

n.mortazavi@ph.iut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۲/۳۰؛ پذیرش: ۱۳۹۰/۴/۱۱)

g

(g)

آزمودن نظریه CPT با لپتون‌ها را پایه‌گذاری می‌کند. در همین حال، بهترین آزمون برای نظریه الکتروپنامک کوانتومی است. به علاوه، اختلاف ناچیز میان مقدار اندازه‌گیری شده g و مقدار محاسبه شده آن، محلی برای جستجوی فیزیک جدید است [۱]. از نظر تئوری، معادله دیراک برای فرمیون آزاد، g را برابر ۲ به دست می‌دهد. در سال ۱۹۴۸، برای نخستین بار در آزمایشگاه، کوش و فولی^۲، انحراف g از ۲ را مشاهده نمودند و آن را ناهنجاری گشتاور مغناطیسی لپتون‌ها نامیدند و به صورت $a \equiv \frac{g-2}{2}$ تعریف کردند [۲].

در همان سال، شوئینگر پایین‌ترین مرتبه از تصحیح‌های کوانتومی به a را برابر $\frac{\alpha}{2\pi}$ محاسبه نمود [۳]. در سال‌های اخیر این محاسبه‌ها تا مرتبه‌های بالاتر انجام گرفته است.

هنگامی که لپتون بارداری در یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی قرار می‌گیرد، از طریق بار الکتریکی و تکانه زاویه‌ای اش با آن میدان برهم‌کنش می‌کند. رابطه میان گشتاور مغناطیسی و تکانه زاویه‌ای، به شکل زیر است:

$$\vec{\mu} = -g \frac{q}{2m} \vec{s}, \quad (1)$$

که در آن $\vec{\mu}$ ، گشتاور مغناطیسی لپتون، q ، m و s به ترتیب بار الکتریکی، جرم و اسپین لپتون هستند و g ضریب بدون بعد لاندۀ نام دارد.

اندازه‌گیری‌های جدید g و نظریه الکتروپنامکی کوانتومی، ثابت ساختار ریز را با عدم قطعیتی ۲۰ مرتبه کوچکتر از هر شیوه مستقل دیگری، تعیین می‌کند. g دقیق، مرحله‌ای برای

۲. Kusch and Foley

۱. Lande

در این جا، در بازبهنجارش توابع از شیوه متفاوتی نسبت به مقاله مذکور استفاده نموده‌ایم، از این رو گشتاور مغناطیسی به دست آمده متفاوت است. همچنین در محاسبات، تمامی جمله‌ها را تا مرتبه اول ناجابه‌جایی بسط داده‌ایم زیرا در مقاله مذکور، برخی جمله‌ها در نظر گرفته نشده بود. در همین حال، با توجه با داده‌های اخیر نظری و تجربی برای g الکترون و میون، حد جدیدی برای پارامتر ناجابه‌جایی به دست می‌آوریم.

آشنایی ما با فضا- زمان ناجابه‌جایی از لحاظ تاریخی، به برهم کنش کلاسیکی الکترون با میدان مغناطیسی برمی‌گردد [۸]. ایده ناجابه‌جا گرفتن مختصه‌های کانونیکی فضا، اولین بار توسط هایزنبرگ^۲ پیشنهاد شد اما اولین مقاله منتشر شده در این زمینه را در سال ۱۹۴۷ اشنایدر^۳ نوشت [۹]. این ایده برای رفع واگرایی مشاهده شده در نظریه میدان کوانتومی مطرح شد که چون با نظریه بازبهنجارش در همان سال‌ها هم‌زمان بود، عمومیت نیافت. نظریه میدان ناجابه‌جایی پس از مشاهده در نظریه ریسمان، با کار سایبرگ-ویتن^۴ [۱۰] در سال ۱۹۹۹ دوباره مورد توجه قرار گرفت.

این نظریه در واقع اعوجاجی از فضازمان است که مختصه‌های مکان معمولی، عملگرهای هریتی هستند و به فرم زیر با هم جابه‌جا نمی‌شوند:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu},$$

که در این رابطه، θ پارامتر ناجابه‌جایی نامیده می‌شود و تانسور پادمقارن ثابتی با بعد مجذور طول است، یعنی:

$$\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}.$$

برای تابع $f(x)$ با تبدیل فوریه‌ای زیر:

$$\tilde{f}(k) = \int d^D k e^{-ik_i x^i} f(x), \quad (5)$$

تناظر ویل را تعریف می‌کنیم:

به طوری که در سال ۲۰۱۰ آخرین مقدار نظری محاسبه شده برای g الکترون آزاد، به دست آمد [۴].

$$(g_{th} - 2)_e = 0.0115965218279(77).$$

با توجه به اهمیت تعیین مقدار دقیق g ، دستگاه‌های جدید و دقیق‌تری نسبت به گذشته ساخته شد که می‌تواند با دقت بالایی g را اندازه‌گیری کند. دقیق‌ترین مقدار اندازه‌گیری شده تک الکترون سیکلوترونی با استفاده از دستگاه μ penning trap، توسط گروه گابریلز^۱ و همکارانش در دانشگاه هاروارد در سال ۲۰۰۸ انجام گرفت و مقدار زیر به دست آمد [۵]:

$$g_{exp} - 2 = 0.0115965218073(28).$$

علی‌الاصول، لپتون‌های باردار از طریق فوتون در برهم‌کنش‌های مغناطیسی و از طریق بوزون‌های سنگین مانند Z و W در برهم‌کنش‌های ضعیف شرکت می‌کنند [۶]. از این رو هر یک از این برهم‌کنش‌ها در مقدار a سهم دارند و به طور کلی برای سهم‌های مختلف برهم‌کنشی می‌توان نوشت:

$$a = a_{QED}(\alpha) + a_{hadronic} + a_{weak} + a_{new}. \quad (2)$$

سهم QED در $(g-2)_e$ برای مطالعه ناهنجاری گشتاور مغناطیسی سایر لپتون‌های مورد علاقه، بسیار بنیادی است. این رو دانستن این بخش با بیشترین دقت ممکن بسیار مهم است. با توجه به آخرین مقدارهای اندازه‌گیری شده و محاسبه شده فاکتور g الکترون، اختلاف دو مقدار نظری و تجربی g از مرتبه بسیار کوچکی است [۴].

$$(g_{th} - g_{exp})_e \approx (10)^{-12}. \quad (3)$$

در این مقاله، سهم فیزیک جدید ناجابه‌جایی را در g لپتون‌های باردار محاسبه خواهیم نمود.

در بخش نخست، فضازمان ناجابه‌جایی را معرفی کرده و به الکترودینامیک کوانتومی در این نظریه می‌پردازیم. همچنین در بخش دوم، تابع رأس لپتون-فوتون را در مرتبه تک حلقه، در فضازمان ناجابه‌جایی محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که g سهم مستقل از اسپینی در نظریه ناجابه‌جایی دارد.

اگرچه این محاسبه‌ها به صورتی در مرجع [۷] انجام گرفته است، اما به دلایل زیر در این جا تکرار شده‌اند:

۲. Heisenberg

۳. Snyder

۴. Seigberg-Witten

۱. Gabriels

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(x) * A_\mu * U(x)^{-1} + iU(x) * \partial_\mu U(x)^{-1}, \quad (11)$$

$$U(x) = (e^{i\alpha(x)})_*$$

که در بسط تایلور $e^{i\alpha}$ ، هر جمله ضرب معمولی، با ضرب ستاره‌ای جایگزین می‌شود.

جمله جفت شدگی فرمیون-بوزون در $U_*(1)$ ، به شکل $\psi(x) * A_\mu(x)$ یا $A_\mu(x) * \tilde{\psi}(x)$ میدان فرمیونی باید به شکل زیر تبدیل شود تا هر جمله تحت تبدیل پیمانه‌ای، مانند فضای معمولی ناوردا بماند:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x) * \psi(x), \quad (12)$$

$$\tilde{\psi}(x) \rightarrow \tilde{\psi}'(x) = \tilde{\psi}(x) * U(x)^{-1}.$$

به این ترتیب، مشتق هموردای زیر برای دو تابع موج بالا تعریف می‌شود که به ترتیب برای بارهای $+1$ و -1 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) - iA_\mu * \psi(x), \quad (13)$$

$$D_\mu \tilde{\psi}(x) = \partial_\mu \tilde{\psi}(x) + iA_\mu * \tilde{\psi}(x).$$

$\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ در حد، ضرب ستاره‌ای بین میدان‌ها ناپدید می‌شود و دو جمله میدان فرمیونی، دو بار مختلف را نشان می‌دهند [۱۲]. بنابراین، شکل کلی کنش NCQED به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x) * (D - m) * \psi(x) \right]. \quad (14)$$

برای نوشتن تابع رأس لپتون- فوتون در این نظریه، نخست شکل قوانین فاینمن را در این فضا- زمان می‌نویسیم.

با توجه به ویژگی ضرب ستاره‌ای میدان‌ها در زیر انتگرال: $\int d^4x f * g = \int d^4x fg$ ، انتشارگر میدان‌های فرمیونی و فوتونی در این نظریه، به همان شکل QED معمولی نوشته می‌شوند [۷].

$$\begin{array}{l} \text{Photon propagator: } \frac{g^{\mu\nu}}{i(p^\nu + i\varepsilon)} \\ \text{Fermion propagator: } \frac{i}{p - m + i\varepsilon} \end{array}$$

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{f}(k), \quad (6)$$

با برقراری تناظر ویل- مویال^۱، ضرب ستاره‌ای بین میدان‌ها نوشته می‌شود [۷]:

$$\psi(x) * \varphi(x) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}} \psi(x + \xi) \varphi(x + \xi) \Big|_{\xi = \xi = 0}. \quad (7)$$

به عبارت دیگر، نظریه میدان ناجابه جایی از جایگذاری ضرب ستاره‌ای با ضرب معمولی به دست می‌آید. از مهمترین نتیجه‌های این جایگذاری، وجود واگرایی مخلوط UV/IR در مسئله‌ها است که در اینجا نیز با آن مواجه خواهیم شد. به این ترتیب، براکت مویال برای عملگرها چنین نوشته می‌شود:

$$[x_\mu, x_\nu]_{MB} = x_\mu * x_\nu - x_\nu * x_\mu. \quad (8)$$

دو رهیافت شناخته شده برای حل مسائل در فضا- زمان ناجابه جایی وجود دارد. یکی رهیافتی که مبنای آن نگاهت سایبرگ- ویتن [۱۰] است و در مقابل رهیافت غیر بسطی وجود دارد که بر مبنای استفاده از گروه‌های تقارنی بزرگ‌تر $U_*(N)$ و به دنبال آن، شکست خودبه خودی تقارن در حل مسئله نوشته می‌شود [۱۱]. در این مقاله از رهیافت دوم استفاده می‌کنیم.

اگر در کنش الکترودینامیک کوانتومی معمولی، ضرب ستاره‌ای جایگزین ضرب معمولی شود، کنش QED در فضا- زمان ناجابه جایی به دست می‌آید [۷].

$$S_{NCQED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}, \quad (9)$$

که $F_{\mu\nu}$ تانسور شدت میدان به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_*, \quad (10)$$

در این عبارت، جمله آخر جفت شدگی میدان A_μ با خودش را در $U_*(1)$ می‌دهد.

کنش (۹)، تقارن $U_*(1)$ را با تبدیل پیمانه‌ای زیر برآورده می‌کند:

۱. Weyl-Moyal¹

۲. Noncommutative Quantum Electrodynamics²

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda}(p, p', \vec{q}) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i p \cdot \vec{p}'} \left\{ \frac{\gamma^{\sigma}(p' - k + m) \gamma_{\mu}(p - k + m) \gamma_{\sigma}}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m^2)((p - k)^2 - m^2)} \right\} \times e^{-ik \cdot \vec{q}} \quad (17)$$

برای سادگی در محاسبه‌ها، به دلیل وجود فازها، از شیوه شوینگری^۱ استفاده می‌کنیم [۱۴]. به این ترتیب، جمله‌های مخرج به صورت عامل فازی در صورت ظاهر می‌شوند.

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (18)$$

انتگرال (۱۷)، واگرایی فرابیش دارد. شکل واگرایی آن به صورت جمله^۲ توان ۲ نیست زیرا جمله فازی در آن ضرب شده است که شامل تکانه داخلی (k) است. برای رفع این واگرایی، از به سازی پائولی ویلارس^۲ استفاده می‌کنیم. به طوری که کل عبارت تابع رأس را در $e^{-\frac{1}{\Lambda_{eff}^2}}$ ضرب می‌کنیم که در آن:

$$\Lambda_{eff}^2 \equiv \frac{1}{\Lambda^{-2} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{q}}{4}}$$

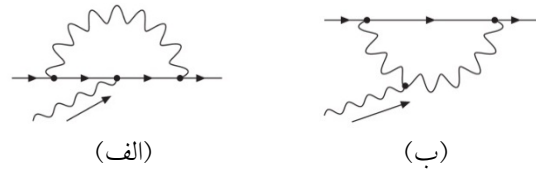
این تعریف قطع^۳ موثر، در توجیه واگرایی مخلوط UV/IR اهمیت بسیاری دارد [۱۳].

با انتگرال‌گیری به کمک جدول انتگرال‌ها (پیوست ب)، شکل زیر برای تابع رأس شکل ۱-الف به دست می‌آید:

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda} = -\frac{\alpha}{\pi} e^{i p \times p'} \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \times e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2) p \cdot \vec{q}} \times \left(\frac{2A_{\mu} K_1(2\sqrt{x})}{\Lambda_{eff}^2 \sqrt{x}} \right) + 2B_{\mu} K_0(2\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \Lambda_{eff}^2 C_{\mu} K_1(2\sqrt{x}), \quad (19)$$

$$x \equiv \frac{\mu^2 \alpha_1^2 + m^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1 \alpha_2 q^2}{\Lambda_{eff}^2} \quad \text{که}$$

K_0 و K_1 توابع بسل تصحیح شده نوع دوم است و در این رابطه داریم:



شکل ۱. تابع‌های رأس تک حلقه در نظریه NCQED.

تابع رأس تراز درختی در فضا-زمان معمولی به شکل زیر است:

$$\Gamma_{\mu} = i e \gamma^{\mu} \quad (15)$$

اما در فضا-زمان ناجابه‌جایی، تابع رأس در فاز $e^{\frac{i}{2} p_i \cdot p_f}$ ضرب می‌شود که p_f و p_i به ترتیب تکانه‌های ورودی و خروجی هستند. ظاهر شدن فازهای وابسته به تکانه‌ها در تابع رأس، نشانگر غیر موضعی بودن این نظریه است [۷].

$$(\Gamma_{\mu})_{nc} = i e \gamma^{\mu} e^{\frac{i}{2} p_i \cdot p_f} \quad (16)$$

می‌توان دید که اگر در تابع رأس تراز درختی، جمله فازی را تا مرتبه اول ناجابه‌جایی بسط دهیم، تصحیح گشتاور دوقطبی الکتریکی به دست می‌آید [۱۳].

با توجه به کنش رابطه (۱۴) می‌توان دید که در کنش NCQED برخلاف QED معمولی، جمله‌های برهم کنشی سه فوتونی و چهار فوتونی نیز وجود خواهند داشت. به همین علت، برای مثال تابع رأس الکترون-فوتون ناجابه‌جایی، دیگرام سه فوتونی (شکل ۱-الف) را نسبت به تابع رأس الکترون-فوتون معمولی (شکل ۱-ب) بیشتر دارد.

محاسبه تابع رأس شکل ۱-الف، مشابه محاسبه تابع رأس QED معمولی است. با این تفاوت که در این جا، به جای عبارت داده شده در (۱۵) برای هر رأس، از رأس ناجابه‌جایی داده شده در (۱۶) استفاده می‌کنیم. به این ترتیب تابع رأس شکل ۱-الف به صورت زیر نوشته می‌شود:

۱. Schwinger Scheme

۲. Pauli-Villars

۳. cut-of

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma} &= -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\gamma} p \times p'} \int_0^1 d\alpha_{\gamma} d\alpha_{\nu} d\alpha_{\tau} \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \times e^{i(\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) p \cdot \tilde{q}} e^{ip' \cdot \tilde{p}} \times \\
 &\exp \left[-\alpha (m^{\nu} \alpha_{\gamma}^{\nu} + m_{\gamma}^{\nu} \alpha_{\nu}^{\nu} - \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu}) - \frac{1}{\alpha \Lambda_{eff}^{\nu}} \right] \times \\
 &\left(A_{\mu}^{\nu} + \frac{B_{\mu}^{\nu}}{\alpha} + \frac{C_{\mu}^{\nu}}{\alpha^{\nu}} \right), \tag{23}
 \end{aligned}$$

که در این رابطه ها :

$$\begin{aligned}
 A'_{\mu} = A_{\mu}^{\nu} &= \frac{1}{\gamma} \gamma_{\mu} \left[(\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})(p' + p)^{\nu} - m^{\nu} \left((\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})^{\nu} + \nu \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{\gamma} \gamma_{\mu} \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu} + \frac{m}{\gamma} \alpha_{\nu} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})(p' + p)_{\mu},
 \end{aligned}$$

$$iB'_{\mu} = \gamma_{\mu} \frac{\nu i}{\gamma},$$

$$\begin{aligned}
 iB_{\mu}^{\nu} &= \gamma_{\mu} \left[\frac{\nu i}{\gamma} + \frac{p \cdot \tilde{q}}{\gamma} (\nu - \alpha_{\nu} - \alpha_{\tau}) \right] + \\
 &\frac{m}{\gamma} (1 + \alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) \tilde{q}_{\mu} - \frac{\gamma \cdot \tilde{q}}{\gamma} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau} + 1)(p' + p)_{\mu},
 \end{aligned}$$

$$C'_{\mu} = \frac{\gamma_{\mu} \tilde{q} \cdot \tilde{q}}{\lambda} + \frac{\tilde{q}_{\mu} \gamma \cdot \tilde{q}}{\nu}.$$

در این جا نیز پس از انتگرال گیری، تابع های رأس بر حسب توابع بسط نوع دوم نوشته می شوند. بنابراین تابع های رأس به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma} &= -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\gamma} p \times p'} \int_0^1 d\alpha_{\gamma} d\alpha_{\nu} d\alpha_{\tau} \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \times \\
 &\left(\frac{\nu A'_{\mu} K_{\nu}(\nu \sqrt{z})}{\Lambda_{eff}^{\nu} \sqrt{z}} + \nu B'_{\mu} K_{\nu}(\nu \sqrt{z}) \right), \tag{24} \\
 z &\equiv \frac{m^{\nu} \alpha_{\gamma}^{\nu} + \mu^{\nu} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) - \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu}}{\Lambda^{\nu}}. \quad \text{که در آن:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma} &= -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\gamma} p \times p'} \int_0^1 d\alpha_{\gamma} d\alpha_{\nu} d\alpha_{\tau} \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \\
 &\times e^{i(\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) p \cdot \tilde{q}} e^{ip' \cdot \tilde{p}} \times \left(\frac{\nu A_{\mu}^{\nu} K_{\nu}(\nu \sqrt{z'})}{\Lambda_{eff}^{\nu} \sqrt{z'}} \right) \tag{25} \\
 &+ \nu B_{\mu}^{\nu} K_{\nu}(\nu \sqrt{z'}) + \nu \sqrt{x} \Lambda_{eff}^{\nu} C_{\mu}^{\nu} K_{\nu}(\nu \sqrt{z'}),
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$z' \equiv \frac{m^{\nu} \alpha_{\gamma}^{\nu} + \mu^{\nu} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) - \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu}}{\Lambda_{eff}^{\nu}}.$$

تاکنون نتایج به دست آمده، (رابطه های ۱۹ و ۲۴) در توافق با نتایج مقاله [۷] است.

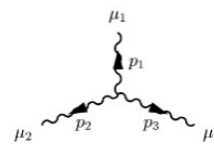
$$\begin{aligned}
 A_{\mu} &= \gamma_{\mu} \left[p' \cdot p - \frac{(\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})(p' + p)^{\nu}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} m^{\nu} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})^{\nu} \right] \\
 &- \frac{\gamma_{\mu}}{\gamma} \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu} + \frac{m}{\gamma} \alpha_{\nu} (\alpha_{\nu} + \alpha_{\tau})(p' + p)_{\mu},
 \end{aligned}$$

$$iB_{\mu} = \gamma_{\mu} \left[\frac{-i}{\gamma} + \frac{p \cdot \tilde{q}}{\gamma} (\nu - \alpha_{\nu} - \alpha_{\tau}) \right] +$$

$$\frac{m}{\gamma} (1 + \alpha_{\nu} + \alpha_{\tau}) \tilde{q}_{\mu} + \frac{1}{\gamma} (\alpha_{\nu} + 1)(p' + p)_{\mu} \gamma \cdot \tilde{q}.$$

تابع رأس شکل ۱- ب را نیز با در نظر گرفتن هر رأس به صورت ناجابه جایی، به دست می آوریم.

رأس سه فوتونی در فضا- زمان ناجابه جایی به شکل زیر است [۷].



$$\begin{aligned}
 &= -\nu e \sin \left(\frac{1}{\gamma} ((p' \times p) \right. \\
 &\left. - q \times k) \right) \left[(p' - \nu p + k)^{\nu} g^{\rho\mu} \right. \\
 &\left. + (p - \nu k + p')^{\rho} g^{\mu\nu} + (k - \nu p' + p)^{\mu} g^{\rho\nu} \right].
 \end{aligned}$$

به این ترتیب تابع رأس شکل ۱- ب به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu}^{\nu}(p, p', \tilde{q}) &= -ie^{\nu} e^{\frac{i}{\gamma} p \cdot \tilde{p}'} \\
 &\times \int \frac{d^{\nu} k}{(2\pi)^{\nu}} \left[\frac{(1 - e^{ik \cdot \tilde{q}} e^{ip' \cdot \tilde{p}})}{(k^{\nu} - m^{\nu})(p' - k)^{\nu} - \mu^{\nu})(p - k)^{\nu} - \mu^{\nu}} \right] \\
 &\times (\lambda m k_{\mu} - \nu k^{\nu} (p + p' + \nu k)_{\mu} + \nu \gamma_{\mu} (\nu p \cdot k + \nu p' \cdot k - k^{\nu} - \nu m^{\nu})). \tag{21}
 \end{aligned}$$

برای ساده تر شدن محاسبه ها، این تابع رأس را به صورت دو جمله، یکی وابسته به فازها و دیگری مستقل از آن می نویسم.

$$\Gamma_{\mu}^{\nu} = (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma} + (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma}.$$

از ویژگی ماتریس های پائولی و نیز بازمقیاس بندی و ضرب تابع رأس در تابع دلتا، به تابع های رأس زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{\mu}^{\nu})_{\gamma} &= -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\gamma} p \times p'} \int_0^1 d\alpha_{\gamma} d\alpha_{\nu} d\alpha_{\tau} \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \times \\
 &\exp \left[-\alpha (m^{\nu} \alpha_{\gamma}^{\nu} + m_{\gamma}^{\nu} \alpha_{\nu}^{\nu} - \alpha_{\nu} \alpha_{\tau} q^{\nu}) - \frac{1}{\alpha \Lambda^{\nu}} \right] \times \\
 &\left(A'_{\mu} + \frac{B'_{\mu}}{\alpha} \right), \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\hbar} p \times p'} \int d\alpha_{\gamma} d\alpha_{\gamma'} d\alpha_{\gamma''} \delta \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \times \left(\frac{A_{\mu} e^{-i(\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma'}) p \cdot \tilde{q}}}{\alpha_{\gamma} \mu' + (\alpha_{\gamma'} + \alpha_{\gamma''}) m' - \alpha_{\gamma} \alpha_{\gamma'} q' \tilde{q}} + \frac{A'_{\mu} (1 - e^{i(\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma'}) p \cdot \tilde{q}} e^{-ip \times p'})}{m' \alpha_{\gamma} + \mu' (\alpha_{\gamma'} + \alpha_{\gamma''}) - \alpha_{\gamma} \alpha_{\gamma'} q' \tilde{q}} \right) \quad (25)$$

از آنجایی که Γ_{μ} مانند یک بردار تبدیل می‌شود، می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از بردارهای P_{μ} و P'_{μ} و γ_{μ} نوشت، به عبارتی داریم:

$$\Gamma_{\mu} = A \gamma^{\mu} + B (P' + P)_{\mu} + C (P' - P)_{\mu} .$$

می‌توان نشان داد که اتحاد وارد در نظریه ناجابه‌جایی نیز برقرار است [۷].

با توجه به تقارن جایگشت نسبت به $\alpha_{\gamma}, \alpha_{\gamma'}$ در انتگرال، عبارت سوم صفر می‌شود. از تجزیه گردن^۳، به جای $(P' + P)_{\mu}$ در رابطه (۲۴) قرار می‌دهیم:

$$\bar{u}(p') \gamma_{\mu} u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{(p + p')_{\mu}}{2m} + i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^{\nu}}{2m} \right] u(p) .$$

به این ترتیب، با بسط جمله‌های فازی تا مرتبه اول پارامتر ناجابه‌جایی θ ، $F_{\gamma}(\theta)$ به دست می‌آید:

$$F_{\gamma}(\theta) = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\delta}{12} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) p \cdot \tilde{q} , \quad (26)$$

که در آن، $\tilde{q}_{\nu} = q_{\mu} \theta^{\mu\nu}$ است.

از تعریف فاکتور g در الکترودینامیک کوانتومی معمولی، داریم:

$$g = 2 [F_{\gamma}(\theta) + F_{\gamma'}(\theta)] ,$$

که مقدار $F_{\gamma}(\theta)$ از شرط بهنجارش برابر ۱ است. با محاسبه دو

تابع رأس لپتون- فوتون در نظریه ناجابه‌جایی، انتظار داریم که سهم ناهنجاری گشتاور مغناطیسی را به صورت جمله‌ای اضافه بر جمله مدل استاندارد به دست آوریم.

به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$a = a_{SM} + a_{NC} ,$$

$$\delta a = a_{NC} = \frac{\alpha}{2\pi} \delta_{NC} F_{\gamma}(\theta) = \frac{\alpha}{2\pi} (1 + \delta_{NC}) ,$$

$$\delta_{NC} = \frac{\delta}{6} p_{\nu} q_{\nu} \theta_{\mu\nu} = \frac{\delta}{6} \frac{E'}{\Lambda_{NC}^2} \hat{p}_{\nu} \hat{q}_{\nu} \hat{\theta}_{\mu\nu} , \quad (27)$$

$$p_{\nu} = \frac{p_{\nu}}{E} , \hat{q}_{\nu} = \frac{q_{\nu}}{E} , \hat{\theta}_{\mu\nu} = \Lambda_{NC}^2 \theta_{\mu\nu} .$$

در نظریه الکترودینامیک کوانتومی معمولی، واگرایی فرابنفش را با تعریف جمله جبرانی^۱ و واگرایی فروسرخ را با وارد کردن جرم فوتون حذف می‌کنیم [۱۴]. در نظریه NCQED، تابع‌های رأس بر حسب تابع‌های بسل به دست می‌آیند که تابع بسل K_0 از نوع لگاریتمی و اگر می‌شود و تابع K_1 متناهی می‌ماند. در [۱۶] نشان داده شده است که با تعریف جمله جبرانی مشابه نظریه معمولی و با ضرایب متفاوت، نظریه میدان کوانتومی ناجابه‌جایی در تراز تک حلقه، بازهنجارش پذیر است. در این مقاله برای بازهنجارش تابع‌های رأس، از بازهنجارش MMS^2 استفاده می‌کنیم و قسمت‌های واگرا به همراه مقدار ثابت را حذف می‌کنیم [۱۴].

با بسط تابع‌های بسل و اعمال بازهنجارش با حدود زیر، تابع‌های رأس شکل ۲ و ۱ به دست می‌آیند. (محاسبه‌های کامل‌تر در پیوست ب آورده شده است). در تابع رأس رابطه‌های (۱۹ و ۲۴ و ۲۵)، تابع K_0 در حد $x, z, z' \rightarrow 0$ مقدار $-\ln(0) - 2\gamma_E$ می‌شود.

حال، دو وضعیت حدی زیر را بررسی می‌کنیم:

الف- حد $\frac{1}{\Lambda^2} \ll \tilde{q} \cdot \tilde{q}$

در این حد $\Lambda_{eff}^2 \sim \frac{1}{\tilde{q} \cdot \tilde{q}}$ است. در این صورت، جمله Λ_{eff}^2 متناهی است اما در $q^2 = 0$ تکینگی دارد و با واگرایی فروسرخ مواجه می‌شویم.

ب- حد $\frac{1}{\Lambda^2} \gg \tilde{q} \cdot \tilde{q}$

در این حد، $\Lambda_{eff}^2 \approx \Lambda^2$ است. به این ترتیب در $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ واگرایی فرابنفش داریم. و جمله‌های C_{μ}, F_{μ} که شامل $\tilde{q} \cdot \tilde{q}$ هستند، در حد فروسرخ، مقداری از مرتبه ۱ می‌شوند (پیوست ب).

حد $\Lambda_{eff}^2 \rightarrow \infty$ نشان می‌دهد که دو حد واگرایی فروسرخ و فرابنفش هم‌زمان ظاهر می‌شود که به آن واگرایی مخلوط UV/IR گویند. بنابراین، شکل تابع رأس کل به صورت زیر به دست می‌آید:

۱. Counter-term

۲. Modified Minimal Subtraction

۳. Gordon decomposition

مغناطیسی میون به دلیل جرم سنگین تر آن نسبت به الکترون، سهم بزرگتری دارد و با توجه به جرم سنگین تائو لپتون، انتظار می رود که بتوان حد بهتری در نظریه ناجابه جایی با استفاده از مقادیرهای آزمایشگاهی و محاسبه ای آن محاسبه نمود، اما به علت طول عمر خیلی کوتاه آن، اندازه گیری آزمایشگاهی فاکتور g تائون، بسیار مشکل است [۲۱].

یکی از نویسندگان (ن.م) از راهنمایی های آقای احسان باورساد، کمال تشکر را دارد.

۱- ضرب بین توابع نمایی:

اثبات: از ضرب ستاره ای داریم:

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}k\theta q}$$

۲- نمایش فضای تکانه:

$$(f * g)(x) = \int d^4k d^4q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{\frac{i}{2}(k\theta q)} e^{i(k+q)x}$$

۳- شرکت پذیری:

$$[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$$

اثبات: با استفاده از رابطه دوم.

۴- ضرب ستاره ای زیر انتگرال:

$$\int (f * g)(x) d^4x = \int (g * f)(x) d^4x$$

اثبات: با توجه به پادمتقارن بودن پارامتر ناجابه جایی و انتگرال گیری از رابطه دوم.

۵- ویژگی دوره ای:

$$\int (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(x) d^4(x) = \int (f_n * f_{n-1} * \dots * f_1)(x) d^4(x)$$

اثبات: با استفاده از رابطه ۴.

بنابراین با جایگذاری مقادیرهای آزمایشگاهی تکانه های الکترون و میون در رابطه (۲۷) و نیز در نظر گرفتن اختلاف مقدار آزمایشگاهی و نظری فاکتور g این دو لپتون، می توان بر پارامتر ناجابه جایی θ حد گذاشت.

آخرین مقادیرهای محاسبه شده و اندازه گیری شده برای فاکتور g میون، نشان می دهد که [۱۷].

$$\delta a_\mu = (\delta a_\mu)_{\text{exp}} - (\delta a_\mu)_{\text{th}} \sim (10)^{-9}. \quad (28)$$

که در آزمایش تکانه میون $p^i \approx 0.3 \text{ GeV}$ است [۱۸].

با استفاده از رابطه های (۲۷) و (۲۸) حد خوبی برای پارامتر ناجابه جایی به دست می آید.

$$\Lambda \sim 1 (\text{TeV}) \quad (29)$$

اگر از مقادیرهای اندازه گیری شده فاکتور g الکترون استفاده کنیم، تکانه الکترون در دستگاه Penning trap مقدار $p^i \approx 0.4 \text{ MeV}$ در آزمایش گروه گابریلز [۱] است و با توجه به آخرین مقادیرهای محاسبه شده نظری فاکتور g در [۴] که تا مرتبه 10^{-10} حلقه انجام گرفته است، داریم:

$$\delta a_e \sim 0.4 \times 10^{-12}. \quad (30)$$

بنابراین حدی که برای پارامتر ناجابه جایی از رابطه های (۲۷) و (۲۹) به دست می آید، مقدار زیر است:

$$\Lambda \sim 200 \text{ GeV}. \quad (31)$$

در مقاله (۱۹)، به مقاله های مختلف پدیده شناسی اخیر و قیدهای ناجابه جایی از آزمایش ها و محاسبه های نظری پرداخته شده است. برای مثال قیدهایی که مربوط به ناجابه جایی فضا- زمان از آزمایش های اتمی دقیق بر جابه جایی لمب در اتم هیدروژن به دست آمده از مرتبه زیر است [۲۰].

$$\Lambda_{nc} \geq 0.6 \text{ GeV}.$$

در این مقاله، نشان داده ایم که تابع ساختار الکترومغناطیسی لپتون باردار در نظریه ناجابه جایی تصحیح شده است و بنابراین g لپتون در مرتبه تک حلقه در این نظریه سهم می گیرد.

حد انرژی ناجابه جایی محاسبه شده در رابطه (۲۹) تأییدی بر این نکته است که فیزیک جدید در ناهنجاری گشتاور

۶- مختلط الحاقی :

$$Besselk(\nu, \sqrt{x}) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(\sqrt{x})$$

$$+ 2\gamma - \nu + (\dots)x + (\dots)x^2 + \dots$$

$$(f * g)^* = g^* * f^*$$

$$\Gamma_\mu^\nu = -\frac{\alpha}{\pi} e^{\frac{i}{\nu} p \times p'} \int_0^1 d\alpha_\nu d\alpha_r d\alpha_r \delta(\nu - \sum_i \alpha_i)$$

$$\times e^{-i(\alpha_r + \alpha_r) p \cdot \tilde{q}} \times \left(\frac{2A_\mu}{\Lambda_{eff}^\nu \sqrt{x}} \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \sqrt{x} - 2\gamma_E - \nu + \dots \right)$$

$$+ 2B_\mu \times \left(-\frac{1}{\nu} \ln x - 2\gamma_E - \nu + \dots \right)$$

$$+ 2\sqrt{x} \Lambda_{eff}^\nu C_\mu \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \sqrt{x} - 2\gamma_E - \nu + \dots \right)$$

$$۱) \int_0^\infty e^{-\rho x - \frac{1}{\rho}} d\rho = \frac{2}{\sqrt{x}} Besselk(\nu, \sqrt{x})$$

$$۲) \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{-\rho x - \frac{1}{\rho}} d\rho = 2 Besselk(0, \sqrt{x})$$

$$۳) \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\nu} e^{-\rho x - \frac{1}{\rho}} d\rho = 2\sqrt{x} Besselk(\nu, \sqrt{x})$$

و بسط تابع بسل نوع دوم در حد $x \rightarrow 0$:

13. M Chaichian, P presnajder, M M Sheikh-Jabbari, A Tureanu, *Eur. Phys. J. C* **29**(2003) 413.
14. M E Peskin, S V scheroeder, "An Introduction to quantum field theory"; 1995, Addison-Wesley Advanced Book Program; C. Itzykson and J-B Zuber, "Quantum field theory", *McGraw-Hill* (1985).
15. M T Rasaka, University of Helsinki, Ph.d thesis. (2009).
16. S Minwalla, M V Raamsdonk and N Seiberg, *hep-th/9912072*.
17. The Muon Anomalous Magnetic Moment, Updated July 2007 by A Hocker (CERN) and W J Marciano (BNL).
18. KEK_j-parc-pac2009-06.
19. M Moumni, A BenSlama, S Zaim, *hep-ph/0907.1904v5* (2010).
20. A Stern, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 061601.
21. M Passera, *Nucl. Phys.*, **169** (2007) 213; *arXiv:hep-ph/0702027v1*.
1. B Odom, D Hanneke, B D'Urso, and G Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 030801.
2. A Czarnecki, M Dowling, J Mondejar, and J H Piclum, *J. Nucl. Phys. bps*, **10** (2010) 1016.
3. J Schwinger, *Phys. Rev.* **73** (1948) 416.
4. T Aoyama, M Hayakawa, T Kinoshita, M. Nio, *arXiv:1101.0459v1*.
5. D Hanneke, S Fogwell, and G Gabrielse, *Phys Rev. Lett.* **100** (2008) 120801.
6. F Jegerlehner, *arXiv:hep-ph/0703125v3*.
7. I F Riad, M M Sheikh-Jabbari, *JHEP* **0008** (2000) 045, *arXiv:hep-th/0008132v3*.
8. I Hinchliffa, N Kerstingb and Y L Mab, *Mod. Phys. A* **19** (2004) 179-204.
9. S Saxell, ph.d thesis, University of Helsinki., *arXiv:hep-th /0909.1669v2* (2009).
10. N Seiberg, E Witten, *JHEP* 09 (1999).
11. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, A Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2716.
12. M Hayakawa, *Phys.Lett. B* **478** (2000) 394.