مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۱، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۰

افت و خيزهاي برداري حول جواب وسون

مريم نادي و فرهنگ لران

دانشكدة فيزيك، دانشگاه صنعتي اصفهان، ۸۳۱۱۱-۸٤۱۵٦، اصفهان

پست الكترونيكي: loran@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۱/۱۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۰/۴/۵)

چكيده

در مدل كانونيك وسون جهان يك فضا زمان تهي پنج بعدي است. اين مدل به حلي از معادلات نسبيت عام مربوط مي‌شود كه از نگاه چهار بعدي، هم‌ارز جهاني با ثابت كيهان‌شناختي مثبت است. در اين مدل، بعد پنجم يك بعد گسترده و عمود بر فضا زمان چهار بعدي است و آنچه در چهار بعد به عنوان جرم سكون ذرات اندازه‌گيري مي‌شود به مختصة پنجم آنها بستگي دارد در حالي كه همة ذرات در فضا زمان پنج بعدي نورگونه هستند. در اين مقاله، با مطالعة افت و خيزهاي برداري حول جواب‌هاي وسون، با ايده‌اي شبيه ايدة كالوتسا-كلاين، نشان مي‌دهيم كه افت و خيزها ميدان‌هاي تكيوني هستند يعني حل وسون يك پاسخ ناپايدار از معادلات اينشتين است. جرم تكيون‌ها متناسب با جذر ثابت كيهان‌شناختي به دست مي‌آيد كه با حد بالاي آزمايشگاهي براي جرم سكون فوتون هم‌خواني دارد. همچنين نيروي لورنتس چهار بعدي از معادلة ژئودزيك پنج بعدي به دست مي‌آيد. معلوم مي‌شود كه در اين مدل همة ذرات جرم‌دار داراي بار الكتريكي هستند و نسبت بار به جرم براي همة آنها تابعي از عمر عالم است كه به طور نمايي به يك ميل مي‌كند.

واژه‌هاي كليدي: مدل كانونيك وسون، فضا زمان پنج بعدي، ثابت كيهان‌شناختي، تكيون

۱. مقدمه

نظریهٔ کالوتسا-کلاین[۱] [۱] از نخستین نظریه‌هایی است که برای وحدت بخشیدن به نیروهای الکترومغناطیسی از یک سو و گرانش از سوی دیگر ارائه شده است. در سال ۱۹۲۱ کالوتسا نسبیت عام اینشتین را به پنج بعد گسترش داد. او نشان داد که از معادلات گرانش پنج بعدی، سه دسته معادله به دست می‌آید؛ دستهٔ اول هم‌ارز با معادلات میدان اینشتین چهاربعدی و دستهٔ دوم هم‌ارز با معادلات ماکسول در الکترومغناطیس چهار بعدی است و معادلهٔ سوم یک میدان اسکالر را توصیف می‌کند [۱]. در تعمیم کلاین از مدل کالوتسا که به مدل کالوتسا-کلاین معروف است فرض می‌شود که بعد پنجم به صورت حلقه‌ای با شعاع بسیار کوچک R در آمده است. در مکانیک موجی تکانهٔ ذره در راستای این حلقه از رابطهٔ $p_n = \frac{nh}{2\pi R}$ به دست می‌آید که در آن h ثابت پلانک و n مقادیر صحیح را اختیار می‌کند. به این ترتیب ناظر چهاربعدی که از بعد پنجم بی‌خبر است ذره‌ای به جرم سکون m_0 و تکانهٔ p_n را به صورت ذره‌ای به جرم $m_n = \sqrt{m_0^2 + \frac{p_n^2}{c^2}}$ مشاهده می‌کند که c سرعت نور است. این عبارت به برج کالوتسا-کلاین شهرت دارد به این معنا که نظیر هر ذره‌ای به جرم سکون m_0 در پنج بعد، دنبالهٔ نامتناهی از ذرات با جرم‌های مختلف در جهان چهاربعدی

۱. Kaluza-Klein

پدیدار می‌شود که مشابه آن در طبیعت ما مشاهده نشده است. برای رفع این مشکل می‌شود فرض کرد که شعاع حلقه از مرتبهٔ طول پلانک یعنی 10^{-32} cm باشد، به این ترتیب انرژی اولین حالت برانگیختگی از مرتبهٔ انرژی پلانک خواهد شد. با این فرض، نظریه با مشاهدات تجربی کاملاً سازگاری دارد. مدل کالوتسا-کلاین توضیحی برای ثابت کیهان‌شناختی و منشاء جرم سکون ذرات به دست نمی‌دهد.

در ادامهٔ این مقاله، در بخش دوم مدل کانونیک وسون را مرور می‌کنیم. در بخش سوم افت و خیزهای برداری حول پاسخ وسون را مطالعه کرده و در بخش چهارم حل معادلهٔ ژئودزیک تا مرتبهٔ اول از افت و خیزها را ارائه می‌دهیم. نتایج این مقاله در بخش پنجم گردآوری شده است.

۲. مدل کانونیك وسون[1]

در مدل کانونیک وسون [۲]، جهان به صورت یک فضا- زمان تهی پنج بعدی در نظر گرفته می‌شود که ناظران آن را به شکل جهان چهار بعدی درک می‌کنند. در این مدل محور پنجم باز است و عمود بر فضا زمان چهار بعدی می‌باشد. همچنین قالب زیر برای متریک فرض می‌شود:

$$^{(5)}dS^2 = \frac{l^2}{L^2}\,{}^{(4)}ds^2 - dl^2, \tag{1}$$

که در آن l مختصهٔ نظیر بعد پنجم است و L یک پارامتر ثابت است که مقدار آن با ملاحظات تجربی تعیین می‌شود. ${}^{(4)}ds^2$ المان طولی چهار بعدی است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$^{(4)}ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}(x^\gamma, l)\,dx^\alpha dx^\beta. \tag{2}$$

متریک چهار بعدی رابطهٔ فوق به صورت ضرب یک ضریب همدیس در متریک مینکوفسکی در نظر گرفته می‌شود:

$$^{(4)}g_{\alpha\beta}(x^\gamma, l) = h(x^\gamma, l)\,\eta_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

درعبارت بالا، $h(x^\gamma, l)$، ضریب همدیس است و علامت متریک مینکوفسکی (-,-,-,+) در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه المان طولی پنج بعدی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

1. Wesson

$$^{(5)}dS^2 = \frac{l^2}{L^2}\left[h(x^\gamma, l)\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta\right] - dl^2. \tag{4}$$

از حل معادلات میدان اینشتین

$$^{(5)}R_{AB} = 0 \qquad (A, B = 1...5), \tag{5}$$

برای چنین متریکی معلوم می‌شود که [۲]:

$$h(x^\gamma, l) = \left(\frac{l - l_0}{l}\right)^2 k\left(x^\gamma\right) \tag{6}$$

که $k(x^\gamma)$ از معادلات میدان اینشتین تعیین نمی‌شود. چون

$$^{(5)}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{3}{L^2}\frac{l^2}{(l - l_0)^2}\,{}^{(4)}g_{\mu\nu}. \tag{7}$$

از معادلهٔ (۵)، معلوم می‌شود که:

$$^{(4)}R_{\mu\nu} = \frac{3}{L^2}\frac{l^2}{(l - l_0)^2}\,{}^{(4)}g_{\mu\nu}. \tag{8}$$

با مقایسه با معادلات میدان اینشتین در چهار بعد، داریم:

$$^{(4)}R_{\mu\nu} = \Lambda\,{}^{(4)}g_{\mu\nu}, \tag{9}$$

نتیجه می‌گیریم که ثابت کیهان‌شناختی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Lambda = \frac{3}{L^2}\left(\frac{l}{l - l_0}\right)^2. \tag{10}$$

در مدل کانونیک فرض بر آن است که جرم سکون همهٔ ذرات صفر است، پس،

$$^{(5)}dS^2 = \left[\frac{l^2}{L^2} - \left(\frac{dl}{ds}\right)^2\right]{}^{(4)}ds^2 = 0. \tag{11}$$

از حل معادلهٔ (۱۱) معلوم می‌شود که [۲]

$$l = l_0 e^{\pm\frac{s}{L}}, \tag{12}$$

که در آن s زمان ویژهٔ عالم است که امروزه حدود ۱۳ میلیارد سال تخمین زده می‌شود. پس، «ثابت کیهان‌شناختی» که با کمک الگوی (۴) محاسبه می‌شود، ثابت نیست و با زمان تغییر می‌کند [۲]

$$\Lambda^{\pm}(s) = \frac{3}{L^2}\frac{1}{\left(1 - e^{\mp s/L}\right)^2}, \tag{13}$$

در $s = 0$ (لحظهٔ انفجار بزرگ)، $\Lambda^{\pm} \to \infty$ میل می‌کند[2]. در

۲. این واگرایی نتیجهٔ آن است که وسون ثابت انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۱۲) را مساوی مقدار ثابت l_0 که در تابع $h(l)$ آمده می‌گیرد. چنان‌که ثابت انتگرال‌گیری را عدد دیگری بگیریم این واگرایی برطرف می‌شود.

$s \to \infty$، $\Lambda^{+} = \frac{3}{L^2}$ و $\Lambda^{-} = 0$ بـه دسـت مـی‌آیـد. داده‌هـای رصدی با انتخاب Λ^{+} برای ثابت کیهان‌شناختی توافـق دارنـد. بر اساس این داده‌ها مقدار $L \approx 10^{28}\mathrm{cm}$ به دست می‌آید. جالب آن است که انتخاب جـواب Λ^{+} بـا مـشاهدهٔ عمـومی‌تـری در فیزیک هـم توافـق دارد و آن موضـوعی اسـت کـه در زیـر بـه توضیح آن می‌پردازیم.

نیروی پنجم که از معادلهٔ ژئودزیک نتیجه می‌شود به شـکل زیر است [۲]:

$$f^{\pm\mu} = \mp \frac{1}{L} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{1}{(e^{\pm s/L} - 1)}, \tag{14}$$

در حد $s \to 0$

$$f^{\pm\mu} \to (-1/s)(dx^{\mu}/ds),$$

و برای $s \to \infty$ خواهیم داشت:

$$f^{+\mu} \to 0$$

و

$$f^{-\mu} \to (-1/L)(dx^{\mu}/ds),$$

از آن‌جایی که امـروزه نیـروی پنجمـی در جهـان چهـار بعـدی مشاهده نشده است باید $f^{+\mu}$ را انتخاب کنـیم. علـی الاصـول چنـین مـشاهده‌ای مـا را ناچـار از برگزیـدن Λ^{+} بـرای ثابـت کیهان‌شناختی می‌کند که با مشاهدهٔ تجربی در توافق است.

۳. رهیافت وسون در حضور افت و خیزها

در این بخش با ایده‌ای شبیه بـه ایـدهٔ کالوتـسا-کلایـن، افـت و خیزهای برداری حول جواب وسون را مطالعه می‌کنیم برای این کار متریک زیر را در نظر می‌گیریم:

$$^{(5)}dS^2 = \frac{l^2}{L^2}[h(l)\,\eta_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}] - \left(dl^2 + A_{\mu}dx^{\mu}\right)^2, \tag{15}$$

که در آن،

$$A_{\mu} = A_{\mu}(t,x,y,z,l). \tag{16}$$

در بخش دوم دیدیم که:

$$h(l) = \left(\frac{l - l_0}{l}\right)^2.$$

با توجه به رهیافت کالوتسا-کلین، افت و خیزهای اضـافه شـده به متریک پنج بعـدی، مـصداق میـدان‌هـای بـرداری در فـضای برداری هستند. دینامیک این افت‌وخیزهـا در فـضای تهـی پـنج بعدی با معادلهٔ زیر داده می‌شود:

$$^{(5)}R_{\mu 5} = l^2 h^2 L^2 (\partial^{\nu} F_{\nu\mu} + m^2 A_{\mu}) = 0, \tag{17}$$

که در آن

$$F_{\nu\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu},$$

و

$$m^2 = -\frac{6}{L^2} \frac{l^2}{(l - l_0)^2} = -2\Lambda. \tag{18}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود که میدان‌های بـرداری میـدان‌هـای تکیونی هستند. ایـن نتیجـه چنـدان هـم دور از انتظـار نیـست. هرچند که فضای تهی پنج بعدی، یک فضای پایدار است اما بـه طور طبیعی انتظار داریم که جواب‌هایی که نظیر دنیـاهـایـی بـا ثابت کیهان‌شناختی مثبت هستند، ناپایدار و یا فراپایدار[1] باشـند. آنچه در اینجا می‌بینیم آن اسـت کـه حـل وسـون، یـک پاسـخ ناپایدار است چرا که افت‌وخیزها حول این پاسخ، میـدان‌هـای تکیونی هستند.

نکتهٔ دیگر آن است که $m^2 \neq 0$ به معنی انحراف از قانون عکس مجذوری در قانون کولن اسـت کـه مـی‌شـود آن را بـا حـدود تجربی آن سنجید. در اینجا "جرم" فوتـون از مرتبـهٔ 10^{-30} eV به دست می‌آید که این مقـدار از حـد بـالای جـرم فوتـون کـه 10^{-18} eV است [۳] بسیار کوچکتر است. به این معنا این نتیجه قابل‌قبول است.

۴. معادلات ژئودزیک و نیروی لورنتس

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، المان طولی چهـار بعـدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$^{(4)}ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta} = h(l)\,\eta_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta},$$

چاربردار سرعت را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}. \tag{19}$$

با توجه به المان طولی چهار بعدی و چاربردار سرعت، ضـریب بهنجارش به صورت زیر به دست می‌آید:

۱. Meta-stable

$$u^{\alpha}u_{\alpha}=1, \tag{۲۰}$$

که در آن متریک چهار بعدی عبارت است از:

$$^{(4)}g_{\alpha\beta}=h\eta_{\alpha\beta}.$$

معادلات ژئودزیک برای x^{μ} از این قرار است:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l^{2}h}\frac{d}{d\tau}(l^{2}h\frac{dx^{\mu}}{d\tau})+\frac{L^{2}}{l^{2}h}\frac{dl}{d\tau}(hF_{\nu}{}^{\mu})\\&+\frac{L^{2}}{l^{2}h}(\frac{dl}{ds})^{2}\partial_{5}(hA^{\mu})-\frac{1}{2}[2lh+l^{2}\dot{h}]\frac{1}{h}(hA^{\mu})=0,\end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن τ پارامتر آفین است. توجه می‌کنیم که در معادلهٔ (۲۱) اندیس‌ها با متریک $h\eta_{\alpha\beta}$ بالا و پایین می‌شوند.

می‌شود دید که اگر بستگی A^{μ} به مختصهٔ l از صفر قرار دادن مجموع جملات سوم و چهارم تعیین شود، آن‌گاه معادلات بالا شبیه به معادلات لورنتس خواهند شد. چنین قیدی به این معنا است که:

$$\partial_{5}(hA^{\mu})-\frac{1}{2}\frac{1}{l^{2}h}[2lh+l^{2}\dot{h}](hA^{\mu})=0 \tag{۲۲}$$

یعنی

$$A^{\mu}(t,x,y,z;l)=\frac{l}{L\sqrt{h}}a^{\mu}(t,x,y,z). \tag{۲۳}$$

این نتیجه از ملاحظات تانسوری هم قابل انتظار بود. همان‌طور که در معادلهٔ (۱۵) می‌بینیم قسمت چهاربعدی متریک فضای پنج بعدی که یک تانسور رتبه دوی هموردا است با ضریب $\frac{l^{2}}{L^{2}}h$ به متریک مینکوفسکی مربوط می‌شود. پس انتظار داریم میدان‌های برداری A^{μ} که تانسورهای رتبه یک هستند با ضریب $\frac{l}{L\sqrt{h}}$ به تانسور رتبه یک a^{μ} مربوط شوند.

توجه می‌کنیم که معادلهٔ (۲۱) تا مرتبهٔ اول میدان‌های برداری نوشته شده است و در آن از جملات مرتبهٔ بالاتر از A_{μ} ها چشم‌پوشی شده است. تا این مرتبه می‌شود این معادله را ساده‌تر هم نوشت. به این ترتیب که ابتدا با بازنویسی همین معادله تا مرتبهٔ صفرم از A_{μ} ها (نظیر حرکت ذره در غیاب میدان الکترومغناطیسی)، معادلهٔ ژئودزیک فوق را حل می‌کنیم

$$\frac{d}{d\tau}(l^{2}h\frac{dx^{\mu}}{d\tau})=0, \tag{۲۴}$$

و در نتیجه:

$$l^{2}h\frac{ds}{d\tau}u^{\mu}=c^{\mu}, \tag{۲۵}$$

از این عبارت معلوم می‌شود که

$$l^{2}h\frac{ds}{d\tau}u^{\mu}u_{\mu}=c^{\mu}(g_{\nu\mu}c^{\nu}), \tag{۲۶}$$

با استفاده از بهنجارش(۲۰) نتیجه می‌گیریم که

$$l^{4}h(\frac{ds}{d\tau})^{2}=c^{2},$$

که در آن

$$c^{2}=\eta_{\alpha\beta}c^{\alpha}c^{\beta}. \tag{۲۷}$$

با توجه به عبارت (۱۱)،

$$(\frac{dl}{d\tau})^{2}=\frac{l^{2}}{L^{2}}(\frac{ds}{d\tau})^{2}, \tag{۲۸}$$

و در نتیجه معادلهٔ ژئودزیک (۲۱) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{hc^{2}}u^{\mu})+\sqrt{c^{2}}f_{\nu}{}^{\mu}u^{\nu}=0, \tag{۲۹}$$

این معادله دقیقا معادلهٔ نیروی لورنتس است که در آن نسبت بار الکتریکی به جرم ذره با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$\frac{e}{m}=\pm\frac{1}{\sqrt{h}}. \tag{۳۰}$$

از آنجا که معادلهٔ ژئودزیک را تا مرتبهٔ اول از فوتون‌ها حل کرده‌ایم، مجاز هستیم عبارت (۱۲) برای l را، در عبارت (۳۰) جایگزین کنیم[1]

$$\frac{e^{\pm}}{m}=\pm\frac{1}{(1-e^{-\frac{s}{L}})}, \tag{۳۱}$$

در نتیجه در حد $s\rightarrow\infty$ اندازهٔ نسبت بار به جرم به یک میل می‌کند[2]. به این ترتیب در این مدل ذرات جرم‌دار حتماً باردار هستند و ذرهٔ جرم‌دار بدون بار وجود ندارد.

هرچند این پاسخ‌ها در حد $s\rightarrow 0$ واگرا هستند اما باید توجه

۱. در الکترومغناطیس ماکسولی بعد میدان‌های برداری از نظر تحلیل ابعادی، عکس طول می‌باشد و در نتیجه بار الکتریکی بدون بعد است. در الگویی که ما انتخاب کردیم، با توجه به اینکه میدان‌های برداری در راستای بعد پنجم به متریک کانونیک اضافه می‌شوند، بعد ندارند و در نتیجه بار الکتریکی دارای بعد عکس طول می‌شود.

۲. البته مقدار این نسبت به انتخاب ثابت انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۲۵) بستگی دارد. آنچه که مهم است آن است که در این مدل این نسبت برای همهٔ ذرات یکسان به دست می‌آید.

داشت که اصولاً انتظار نداریم بشود دامنهٔ درستی یک مدل کلاسیک را تا لحظهٔ انفجار بزرگ گسترش داد ضمن آنکه معادلهٔ (۲۱) یک حل اختلالی است که تا مرتبهٔ اول از افت و خیزها به دست آمده است و دامنهٔ درستی چنین تقریبی هم به زمان‌های طولانی پس از انفجار بزرگ محدود می‌شود. بنابراین در این مدل نسبت بار به جرم در ابتدای تشکیل عالم، واگرا به دست می‌آید.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله رهیافت وسون به کیهان‌شناسی چهار بعدی را مرور کردیم. در این مدل از حل معادلات میدان برای متریک کانونیک در فضای تهی پنج بعدی، ثابت کیهان‌شناختی در فضای چهار بعدی محاسبه می‌شود. پیش‌بینی مدل آن است که ثابت کیهان‌شناختی صفر یا یک مقدار مثبت خواهد بود. اینکه کدام جواب را باید برگزینیم به این برمی‌گردد که آیا در جهان ما نیروی پنجم که از بعد پنجم می‌آید مشاهده می‌شود یا نه. چون چنین نیرویی دیده نشده است این مدل می‌گوید که مقدار ثابت کیهان شناختی ناصفر و مثبت است که با مشاهدات تجربی مستقل می‌خواند.

در تعمیم مدل کانونیک با بهره‌گیری از ایدهٔ کالوتسا-کلاین، افت‌وخیزهای برداری حول این جواب را مطالعه کردیم. خلاصهٔ نتایجی که به دست آوردیم به شرح زیر است:

۱. این افت‌وخیزها نظیر میدان‌های برداری تکیونی هستند که جرم آنها از طریق رابطهٔ $m^{۲} = -۲\Lambda$ به ثابت کیهان‌شناختی بستگی پیدا می‌کند.

۲. در این الگو، میدان‌های برداری را وابسته به هر پنج مختصهٔ فضا زمان در نظر گرفتیم. دیدیم که بستگی این میدان‌ها به مختصهٔ پنجم را می‌شود به گونه‌ای تعیین کرد که معادلات ژئودزیک شبیه معادلهٔ نیروی لورنتس شود.

۳. پیش‌گویی مدل آن است که در فضای چهار بعدی هر ذرهٔ جرم‌دار دارای بار الکتریکی است. اما از آنجا که این مدل نسبت بار به جرم را مقداری ثابت و برابر واحد می‌دهد، نمی‌شود این ذرات را هم‌ارز ذرات متعارفی مانند الکترون و پروتون دانست.

مراجع

1. Paul S Wesson; "*Space-Time-Matter, modern* Kaluza-Klein theory", World Scientific (1999).
2. Paul S Wesson, "*Five Dimensional Physics*", World Scientific (2006).
3. N Nakamura et al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys*. **37** (2010) 075021.