

St 304 Al 7075-T6

Amirah@aut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۴/۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۱۱/۱۹)

سبب تولید و انتقال موج‌های آکوستیکی می‌شوند، بر حسب

قلمرو فرکانسی به سه دسته تقسیم می‌شوند [۲]:

- نوسان‌هایی که از حدود ۲۰ سیکل بر ثانیه به پایین هستند، ارتعاشات فروصوتی نامیده می‌شوند. این ارتعاشات توسط چشمه‌های بزرگی تولید می‌شوند که امواج زمین لرزه از آن نوع می‌باشند.

- نوسان‌هایی که توسط حس شنوایی انسان قابل درک بوده و محدوده فرکانسی آنها از ۲۰ تا ۱۶۰۰۰ سیکل بر ثانیه هستند، به ارتعاشات صوتی معروفند.

نوسان‌هایی که از حدود ۱۶۰۰۰ سیکل بر ثانیه به بالا را شامل می‌شوند، ارتعاشات فراصوتی یا آلتراسونیک نامیده می‌شوند.

به معنای وسیع کلمه، تولید، انتقال و دریافت انرژی به صورت ارتعاش در ماده را آکوستیک نامند. جابه‌جایی اتم‌ها و مولکول‌ها از وضع عادی خود در سیال و یا در جامد موجب پیدایش نیروی الاستیک برگرداننده داخلی خواهد شد که مربوط به سفتی ماده است. کشش حاصل از فنر کشیده شده و ازدیاد فشار سیال در هنگام تراکم نمونه‌هایی از این نوع نیرو می‌باشند [۱].

تأثیر این نیروی برگرداننده<sup>۱</sup> به همراه اینرسی ماده، باعث قابلیت تولید نوسان و انتقال آن در ماده می‌شود. نوسان‌هایی که

۱. Elastic restoring force

یکی از خصوصیات و پارامترهای مهم مهندسی نام برد، تا اینکه بتوان این جزء را در طراحی و آنالیز سازه‌ها<sup>۵</sup> و ماشین‌ها وارد نمود. از این دیدگاه می‌توان به خستگی در فرکانس رزونانس یا فرکانس نزدیک رزونانس، پاسخ آکوستیکی - خستگی، اصطکاک لغزشی و غلتشی شفت‌های دورانی، ابزارهای هیستریزیسی و تولید حرارت تحت تنش را نام برد [۴].

مدل‌های تحلیلی مختلفی در بررسی و مطالعه میرایی وجود دارد. مدل‌های میرایی ویسکوز، میرایی هیستریزیسی و میرایی کلوب از جمله مدل‌های متداول در تحلیل و شبیه‌سازی میرایی مواد فلزی است [۵-۸]. در این مقاله از مدل میرایی ویسکوز در بررسی میرایی امواج آکوستیک استفاده شده است.

این قسمت به بررسی تحلیلی افت امواج آکوستیک می‌پردازد. با توجه به المان موجود در شکل ۱ و با نوشتن قوانین نیوتنی حول المان مذکور، می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات طولی میرا شده را به صورت رابطه (۱) به دست آورد.

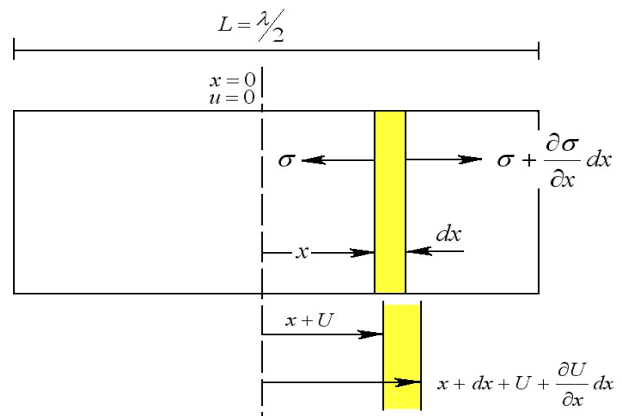
مدل افت ویسکوز به عنوان مدل میرایی در حل روابط انتشار موج در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که مدل افت ویسکوز، ساده‌ترین مدل در مطالعه ارتعاشات سیستم‌های میرا شده<sup>۶</sup> است [۹].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

در این رابطه  $u$  و  $c$  به ترتیب جابه‌جایی، سرعت صوت در ماده بی‌نهایت و  $\delta$  ضریب استهلاک ویسکوز بر واحد جرم می‌باشند [۱۰].

با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها می‌توان معادله جابه‌جایی موج آکوستیک طولی میرا شده را به صورت زیر در نظر گرفت [۷]:

$$u(x, t) = f(x)g(t) \quad (2)$$



شکل ۱. استوانه‌ای که با استهلاک ویسکوز و در شرایط رزونانس، ارتعاش طولی می‌کند.

مطالعه بر روی رفتار درونی مواد اهداف مختلفی را دنبال کرده، اما سه انگیزه اصلی در مطالعه میرایی عبارت است از:

میرایی به عنوان ابزاری است که از آن برای تفسیر رفتار مواد استفاده می‌شود، به طوری که در آن منجر به رفتار غیرکشسان مواد و نیز منجر به تولید انرژی در مواد می‌شود. متخصصان مواد و فیزیکدانان حالت جامد، از مطالعه میرایی برای تعیین ضرایب نفوذ، اندازه‌گیری حلالیت، فازهای جدید، مشخص کردن میزان رسوب، تعیین مقادیر بسیار کم کربن و نیتروژنی که در آهن حل شده است استفاده کرده و نیز برای تعیین برهم‌کنش‌های بین اتمی (بین‌نشین<sup>۱</sup> یا جانشین<sup>۲</sup>) استفاده می‌کنند. شیمی - فیزیکدانان نیز برای بررسی ساختار مواد پلیمری و الاستومرها از میرایی و مطالعه آن استفاده می‌کنند [۳].

انگیزه دوم در مطالعه میرایی، کاربرد آن به عنوان ابزاری به منظور بازبینی<sup>۳</sup> ساختار مواد است. برای مثال میرایی در مشخص کردن خلوص فلزات به کار می‌رود. از کاربردهای دیگر میرایی، استفاده آن در تعیین تردی هیدروژنی فولادهای کربنی و نیز در تعیین خستگی<sup>۴</sup> و خزش مواد می‌توان نام برد [۳].

سومین و مهم‌ترین انگیزه را می‌توان حضور میرایی به عنوان

۱. Interstice atom

۲. Substitutional atom

۳. Inspection

۴. Fatigue

۵. Structural analysis

۶. Damped vibrational systems

صورت که:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (8)$$

با اعمال شرایط مرزی (۷) و (۸) در معادله (۶)، دو رابطه زیر قابل حصول است:

$$C - D = 0, \quad (9)$$

$$\frac{k}{c} (Ce^{\frac{kL}{c}} - De^{-\frac{kL}{c}}) = 0. \quad (10)$$

با توجه به نیاز به حل غیر بدیهی، دو ضریب  $\alpha$  و  $\omega$  در رابطه (۵) به صورت زیر می‌شود:

$$\alpha = 0, \quad \omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}; \quad (11)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \infty \Rightarrow k_n = \frac{n\pi c}{L} j,$$

ارتعاش با فرکانس زاویه‌ای میرا شده  $\Omega_n$  به صورت رابطه (۱۲) می‌شود. رابطه بین فرکانس زاویه‌ای میرا  $\Omega_n$  و فرکانس زاویه‌ای بدون میرا  $\omega_n$  نیز در این رابطه مشخص است.

$$\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 - (\delta/2)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (12)$$

شرایط اولیه بیان شده در روابط (۱۳) و (۱۴) برای حصول دو ضریب دیگر معادله جابه‌جایی موج ضروری است و با کمک این دو رابطه، ضرایب نامشخصی در معادله انتشار موج باقی نخواهد ماند.

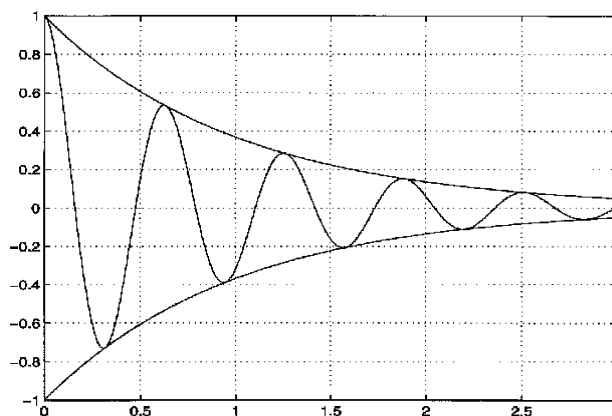
$$U(x, 0) = D(x), \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (14)$$

با اعمال این شرایط و استفاده از خاصیت تعامد در استفاده از جبر فوریه، معادله جابه‌جایی انتشار موج آکوستیک در ماده میرا به صورت زیر می‌شود:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{2}t} \left\{ \int_0^L \cos\left[\frac{n\pi}{L}x\right] \frac{D(x)}{L} dx \right\} \times \left[ \cos(\Omega_n t) + \frac{\delta}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (15)$$

شکل ۲ معادله موج آکوستیک در درون ماده دارای استهلاک را نشان می‌دهد. این نمودار شامل دو جمله هارمونیک و



شکل ۲. نمودار جابه‌جایی میرا شده یک استوانه که در حالت آزاد-آزاد ارتعاش می‌کند.

با قرار دادن این رابطه در معادله دیفرانسیل حرکت (معادله ۱)، دو معادله دیفرانسیل زمانی (معادله ۳) و مکانی (معادله ۴) زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \delta \frac{dg}{dt} - k^2 g = 0, \quad (3)$$

$$c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f = 0, \quad (4)$$

ثابت  $k$  که در نتیجه جداسازی متغیرها ظاهر می‌شود، ممکن است عدد ثابت و یا حقیقی نبوده و به فرم کاملاً موهومی و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

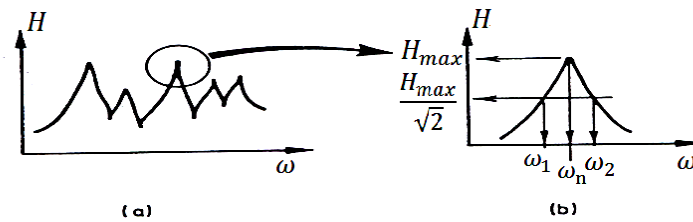
$$k = \alpha + j\omega, \quad (5)$$

ضرایب  $\alpha$  و  $\omega$ ، ضرایب دلخواهی می‌باشند و مقدار آنها با در نظر گرفتن شرایط مرزی مشخص حاصل خواهد شد.

با حل معادله‌های جدا شده (۳) و (۴)، معادله جابه‌جایی موج طولی با چهار ضریب دلخواه  $A, B, C, D$  به شکل رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$u(x, t) = \left( Ae^{-\frac{\delta}{2}t} e^{\left(\sqrt{\delta^2 + 4k^2}/2\right)t} + Be^{-\frac{\delta}{2}t} e^{\left(-\sqrt{\delta^2 + 4k^2}/2\right)t} \right) \times \left( Ce^{\frac{kx}{c}t} + De^{-\frac{kx}{c}t} \right). \quad (6)$$

با فرض موجودیت رزونانس در استوانه و موجودیت دو شکم ارتعاشی در دو سر استوانه، شرایط مرزی دارای المان‌های میرایی نبوده و دو طرف استوانه حالت آزاد-آزاد دارد، به این



شکل ۳. شماتیک روش پیک‌پکنینگ در استخراج پارامتر میرایی از منحنی تابع پاسخ فرکانسی.

هماهنگ ساده، که به شکل مودهای ارتعاشی موسومند، در نظر گرفت. این مفهوم، مشابه استفاده از ترکیب فوریه امواج سینوسی و کسینوسی برای نمایش یک شکل موج پیچیده می‌باشد. شکل مودهای ارتعاشی، وابسته به دینامیک سازه بوده و توسط خواص فیزیکی (جرم، سختی، میرایی) و نحوه توزیع فضایی آنها، تعیین می‌شوند. شکل مود ممکن است حقیقی و یا موهومی باشد. هر مود، متناظر با یک فرکانس طبیعی می‌باشد. میزان مشارکت هر مود طبیعی در ارتعاش کلی سیستم، به مشخصات منبع تحریک و همچنین به شکل مود موج مربوطه بستگی دارد [۱۲].

از روش‌های مرسوم در آنالیز مودال، روش مودال پیک-پکنینگ برای برآورد مشخصات ذاتی استفاده شد. نحوه محاسبه میرایی با این روش، از طریق نمودار تابع پاسخ فرکانسی<sup>۱</sup> است، به این صورت که در فرکانس رزونانس ( $\omega_n$ ) مقدار ماکزیمم تابع پاسخ فرکانسی خوانده شده و مقدار آن بر  $\sqrt{2}$  تقسیم می‌شود (شکل ۳). اگر این مقدار  $H_{max}$  نامیده شود، با عبور دادن یک خط افقی به ارتفاع  $H_{max}/\sqrt{2}$  منحنی تابع پاسخ فرکانسی در دو نقطه قطع خواهد شد. دو فرکانسی که حاصل تقاطع این خط افقی و منحنی تابع پاسخ فرکانسی است، فرکانس‌های نیم‌توان<sup>۲</sup> نام دارند ( $\omega_1$  و  $\omega_2$ ). بر اساس فرکانس‌های نیم‌توان و فرکانس رزونانس، مقدار  $\xi$  (نسبت میرایی) از رابطه (۱۲) حاصل می‌شود. روند مذکور در شکل (۳) نشان داده شده است [۱۳].

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (16)$$

نمایی است، به طوری که با حرکت شبه سینوسی موج در درون ماده، دامنه موج به صورت یک تابع نمایی کاسته و میرا می‌شود.

با حصول معادله (۱۵)، جابه‌جایی میراشده موج آکوستیک حاصل می‌شود. و از این رابطه می‌توان معادلات دیگری چون تنش و کرنش حاصل از موج آکوستیک را که در طول ماده و در اثر حرکت در آن بتدریج مستهلک می‌شود را استخراج کرد. به عنوان مثال، با نوشتن معادله تنش حاصل از موج آکوستیک می‌توان به این نتیجه رسید که در اثر تحریک یک ماده با موج آکوستیک، تنش اعمالی از طرف این موج به تک تک ذرات ماده با گذشت زمان و با دور شدن از محل تحریک کاسته می‌شود.

یکی از مؤثرترین روش‌های تخمین میرایی امواج آکوستیک، استفاده از آنالیز مودال و تکنیک‌های موجود در آن است. آنالیز مودال، فرآیند تعیین خواص ذاتی دینامیکی یک سیستم در قالب فرکانس‌های طبیعی، ضرایب میرایی و شکل مودها و به کارگیری آنها به منظور ایجاد مدل ریاضی از رفتار دینامیکی سیستم می‌باشد. این مدل ریاضی به مدل مودال سیستم و اطلاعات مربوط به آن، داده‌های مودال نامیده می‌شود [۱۱].

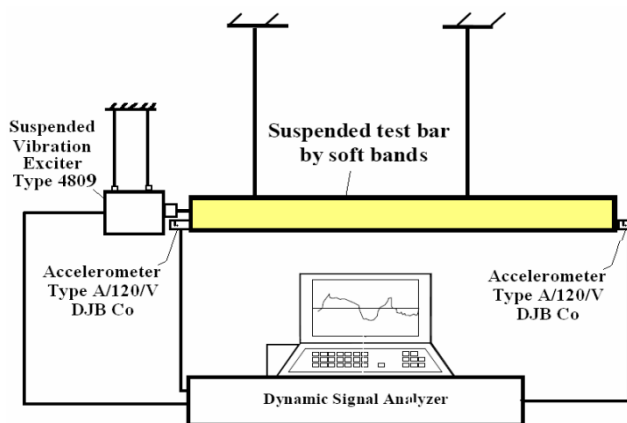
دینامیک یک سازه از نظر فیزیکی، از دو بخش فرکانس و موقعیت تشکیل شده است. این موضوع را می‌توان به روشنی و در تحلیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سیستم‌های پیوسته، مانند تیرها مشاهده نمود. آنالیز مودال بر این اصل استوار است که پاسخ ارتعاشی یک سیستم دینامیکی خطی و نامتغیر با زمان را می‌توان به صورت ترکیبی خطی مجموعه‌ای از حرکات

۱. Frequency Response Function or FRF

۲. Half power

جدول ۱. طول و قطر دو میله استوانه‌ای فولادی و آلومینیومی.

	طول (mm)	قطر (mm)
St 304	۱۷۰۰	۴۰
Al 7075-T6	۱۶۷۶	۵۱



شکل ۴. شماتیک انجام آزمون‌ها به منظور به دست آوردن ضرایب میرایی انتشار موج در نمونه‌های تحت آزمون.

نمونه، قطر نمونه یکسان و محور نمونه‌ها کاملاً بر دو سطح مقطع ابتدا و انتها عمود باشد. این امر باعث حرکت یکنواخت امواج طولی صفحه‌ای در درون ماده می‌شود که صرف نظر از افت انرژی موج در ماده، مشخصات موج ورودی با مشخصات موج دریافتی از انتهای دیگر نمونه یکسان خواهد شد. علاوه بر این، سطوح نمونه‌ها به دقت پرداخت گردید تا این سطوح مشارکتی در افت کلی ماده نداشته و افت به وجود آمده تنها در اثر افت داخلی ماده باشد. شایان ذکر است که با توجه به اختلاف زیاد ضرایب آکوستیکی فلزاتی چون فولاد و آلومینیوم در مقابل هوا، عبور موج از سطح فلز به داخل هوا بسیار کم می‌باشد.

نحوه انجام آزمون مودال هر دو نمونه فولادی و آلومینیومی، به صورت شماتیک و مطابق شکل ۴ می‌باشد. با توجه به شکل ۴ هر دو نمونه به وسیله دو بند نرم که از کنف انتخاب شد، آویخته شده است. با توجه به تأثیر مشخصات هندسی مواد در خصوصیات مودال آنها، محل آویخته شدن نمونه‌ها به گونه‌ای محاسبه و انتخاب شد که اثر خمش و تغییر شکل میله‌های آزمون به حداقل رسیده و هر

شایان ذکر است که در استخراج پارامتر افت ویسکوز و پارامتر افت سازه‌ای می‌بایست به ترتیب از منحنی موبیلیتی<sup>۱</sup> و منحنی رسپتانس<sup>۲</sup> مربوط به FRF استفاده کرد [۹].

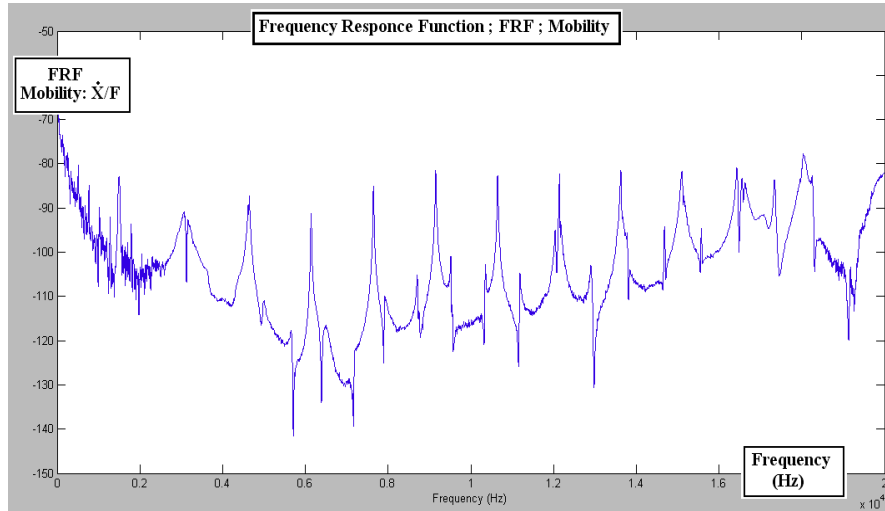
آلومینیوم، فولاد و آلیاژهای مختلف آنها از جمله مواد پر کاربرد در زمینه‌های صنعتی و غیرصنعتی است. دو جنس آلومینیوم Al 7075-T6 و فولاد St 304 برای انجام آزمون تضعیف امواج آکوستیکی انتخاب شد. از جمله استفاده‌های دو ماده مذکور، استفاده از آنها در ساخت مبدل‌های فراصوتی پیزواکتریکی است. این مبدل‌ها در تولید امواج آکوستیک فرکانس بالا استفاده می‌شود. مشخصات نمونه آلومینیومی و نمونه فولادی ساخته شده برای آزمون در جدول ۱ آورده شده است. از نکاتی که در آماده‌سازی و ساخت نمونه‌ها دارای اهمیت فراوان است عبارتند از: استوانه‌ای بودن کامل نمونه‌ها، به طوری که در تمام طول هر

۳. Mobility

۴. Receptance

جدول ۲. مشخصات تجهیزات مورد استفاده [۱۴] و [۱۵].

	Vibration Exciter or Shaker	Accelerometer	Power Amplifier	Analyzer
نوع	Type 4808: B&K Co	A/120/V: DJB Co	2719: B&K Co	B&K Software



شکل ۵. نمودار تابع پاسخ فرکانسی لگاریتمی نمونه ۱۶۷۶ میلیمتری آلومینیومی Al 7075-T6 به قطر ۵۱ میلیمتر.

تشدید است و با استفاده از روش پیک‌پیکینگ میزان میرایی در مودهای مختلف قابل محاسبه می‌باشد. این مقادیر در جدول ۲ آورده شده است.

نمودار تابع پاسخ فرکانسی نمونه فولادی St 304 را نیز می‌توان مطابق راهکار گفته شده در مورد نمونه آلومینیومی مورد مطالعه تجربی قرار داد. نتایج حاصل از این آزمون برای نمودار پاسخ فرکانسی به صورت شکل ۶ می‌باشد.

مقادیر نسبت میرایی هر دو ماده در نرم‌افزار برنامه نویسی مطلب (Matlab7) وارد شده و با گذراندن بهترین نمودار از این داده‌ها، ضابطه و نمودار میرایی هر دو ماده بر حسب فرکانس حاصل شد (شکل‌های ۷ و ۸).

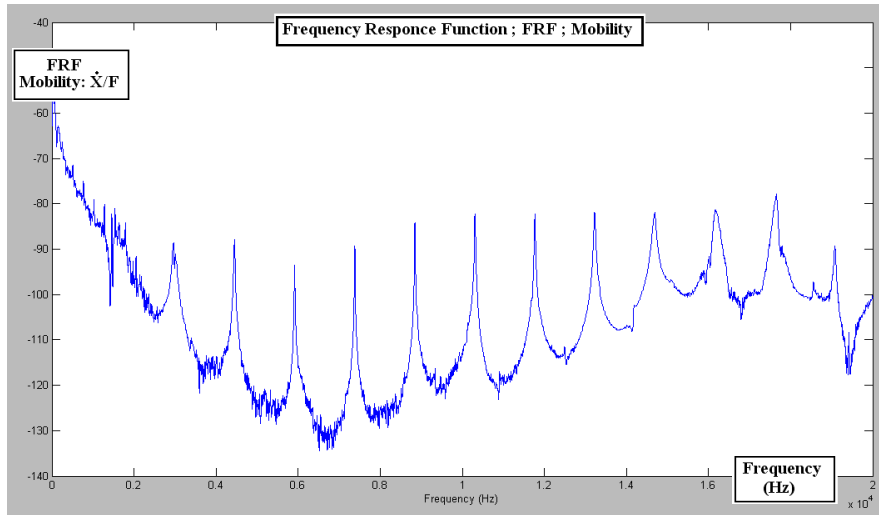
به کمک نرم‌افزار مطلب (MATLAB7)، روابط (۱۷) و (۱۸) استخراج گردید که ضابطه‌های مربوط به نسبت میرایی امواج آکوستیک، در دو ماده فولادی و آلومینیومی را نشان می‌دهند.

$$\xi \text{ of Al} = 1,176 \times 10^{-8} \omega^{-2,386} + 0,008152, \quad (17)$$

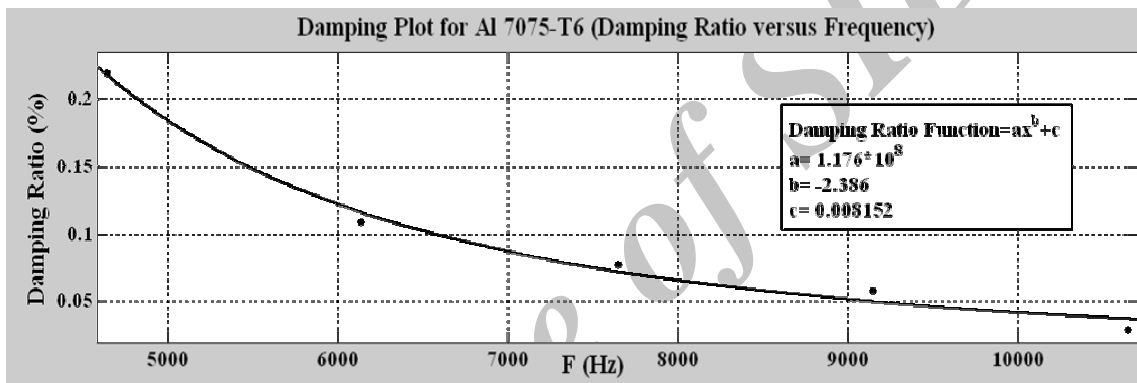
$$\xi \text{ of St} = 3,067 \times 10^{-8} \omega^{-2,585} + 0,01478. \quad (18)$$

نمونه به صورت کاملاً مستقیم، با حداقل تغییر شکل به واسطه نیروی وزن و به‌طور کاملاً موازی و تراز شده نسبت به سطح زمین قرار گیرد. مشخصات دیگر تجهیزات مورد استفاده در آزمون در جدول ۲ آورده شده است. شایان ذکر است که تجهیزات مذکور در آزمون هر دو نمونه، یکسان و به‌صورت کاملاً مشابه مورد استفاده قرار گرفت.

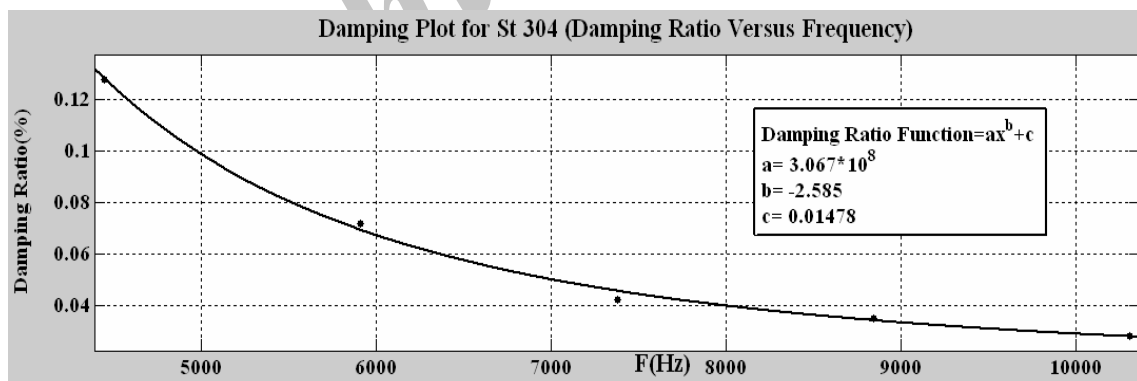
مکانیزم تحریک یا ورود امواج آکوستیک توسط لرزاننده-ای که مشخصات آن در جدول ۲ آورده شده است انجام شد. ثبت مشخصات موج در ابتدا و انتهای نمونه (ورودی و خروجی امواج) توسط دو حسگر شتاب سنج یکسان انجام شد که با ارسال این اطلاعات به تحلیلگر و تحلیل آنها، مشخصات ذاتی نمونه‌های تحت آزمون استخراج و ارائه می‌گردد. وزن حسگرهای مذکور بسیار کم بوده و میزان دخالت آنها در نتایج آزمون بسیار ناچیز است [۱۵]. نمودار تابع پاسخ فرکانسی نمونه آلومینیومی Al 7075-T6 به صورت شکل ۵ است. این نمودار، نمودار موبیلیتی بر حسب فرکانس است. قله‌های موجود در این نمودار، محل وقوع رزونانس یا



شکل ۶. نمودار تابع پاسخ فرکانسی لگاریتمی نمونه ۱۷۰۰ میلیمتری فولادی St 304 به قطر ۴۰ میلیمتر.



شکل ۷. نمودار میرایی بر حسب فرکانس نمونه آلومینیومی Al 7075-T6.



شکل ۸. نمودار میرایی بر حسب فرکانس نمونه فولادی St 304.

۲. با در نظر گرفتن مدل میرایی ویسکوز معادل در معادلات دیفرانسیل حاکم و با اعمال شرایط مرزی مطلوب، معادله جابه جایی انتشار امواج آکوستیک با در نظر گرفتن استهلاک فلزی تعیین شد.

۱. بر اساس اصول و روابط ریاضی حاکم در ارتعاشات سیستم های ممتد، معادلات دیفرانسیلی ارتعاشات طولی استوانه، با در نظر گرفتن میرایی استخراج گردید.

برای آلومینیوم Al 7075-T6، ضریب میرایی از ۰/۲۳ درصد در ۵ kHz به ۰/۰۲ درصد در ۱۰kHz کاهش می‌یابد.

۶. با توجه به روابط تحلیلی، فرکانس رزونانس استهلاکی از رابطه  $\Omega'_n = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  قابل محاسبه می‌باشد. از طرفی با توجه به وجود فرکانس رزونانس حاصل از آزمون، می‌توان درصد اختلاف بین فرکانس حاصل از روابط تحلیلی با فرکانس حاصل از آزمون مقایسه کرد. برای نمونه حداکثر اختلاف فرکانس حاصل از روابط تحلیلی با فرکانس رزونانس حاصل از آزمون تجربی، برای نمونه فولادی ۰/۰۳۴ یا ۰/۳۴ درصد است.

۳. با افزایش فرکانس میزان میرایی کاهش می‌یابد. با توجه به اطلاعات کسب شده، تابع میرایی برای دو جنس فولادی St 304 و آلومینیومی Al 7075-T6 حاصل شد. لازم به ذکر است که این تابع تحت برنامه نویسی با نرم افزار مطلب حاصل شده و منحنی گذرنده از نقاط تجربی حاصل شده، بهترین تابع گذرنده از نقاط مذکور است.

۴. مقدار میرایی در هر فرکانس و به میزان تقریباً سه برابر، در نمونه آلومینیومی بیشتر از نمونه فولادی است.

۵. در فولاد St 304، ضریب میرایی از ۰/۱۳ درصد در ۵ kHz به ۰/۰۳ درصد در ۱۰kHz کاهش یافته است. همچنین

14. (2009)

9. S Adhikari., "Damping models for structural vibration", Ph. D. dissertation, University of Cambridge (2000).
10. S Braun, D Ewins and S S Rao, "Encyclopedia of Vibration", Academic Press (2002).
11. P Avitabile., "Experimental Modal Analysis: A Simple Non-Mathematical Presentation", University of Massachusetts Lowell, Lowell, Massachusetts.
12. Z Wu, C. Xu, J Zhang, D Yu, P Feng, "Modal and Harmonic Reponse Analysis and Evaluation of Machine Tools", *International Conference on Digital Manufacturing & Automation* (2010) 929.
13. D J Ewins, "Modal Testing: Theory, Practice and Application", RSP LTD (2000).
14. <http://www.bksv.com>
15. [http://www.djb-instruments.com/DJB\\_UK/default.html](http://www.djb-instruments.com/DJB_UK/default.html).

1. L E Kinsler & A R Frey, "Fundamentals of Acoustics", John Wiley & Sons, Inc, 2nd edition, New York, (1962).
2. K F Graff, "Wave Motion in Elastic Solids", Dover Publication, INC, New York (1975).
3. B J Lazan, "Damping of Materials and Members in Structural Mechanics", Oxford, Pergamon Press, (1968).
4. L Meirovitch, "Principles and Techniques of Vibrations", Prentice-Hall Inc (1997).
5. A D Nashif., D I G Jones and J P Henderson, "Vibration Damping", Wiley (1985).
6. A Srikantha Phani and J Woodhouse, *Journal of Sound & Vibration*, **243** (2001) 63.
7. A Srikantha Phani and J Woodhouse, *Journal of Sound & Vibration*, **303** (2007) 475.
8. R M Lin, *J Journal of Sound & Vibration*. **325** (1-2)