افزایش زمان در بخش محاسبه تبدیلات گسسته فوریه با افزایش تعداد نقاط شبکه، J ، متناظر می‌باشد. نمودار زمان اجرای برنامه برحسب افزایش تعداد نقاط شبکه در شکل ۲ ترسیم شده است. لازم به ذکر است که به دلیل استفاده از تبدیل گسسته فوریه در این شبیه سازی تعداد نقاط شبکه می‌بایست از مرتبه $J=2^n$ باشد که در آن داریم $n=0, 1, 2, \dots$.

در موازی سازی برنامه سری، تبدیل گسسته فوریه بین پردازنده‌ها شکسته می‌شود تا هر کدام از آنها به صورت همزمان به محاسبه بخش مربوط به خود پردازد. ابتدا داده‌های مورد نیاز برای محاسبه سری‌های تبدیل گسسته فوریه از سرور^۱ به پردازنده‌های مورد نظر ارسال خواهد شد و پس از انجام

نقاطی است که در آنها امکان حضور الکترون وجود ندارد. لازم به ذکر است که در محل حفره‌ها، پتانسیل به حداکثر مقدار خود میل می‌نماید و برای الکترون‌ها به شکل چاه پتانسیل ظاهر می‌شود که در آن امکان حضور الکترون‌ها وجود ندارد.

شبیه سازی انجام شده، که در بالا به معرفی آن پرداخته شد، از لحاظ زمانی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. دو قانون استاندارد برای بررسی زمانی یک برنامه سری وجود دارد: امدال (Amdahl) و گوستافسون - بارسیس (Gustafson-Barsis) [۸]. با استفاده از این دو قانون، قابلیت شبیه سازی سری برای موازی سازی مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی‌های زمانی حاکی از آن بود که الگوریتم برنامه در بخش محاسبه تبدیلات فوریه بسیار زمان گیر است، بنابراین با تقسیم وظایف این قسمت از الگوریتم

۱. Server



شکل ۲. افزایش زمان اجرای برنامه سری با افزایش تعداد نقاط شبکه.

جدول ۱. بررسی زمانی شبیه سازی سری.

تعداد ذرات	طول سیستم	تعداد نقاط شبکه	قدم زمانی	حداکثر زمان اجرا	زمان قسمت سری برنامه	زمان قسمتی از برنامه که موازی خواهد شد	زمان کل اجرای برنامه
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 512$	$dt = . / 1s$	$T_{max} = 20s$	$\sigma = 15s$	$\phi = 8s$	$T = 23s$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 1024$	$dt = . / 1s$	$T_{max} = 20s$	$\sigma = 37s$	$\phi = 50s$	$T = 87s$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 2048$	$dt = . / 1s$	$T_{max} = 20s$	$\sigma = 146s$	$\phi = 195s$	$T = 343s$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 4096$	$dt = . / 1s$	$T_{max} = 20s$	$\sigma = 563s$	$\phi = 789s$	$T = 1358s$

برنامه هدایت می‌شوند. برای ارسال و دریافت داده بین پردازنده‌ها از توابع Blocking استاندارد MPI استفاده شده. برای ارسال داده از (MPI_Send) و برای دریافت داده از (MPI_Recv) استفاده شده است.

سیستم خوشه‌ای موجود در دانشکده فیزیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، از هشت گره (node) تشکیل شده است، و دارای پردازنده‌هایی از نوع چهار هسته‌ای (Quad) و Q6600 با سرعت ۲/۶۶ گیگاهرتز (Clock speed) و RAM سیستم‌ها بین ۲ تا ۴ گیگا بایت است. روی هم رفته امکان استفاده از ۳۲ هسته محاسباتی در این سیستم امکان پذیر است. ارتباط این گره‌های محاسباتی از طریق سوئیچ Gigabit برقرار است.

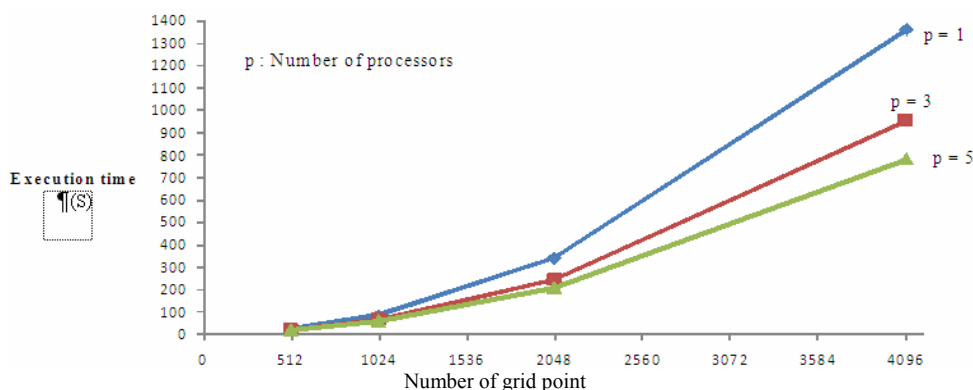
به دلیل محدودیت در انتخاب تعداد نقاط شبکه $(J = 2^n)$ ، در انتخاب تعداد پردازنده‌ها نیز محدودیت به وجود می‌آید. تقسیم کار میان پردازنده‌ها بدون در نظر گرفتن سرور متناظر

محاسبات مورد نیاز در هر پردازنده، در نهایت داده‌ها جهت انجام ادامه محاسبات به سرور ارسال می‌شود.

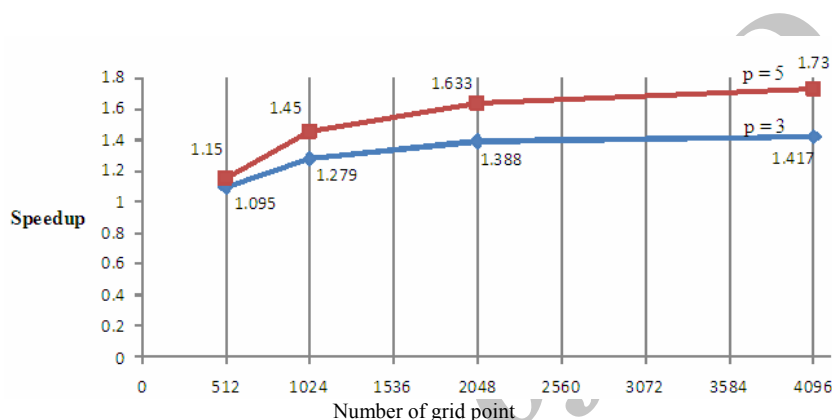
σ قسمتی از زمان کل اجرای برنامه است که پس از موازی کردن به صورت سری باقی خواهد ماند، و ϕ آن قسمت از زمان کل اجرای برنامه است که موازی خواهد شد. در این شبیه سازی ϕ قسمتی از زمان کل اجرای برنامه است که محاسبات تبدیل گسسته فوری به خود اختصاص می‌دهد. با استفاده از داده‌های جدول ۱، می‌توان بیشینه تسریع برنامه موازی را با استفاده از دو قانون امدال و گوستافسون - بارسیس به دست آورد.

این شبیه سازی در محیط سیستم عامل لینوکس (Linux، Redhat interprise 5.0)، انجام شده است. برای شبیه سازی موازی این برنامه از توابع استاندارد MPI استفاده شده است. این توابع به واسطه یک کتابخانه‌ای تحت نام LamMPI در

۱. Speedup



شکل ۳. زمان اجرای برنامه برحسب تعداد نقاط شبکه. منحنی متناظر با $p=1$ منحنی اجرای برنامه سری است و منحنی‌های متناظر با $p=3$ و $p=5$ مربوط به اجرای برنامه موازی به ترتیب بر روی ۳ و ۵ پردازنده است.



شکل ۴. نمودار تسریع اجرای برنامه موازی بر روی ۳ و ۵ پردازنده، بر حسب تعداد نقاط شبکه.

جدول ۲. مقایسه بیشینه تسریع پیش بینی شده از دو قانون امدال و گوستافسون - بارسیس با تسریع به دست آمده از اجرای برنامه شبیه سازی موازی بر روی ۳ پردازنده.

تعداد ذرات	طول سیستم	تعداد نقاط شبکه	حداکثر زمان اجرا	بیشینه تسریع پیش بینی شده از قانون امدال بر روی ۳ پردازنده	بیشینه تسریع پیش بینی شده از قانون گوستافسون - بارسیس بر روی ۳ پردازنده	تسریع به دست آمده از اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۳ پردازنده
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 512$	$T_{max} = 20s$	$\psi = 1/301$	$\psi = 1/302$	$\psi = 1/095$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 1024$	$T_{max} = 20s$	$\psi = 1/612$	$\psi = 1/622$	$\psi = 1/279$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 2048$	$T_{max} = 20s$	$\psi = 1/616$	$\psi = 1/618$	$\psi = 1/388$
$N = 50000$	$L = 100$	$J = 4096$	$T_{max} = 20s$	$\psi = 1/637$	$\psi = 1/638$	$\psi = 1/417$

شده است.

تسریع‌های به دست آمده از اجرای برنامه بر روی سیستم‌های نامبرده شده، با بیشینه تسریع‌های به دست آمده از دو قانون امدال و گوستافسون - بارسیس، مقایسه می‌شوند. نتایج حاصل در جدول‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند.

با تقسیم تعداد نقاط شبکه میان پردازنده‌ها است، با این توضیح تعداد کل پردازنده از رابطه $p = 2^n + 1$ تبعیت می‌کند، در این رابطه p تعداد پردازنده‌ها با احتساب سرور است. برنامه مورد نظر بر روی سیستم معرفی شده بر روی ۳ و ۵ پردازنده اجرا شده و نتایج حاصل مطابق نمودارهای شکل‌های ۳ و ۴ گزارش

جدول ۳. مقایسه بیشینه تسریع پیش بینی شده از دو قانون امدال و گوستافسون - بارسیس با تسریع به دست آمده از اجرای برنامه شبیه سازی موازی بر روی ۵ پردازنده.

تعداد ذرات	طول سیستم	تعداد نقاط شبکه	حداکثر زمان اجرا	بیشینه تسریع پیش بینی شده از قانون امدال بر روی ۵ پردازنده	بیشینه تسریع پیش بینی شده از قانون گوستافسون - بارسیس بر روی ۵ پردازنده	تسریع به دست آمده از اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۵ پردازنده
N = ۵۰۰۰۰	L = ۱۰۰	J = ۵۱۲	Tmax = ۲۰s	$\psi = 1/385$	$\psi = 1/383$	$\psi = 1/15$
N = ۵۰۰۰۰	L = ۱۰۰	J = ۱۰۲۴	Tmax = ۲۰s	$\psi = 1/851$	$\psi = 1/852$	$\psi = 1/45$
N = ۵۰۰۰۰	L = ۱۰۰	J = ۲۰۴۸	Tmax = ۲۰s	$\psi = 1/843$	$\psi = 1/844$	$\psi = 1/633$
N = ۵۰۰۰۰	L = ۱۰۰	J = ۴۰۹۶	Tmax = ۲۰s	$\psi = 1/875$	$\psi = 1/876$	$\psi = 1/73$

پردازنده و زمان اجرای شبیه سازی سری کمتر است. نمودار ۵، تسریع حاصل از اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۳ و ۵ پردازنده را نشان می دهد. تسریع های به دست آمده از زمان های حاصل از اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۳ و ۵ پردازنده با تسریع های حاصل از دو قانون امدال و گوستافسون - بارسیس در جدول های ۲ و ۳ مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. نتایج ارائه شده در این جدول ها حاکی از آن است که موازی سازی انجام شده با قوانین نامبرده شده مطابقت دارد و بنا بر این شبیه سازی موازی انجام شده برای مسئله "ناپایداری دو جریانی" در پلاسما بر روی سیستم خوشه ای دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، دارای عملکرد قابل قبولی بوده است. این شبیه سازی قابلیت ارتقاء به ۲ و ۳ بعد و از حالت الکتروستاتیک به الکترومغناطیس را دارا است. می توان با به کار بردن روش های محاسباتی کارآمدتر برنامه شبیه سازی معرفی شده را بهتر و با کارایی بالاتری نیز موازی نمود. امید است در آینده نه چندان دور به این اهداف نیز دست یابیم.

نمودار ۳، حاوی اطلاعاتی از زمان اجرای برنامه بر حسب تعداد نقاط شبکه است. مطابق اطلاعات مندرج در این نمودار زمان اجرای برنامه با افزایش تعداد نقاط شبکه افزایش می یابد. افزایش تعداد نقاط شبکه باعث افزایش محاسبات در تبدیل گسسته فوریه می شود و در نتیجه این امر سبب افزایش زمان اجرای برنامه خواهد شد. برای اثبات این مطلب، برنامه سری از لحاظ زمانی مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی ها کسری از زمان کل اجرای برنامه که صرف محاسبات تبدیل گسسته فوریه شده است، بر حسب تغییر تعداد نقاط شبکه اندازه گیری می شود. نتایج حاصل از اندازه گیری های انجام شده در جدول ۱ ارائه شده است. در نمودار ۴ زمان اجرای شبیه سازی سری با زمان اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۳ و ۵ پردازنده مقایسه شده است. مطابق انتظار زمان اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۳ پردازنده از زمان اجرای شبیه سازی سری، و همچنین زمان اجرای شبیه سازی موازی بر روی ۵ پردازنده از زمان اجرای آن بر روی ۳

Wesley, Redwood City (1989).

- G Filipic, *Principles of Particle in Cell Simulation*, University of Ljubljana, Faculty for Mathematic and Physics (2008).
- R Fitzpatrick, *Distribution Function*, Texas University, Department of Physics (2006).
- R Fitzpatrick, *An example 1D PIC code*, Texas University, Department of Physics (2006).
- A Karbowski, *Amdahl's and Gustafson-Barsis Laws Revisited*, Warsaw University of Technology (2008).

- R W Hockney, and J W Eastwood, *Computer Simulation Using Particle*, Britain by J W Arrowsmith Ltd, Bristol (1988).
- C K Birdsall and A B Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill, New York (1985).
- T Oscarsson, C Dion, and K Ronnmark, *Lecture Notes on Computer Simulation Techniques*, UMEA University, Department of Physics (2007).
- T Tajima, *Computational Plasma Physics: With Applications to Fusion and Astrophysics*, Addison-