

r.koohiesfahani@ph.iut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۸/۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۸/۱۷)

π /

پیدایش نظریه گراف در سال ۱۷۶۳، مطالعه شبکه‌ها به عنوان یک ابزار مهم در برخی زمینه‌ها مانند علوم اجتماعی گسترش یافته تا جایی که دهه گذشته شاهد به وجود آمدن یک شاخه جدید تحقیقاتی به نام "شبکه‌های پیچیده" بود. این شبکه‌ها ساختاری بی‌نظم، پیچیده و وابسته به زمان دارند و تعداد رئوس آنها گاهی به میلیون‌ها رأس می‌رسد. بسیاری از سامانه‌های موجود در طبیعت و صنعت از چنین ساختارهایی تشکیل شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان، شبکه‌های عصبی، شبکه‌های حمل و نقل عمومی، شبکه‌های اینترنت، شبکه‌های تلفن و ... اشاره کرد [۱ تا ۳]. در چند دهه اخیر یک سوال اساسی در مورد دینامیک غیرخطی شبکه‌ها مطرح بوده است. اینکه یک شبکه چگونه به حالت همگامی می‌رسد و هر شبکه چه

نظم، خصوصیت پایه‌ای و مهم طبیعت و مفهومی اساسی در علم است. الگوهای نظم را می‌توان به راحتی در سیستم‌های فیزیکی، زیستی، اجتماعی و غیره مشخص کرد. اصولاً نظم به حالت پایا (استاتیک) یک ساختار تعلق می‌گیرد. مانند ساختار منظم کریستال که اتم‌ها کاملاً یک ساختار دوره‌ای را تولید می‌کنند. با این وجود می‌تواند یک خصوصیت مهم در دینامیک جمعی^۱ نیز باشد. رفتار بیولوژی موجودات زنده تماماً بر پایه نظم دینامیکی قرار دارد؛ همانند شبکه عصبی در مغز. اولین قدم برای درک رفتار دسته جمعی سیستم‌ها، مدل سازی آنها با شبکه است که در آن هر رأس بیانگر یک واحد دینامیکی و وجود یال بین آنها نمایانگر برهم‌کنش و تبادل اطلاعات بین آنها است. با

حتی در همین حالت خاص نیز رفتار سیستم بسیار پیچیده است و جواب‌های متعددی برای آن به دست می‌آید. با تبدیل $\omega \rightarrow \theta_i$ و تقسیم رابطه (۱) بر K/N و بازتعریف زمان خواهیم داشت [۶]:

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i=1,2,\dots,N, \quad (2)$$

که در آن $\tau = \frac{t}{K/N}$ است. برای مشخص کردن میزان همگامی در شبکه‌ها از پارامتر نظم (r) استفاده می‌شود که در هر زمان معیاری از رفتار دسته جمعی نوسانگرها در شبکه است.

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}. \quad (3)$$

فاز ψ ، میانگین فاز نوسانگرها است. در این مقاله فرآیند همگام‌سازی بر روی شبکه منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج تحلیلی توسط نتایج مدل سازی مورد تأیید قرار می‌گیرد. برای حل عددی معادله‌های (۲) از روش اویلر استفاده شده است. محاسبات عددی ما نشان داد که برای این مدل استفاده از روش دقیق‌تر رانگ-کوتا منجر به نتایج دقیق‌تر نمی‌شود و تنها زمان انجام محاسبات را افزایش می‌دهد. بنابراین همه محاسبات با استفاده از روش اویلر انجام شد.

ساده‌ترین روش حل عددی معادلات دیفرانسیل، روش اویلر است. در این روش با دانستن شرایط اولیه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، شرایط بعدی در هر زمان به دست می‌آید. اگر معادله به صورت $y'(t) = f(t, y(t))$ و شرایط اولیه $y(t_0) = y_0$ را داشته باشیم، با در نظر گرفتن قدم‌های زمانی به صورت $t_n = t_{n-1} + h$ و با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) + o(h^2)$$

تا مرتبه اول h :

$$y(t_n + h) = y(t_{n+1}) = f(t_n, y(t_n))h + y(t_n)$$

بنابراین با داشتن شرایط اولیه می‌توان مقدار تابع را در زمان‌های بعدی به دست آورد.

حالت‌های همگامی را به خود اختصاص می‌دهد. چنین تلاش‌هایی بر روی شبکه‌های بی‌مقیاس^۱، تصادفی^۲ و جهان کوچک^۳ انجام گرفته است [۴ - ۶]. در این مقاله شبکه منظم^۴ که توسط زنجیره‌ای از رئوس ساخته شده و در آن هر رأس به چند همسایه اول خود متصل است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر رأس به نوسانگر فازی تشبیه شده و برهم‌کنش بین نوسانگرها و همگام‌سازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همگام‌سازی به عنوان سازگاری آهنگ نوسانگرها از طریق برهم‌کنش ضعیف بین آنها شناخته می‌شود و در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مشاهده شده و کاربردهای فراوانی دارد. به عنوان مثال می‌توان همگام شدن در کرم‌های شب‌تاب، مولدهای جریان متناوب و سیستم‌های آکوستیکی را نام برد. مدل‌های مختلفی برای توصیف این پدیده ارائه شده که یکی از آنها مدل کوراموتو^۵ است [۷]. قابل حل بودن این مدل از یک سو و توصیف قابل قبول پدیده همگام‌سازی توسط آن از سوی دیگر باعث شد تا مدل کوراموتو یکی از موفقیت‌آمیزترین مدل‌ها معرفی شود. تحول زمانی هر نوسانگر در این مدل به این‌گونه است:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i=1,2,\dots,N, \quad (1)$$

که در آن K ضریب جفت‌شدگی نوسانگرها و N تعداد رئوس شبکه است که حضور آن تضمین‌کننده رفتار صحیح تابع در حد N های بزرگ (حد ترمودینامیکی) می‌باشد. اگر دو رأس i و j به هم متصل باشند a_{ij} برابر ۱ و در غیر این صورت صفر است. ω_i فرکانس ذاتی هر نوسانگر است. در حالت کلی هر نوسانگر می‌تواند فرکانس ذاتی متفاوتی داشته باشد. به عبارت دیگر فرکانس هر نوسانگر را می‌توان از یک توزیع فرکانسی به دست آورد. ولی در این مقاله فقط حالت‌هایی بررسی می‌شود که در آنها فرکانس ذاتی تمام رئوس یکسان است. خواهیم دید

۱. Scale-Free

۲. Random

۳. Small-World

۴. Regular

۵. Kuramoto model

۶. Euler method

فرض کنیم رابطه (۱) جوابی به ازای مجموعه $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*\}$ داشته باشد. برای بررسی پایداری این جواب، هر نوسانگر را از فاز پایای خود به مقدار کوچکی منحرف می‌کنیم: $\theta_i(t) = \theta_i^* + \delta_i(t)$ اکنون با جایگذاری در معادله ۱ و صرف نظر کردن از مراتب بالاتر δ_i ها، به رابطه $\dot{\delta} = \Lambda \delta$ می‌رسیم که در این رابطه $\Lambda = M - D$ و $D_i = \sum_{j=1}^N M_{ij}$ ، $M_{ij} = \frac{K}{N} A_{ij} \cos(\theta_j^* - \theta_i^*)$ و $D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_N)$ است. اگر تمامی ویژه مقادیر ماتریس Λ منفی باشند، جواب مورد نظر پایدار خواهد بود [۸].

در ماتریس پایداری تمام زوایا را از حالت تعادل خارج می‌کردیم. در این روش فقط یک رأس را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و پایداری آن رأس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس این کار را با تمامی رئوس دیگر نیز انجام می‌دهیم.

در ابتدا فرض می‌کنیم شبکه منظمی داریم که تنها به همسایه اول خود متصل است ($Nc=1$). اگر یکی از جواب‌های مدل کوراموتو برای آن به صورت $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*\}$ باشد، معادله کوراموتو برای رأسی مانند ۲ تبدیل خواهد شد به:

$$\dot{\theta}_r = \sin(\theta_1^* - \theta_r^*) + \sin(\theta_2^* - \theta_r^*) = 0 \quad (۸)$$

با تبدیل $\theta_r^* \rightarrow \theta_r^* + \delta_r(t)$ خواهیم داشت:

$$\dot{\delta}_r(t) = \exp\{-[\cos(\theta_1^* - \theta_r^*) + \cos(\theta_2^* - \theta_r^*)]t\}, \quad (۹)$$

بنابراین برای داشتن پایداری باید عبارت $[\cos(\theta_1^* - \theta_r^*) + \cos(\theta_2^* - \theta_r^*)]$ بزرگتر از صفر باشد. از طرفی طبق معادله کوراموتو داریم $\sin(\theta_1^* - \theta_r^*) = -\sin(\theta_2^* - \theta_r^*)$ و یا به عبارتی با تعریف $\theta_r^* - \theta_1^* = x$ ، $\theta_r^* - \theta_2^* = y$ داریم:

$$\sin(x) = -\sin(y), \quad (۱۰)$$

$$a) x = \pi + y \rightarrow \cos(x) + \cos(y) = 0,$$

$$b) x = \pi - y \rightarrow \cos(x) + \cos(y) = 2\cos(y),$$

بنابراین تنها حالت b قابل قبول بوده با این شرط که تفاوت

در شبکه منظم هر رأس به چند همسایه‌های نزدیک خود متصل است. بنابراین از رابطه (۲) داریم:

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = \sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i=1,2,\dots,N \quad (۴)$$

که در آن Nc برابر نصف تعداد همسایگان هر رأس است. شرایط دوره‌ای در این معادلات برقرار است: $i+N \equiv i$. از معادله (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$r \sin \psi \sum_{j=1}^N \cos \theta_j = r \cos \psi \sum_{j=1}^N \sin \theta_j, \quad (۵)$$

دنبال جواب‌های پایدار هستیم، بنابراین $d\theta_i/d\tau = 0$ است. تابع $\sin(\theta_j - \theta_i)$ تابعی فرد است، پس $\sum_{i,j} \sin(\theta_j - \theta_i) = 0$ می‌باشد. با باز کردن این معادله و استفاده از روابط (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$r \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0, \quad (۶)$$

$$r \sum_{i=1}^N \sin \theta_i \sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0. \quad (۷)$$

با توجه به اینکه در شبکه منظم، رئوس ارجحیتی بر یکدیگر

ندارند، انتظار داریم جواب $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi)$ مستقل از شماره

$$\text{رأس } i \text{ باشد، بنابراین داریم: } f(\theta) = \sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0.$$

عبارات (۶) و (۷) باید هم‌زمان با هم برقرار باشند. پس با فرض $r \neq 0$ دو حالت با جواب‌های ایستا وجود دارد.

$$\sum_{i=1}^N \cos \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin \theta_i = 0, \quad (۱)$$

$$\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0. \quad (۲)$$

از آنجا که دنبال جواب‌های پایدار هستیم، قبل از بررسی این دو حالت به بررسی روش‌های تعیین پایداری جواب‌های پایا می‌پردازیم.

جدول ۱. ویژه مقادیر برای حالت میانگین درجه ۲ و پخش حول فضای فاز. در اینجا $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$ ، $N_{circle} = N$ است. اعداد درون پرانتز بیانگر تعداد دفعات تکرار آن ویژه مقدار هستند.

| ویژه مقدار | N |
|---|-----|
| (ناپایدار) $(\ast 4)$ | ۴ |
| (پایدار) $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ | ۵ |
| $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ | ۶ |
| $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ | ۷ |
| $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ ، $(\ast 2)$ | ۸ |

مساوی با $\pi/2$ باشد. زیرا داشتن یک همسایه با اختلاف فاز کمتر از $\pi/2$ باعث وجود یک ویژه مقدار منفی می‌شود و بنابراین اگر همسایه‌ای با اختلاف فاز $\pi/2$ داشته باشیم، (ویژه مقدار صفر) مشکلی پیش نمی‌آید. اما اگر تنها یک همسایه با اختلاف $\pi/2$ داشته باشیم، ویژه مقدار صفر است و طبق معادله (۹) رأس ۲ به جای اول خود برخواهد گشت. (۲) طبق معادله (۱۰) باید تقارن در توزیع زوایا داشته باشیم. یعنی یا همگی نوسانگرها هم‌فاز باشند و یا به طور مرتب حول دایره فضای فاز توزیع شده باشند.

$$\left(\sum_{i=1}^N \cos \theta_i = 0, \sum_{i=1}^N \sin \theta_i = 0 \right)$$

زمانی که فاز نوسانگرها حول دایره فضای فاز به طور منظم پخش شده باشند شرایط $\sum_{i=1}^N \cos \theta_i = 0$ و $\sum_{i=1}^N \sin \theta_i = 0$ ارضاء می‌شود. در این حالت پارامتر نظم برابر با صفر است. در اینجا تعداد رئوسی که حول دایره فضای فاز قرار می‌گیرند را با N_{circle} نشان می‌دهیم.

$$(N_c = 1)$$

اختلاف زوایا در این حالت برابر با $2\pi/N$ است، بنابراین سیستم به ازای ۵ رأس به بالا در حالت پایدار قرار می‌گیرد (جدول ۱). در حالت $N=4$ که هر چهار ویژه مقدار برابر با صفر هستند، ناپایداری آن از طریق اجرای برنامه تأیید شد.

زوایا از $\pi/2$ کمتر و از $-\pi/2$ بیشتر باشد. اکنون اگر فرض کنیم که در شبکه منظم هر رأس به دو همسایه اول خود متصل است، معادله کوراموتو برای رأس فرضی شماره ۲ چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1^* - \theta_2^* - \delta_r) + \sin(\theta_N^* - \theta_2^* - \delta_r) + \sin(\theta_2^* - \theta_2^* - \delta_r) \\ & + \sin(\theta_2^* - \theta_2^* - \delta_r) = \\ & -\delta_r \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) - \delta_r \cos(\theta_N^* - \theta_2^*) - \delta_r \cos(\theta_2^* - \theta_2^*) \\ & -\delta_r \cos(\theta_2^* - \theta_2^*) = g(\delta_r, \{\theta^*\}) \end{aligned} \quad (11)$$

در اینجا از تقریب خطی مرتبه اول استفاده کردیم.

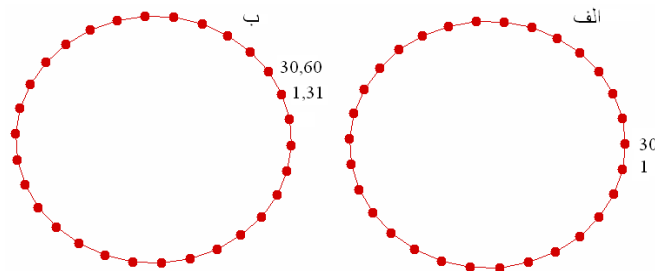
اکنون فرض می‌کنیم شبکه منظمی داریم که هر رأس فقط به همسایه‌های اول خود متصل است و یک شبکه دیگر که هر رأس فقط به همسایه‌های دوم خود متصل است. معادلات حاکم بر آنها چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 & = \sin(\theta_1^* - \theta_2^* - \delta_r) + \sin(\theta_2^* - \theta_2^* - \delta_r) \\ & = -\delta_r \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) - \delta_r \cos(\theta_2^* - \theta_2^*) = f_1(\delta_r, \{\theta^*\}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 & = \sin(\theta_N^* - \theta_2^* - \delta_r) + \sin(\theta_2^* - \theta_2^* - \delta_r) \\ & = -\delta_r \cos(\theta_N^* - \theta_2^*) - \delta_r \cos(\theta_2^* - \theta_2^*) = f_2(\delta_r, \{\theta^*\}). \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به اینکه $g(\delta_r, \{\theta^*\}) = f_1(\delta_r, \{\theta^*\}) + f_2(\delta_r, \{\theta^*\})$ بنابراین جواب‌های معادله g ترکیبی خطی از جواب‌های معادلات f_1 و f_2 است.

به طور خلاصه اگر شبکه‌ای با N_c همسایه اول داشته باشیم برای داشتن جوابی پایدار باید این دو شرط همزمان برقرار باشند: (۱) اختلاف زوایا کمتر از $\pi/2$ و اگر بیش از یک همسایه اول دارند باید تمامی اختلاف زوایا با همسایگان کمتر و یا



شکل ۱. الف) پیکربندی فاز شبکه ۳۰ تایی با $\Delta\theta = \frac{2\pi}{30}$ و $N_{circle} = 30$ ؛ ب) فضای فاز شبکه ۶۰ تایی با $\Delta\theta = \frac{2\pi}{60}$ و $N_{circle} = 60$ (پارامتر نظم صفر)

جدول ۲. ویژه مقادیر برای حالت میانگین درجه ۲ و پخش حول فضای فاز. در اینجا $\Delta\theta = 2 * \frac{2\pi}{N}$ و $N_{circle} = N$ است. اعداد درون پرانتز بیانگر تعداد دفعات تکرار آن ویژه مقدار هستند.

| N | ویژه مقدار |
|---|--|
| ۵ | $0, 0, 2/5, 2/5$ |
| ۶ | $-2, 0 (*3), 1 (*2)$ |
| ۷ | $-0, 6784 (*2), -2, 2029 (*2), 0, 0746 (*2), 0$ |
| ۸ | $-2, 8284, -2, 4142 (*2), -1, 4142 (*2), -0, 4142 (*2), 0$ |

پایداری باید $Nc \times \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ باشد (در حالت تک همسایه به متفاوت وجود دارد. در حالت اول همگی روی دایره فضای فاز به طور مرتب پخش می شوند ($N_{circle} = 10, \Delta\theta = 2\pi/10$), و در حالت دوم از رأس شماره ۱ تا ۵ پخش می شوند و از ۶ تا ۱۰ روی آنها به ترتیب قرار می گیرند ($N_{circle} = 5, \Delta\theta = 2\pi/10$). شکل ۱، همین موضوع را برای یک شبکه با $N=30$ که $N_{circle} = 30$ ، و یک شبکه با $N=60$ که $N_{circle} = 30$ چیده شده است، نمایش می دهد.

$$\left(\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0 \right) \dots$$

برای سادگی به دستگاه مختصاتی می رویم که $\psi=0$ باشد. اگر $Nc=1$ باشد و معادله را حول رأس ۱ مطابق شکل (۲-الف) بنویسیم خواهیم داشت $\sin \theta_0 + \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 0$. اکنون اگر حول رأس ۲ بنویسیم (شکل (۲-ب)) خواهیم داشت $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0$. با مقایسه این دو داریم $\sin \theta_0 = \sin \theta_3$. بنابراین در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_{n(2Nc+1)+i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$N = n(2Nc+1) \dots$$

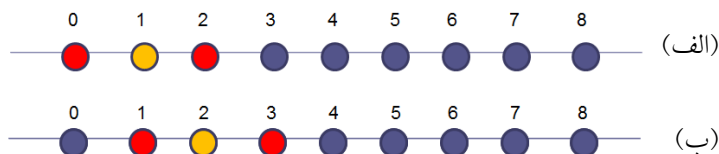
در این حالت به راحتی می توان اثبات کرد که $2Nc+1$ دسته

بنابراین برای حالتی همانند ۱۰ رأس، دو پیکربندی فضای فاز متفاوت وجود دارد. در حالت اول همگی روی دایره فضای فاز به طور مرتب پخش می شوند ($N_{circle} = 10, \Delta\theta = 2\pi/10$), و در حالت دوم از رأس شماره ۱ تا ۵ پخش می شوند و از ۶ تا ۱۰ روی آنها به ترتیب قرار می گیرند ($N_{circle} = 5, \Delta\theta = 2\pi/10$). شکل ۱، همین موضوع را برای یک شبکه با $N=30$ که $N_{circle} = 30$ ، و یک شبکه با $N=60$ که $N_{circle} = 30$ چیده شده است، نمایش می دهد.

$$(Nc=2) \dots$$

در این حالت بیشترین اختلاف فاز بین دو همسایه برابر $\Delta\theta = 2 * (2\pi/N)$ است. بنابراین انتظار داریم سیستم به ازای ۸ رأس به بالا پایدار باشد (جدول ۲).

بنابراین با محاسبه اختلاف فاز همسایه های هر رأس، می توان به پایداری و یا عدم پایداری شبکه پی برد. اگر اختلاف زاویه هر رأس با اولین همسایه اش برابر با α باشد، اختلاف زاویه هر رأس با دورترین همسایه اش برابر $Nc \times \alpha$ است که $\alpha \geq 2\pi/N$ می باشد ($\alpha = 2\pi/N_{circle}$). بنابراین در حالت



شکل ۲. (الف) بررسی حالت $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0$ برای رأس شماره ۱؛ (ب) بررسی حالت $\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0$ برای رأس شماره ۲. بررسی این حالت بستگی به تعداد رئوس دارد.

جدول ۳. ویژه مقادیر مربوط به حالت $N = 3n$.

| N | ویژه مقدار |
|-----|--|
| ۳ | $0, 1/5, 1/5$ |
| ۶ | $0, 0/5, 0/5, 1/5, 1/5, 2$ |
| ۹ | $0, 0/234(*2), 1/5(*2), 1/9397(*2), 0/8264$ |
| ۱۲ | $0, 0/5(*2), 1/5(*2), 2, 0/1340(*2), 1(*2), 1/866(*2)$ |
| ۱۵ | $0, 1/5(*2), 0/86455(*2), 0/33087(*2), 0/69098(*2), 1/1045(*2), 1/809(*2), 1/9781(*2)$ |

معادله به شکل زیر داریم.

الف) ۲ همسایه

در اینجا $N = 3n$ و یا به عبارتی $N_{circle} = 3$ است. ویژه مقادیر مطابق جدول ۳ می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ویژه مقدار هر N ، برابر است با ویژه مقدارهای مضرب‌های N ، به‌علاوه چند ویژه مقدار دیگر. از آنجا که همگی این اعداد باید ضریب ۳ باشند و ویژه مقدارهای ۳ نیز مثبت است، بنابراین برای تمامی این اعداد، حالت $r = 0$ که $N_{circle} = 3$ ، حالت ناپایدار است.

$$\sin \theta_n = \sin \theta_{rNc+1} = \dots = \sin \theta_{n(2Nc+1)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\sin \theta_n = \sin \theta_{(rNc+1)+1} = \dots = \sin \theta_{n(2Nc+1)+1}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

و به همین ترتیب

$$\sin \theta_{rNc} = \sin \theta_{(rNc+1)+rNc} = \dots = \sin \theta_{n(2Nc+1)+rNc}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2Nc+1)$$

سینوس تمامی زوایا با هم برابر هستند. بنابراین $2Nc+1$ مجهول و یک معادله خواهیم داشت. سه نوع جواب وجود دارد:

(۱) تمامی رئوس دارای فاز یکسان هستند، که به حالت $r=1$ منجر می‌شود و پایدار است.

(۲) برخی رئوس دارای فاز x و برخی دارای فاز $x+\pi$ هستند. بنابراین اختلاف زاویه بین دو رأس مجاور امکان دارد از $\pi/2$ بیشتر باشد. پس ناپایدار نیست.

(۳) زوایا به گونه‌ای چیده شده‌اند که جمع سینوس آنها صفر خواهد بود که در این حالت $r=0$ دارد.

ب) ۴ همسایه

ویژه مقادیر مطابق جدول ۴ به دست آمد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود سه عدد صفر داریم. ناپایداری آنها با اجرای برنامه تأیید شد. بنابراین به ازای $N=5$ به هیچ عنوان حالت $r=0$ پایدار نیست.

ج) ۶ همسایه

حالتی است که بتوان $r=0$ را با شرایط $N=7n$ ، به گونه‌ای که $N_{circle} = 7$ باشد، ایجاد کرد. ویژه مقادیر مطابق جدول ۵ به دست آمد:

$$r=0 \quad ()$$

در این جا نیز با بررسی حالات گوناگون به قانونی کلی دست خواهیم یافت.

جدول ۴. ویژه مقادیر مربوط به حالت $N=5n$.

| ویژه مقدار | N |
|--|-----|
| $0, 0, 0, 2/5, 2/5$ | ۵ |
| $0(*3), 2/5(*2), -1/2361, 1(*2), 2/1180(*2)$ | ۱۰ |

جدول ۵. ویژه مقادیر مربوط به حالت $N=7n$.

| ویژه مقدار | N |
|-------------------|-----|
| $3/5, 3/5, 0(*5)$ | ۷ |
| $3/5, 3/5, 0(*5)$ | ۱۴ |

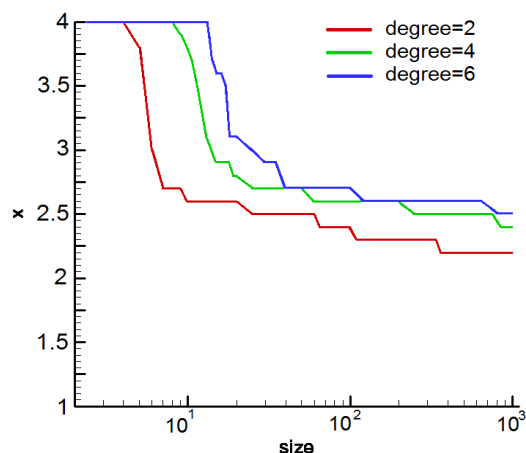
ب) اگر $2Nc+1$ و m نسبت به هم اول نباشند و کوچکترین مضرب مشترک آنها برابر با q باشد، q دسته معادله خواهیم داشت. بنابراین:

$$r=1 \quad \sum_{i=1}^{2Nc+1} \sin \theta_i = 0 \Rightarrow \frac{2Nc+1}{q} \sum_{i=1}^q \sin \theta_i = 0$$

(حالتی که تمامی زوایا برابر صفرند) و $r=0$ (حالتی که دور دایره قرار گرفته اند) می‌رسیم. حل این قسمت کاملاً مشابه قسمت ۵.۲.۳ است که نشان داده شد $r=0$ ناپایدار است.

بنابراین حالت دوم ($\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin(\theta_j - \psi) = 0$) هیچ جواب پایداری به جز $r=1$ نمی‌تواند داشته باشد.

همان‌گونه که مشاهده شد، به ازای یک شبکه با ساختار ثابت، امکان بروز دو جواب $r=0$ و $r=1$ با توجه به شرایط اولیه فازهای رئوس وجود دارد. با کم کردن بازه فازهای اولیه از $[-\pi, \pi]$ به $(-x, x]$ که $x < \pi$ است، فقط جواب $r=1$ به دست می‌آید. میزان x بحرانی به تعداد یال و رئوس شبکه وابسته است که از آن حد به پایین فقط $r=1$ داریم. در شکل ۳، x بحرانی به ازای هر تعداد یال و تعداد رأس مختلف به دست آورده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هرچه تعداد یال درون شبکه بیشتر باشد، احتمال به دست آوردن $r=1$ بیشتر است، زیرا به ازای تعداد رئوس ثابت، با افزایش تعداد یال x بحرانی افزایش می‌یابد. یعنی به ازای بازه بیشتری از گستره فازها

شکل ۳. وابستگی حالت پایدار $r=1$ به بازه فاز اولیه

د) حالت کلی

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ویژه مقادیرهای هر $N=2Nc+1$ برابر است با $0, (*2) N/2$ و از طرفی ویژه مقادیر N های ضرایب دیگر، این ویژه مقادیر را دارند (که دو تای آن مثبت است) و بنابراین در حالت کلی این حالت ناپایدار است.

۵.۳. تعداد رئوس، برابر با $N = n(2Nc+1) + m$

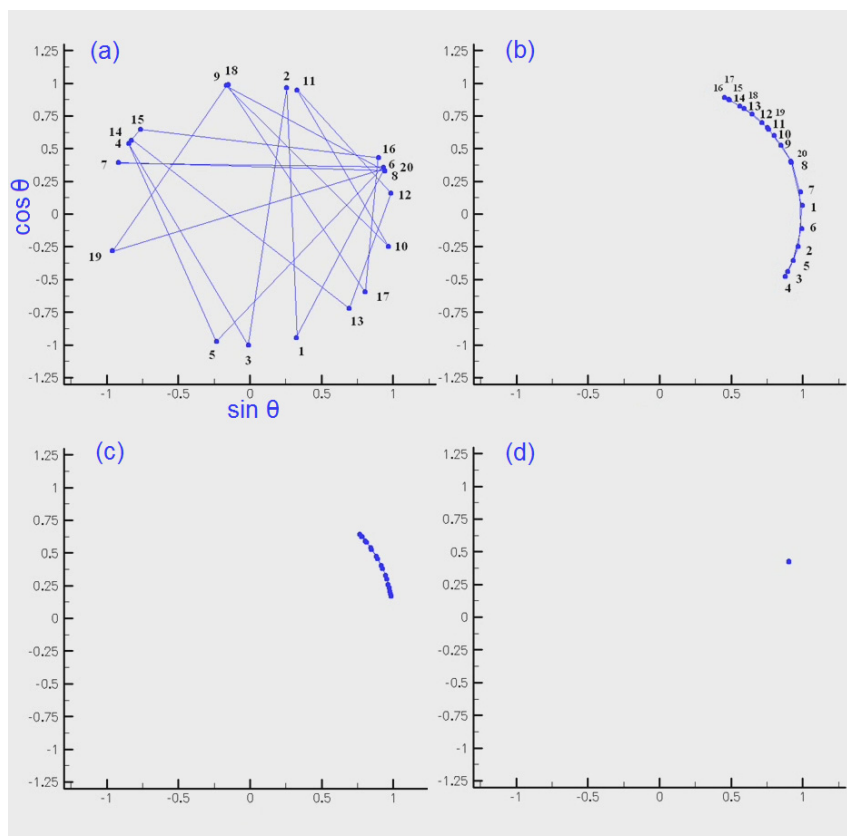
در اینجا دو حالت داریم.

الف) اگر $2Nc+1$ مضربی از m نباشد، تمام معادلات با هم برابر می‌شوند. به این معنا که تماماً سینوس‌ها با هم برابرند، و از

$$\sum_{j=i-Nc}^{i+Nc} \sin \theta_j = 0$$

حکم می‌کند که تمام زوایا برابر

صفر باشند که $r=1$ را نتیجه می‌دهد.



شکل ۴: نحوه رسیدن به فاز همگام کامل ($r=1$) برای شبکه منظم با $Nc=1$, $N=20$ خطوط، نشان دهنده یال‌های بین رئوس هستند. شکل اول فاز هر نوسانگر را در $t=0$ نشان می‌دهد. شکل‌ها به ترتیب نشان دهنده وضعیت رئوس به ازای هر ۵ قدم زمانی هستند.

باید شرط $\Delta\theta < \pi/2$ برقرار باشد، شرط وجود $r=0$ به $N > 4Nc$ کاهش می‌یابد و شرط وجود فقط $r=1$ به $N \leq 4Nc$ تبدیل می‌شود. از این معادله مشخص است که برای شبکه کامل (نوعی شبکه منظم که هر رأس به تمامی رئوس دیگر متصل است)، شرط $4Nc \leq N$ هیچ‌گاه برآورده نمی‌شود، بنابراین حالت $r=0$ حالت پایدار این شبکه نمی‌تواند باشد و فقط می‌تواند حالت $r=1$ را داشته باشد.

حل معادله کوراموتو روی شبکه منظم دو دسته جواب پایدار با $r=0$ و $r=1$ دارند. نحوه رسیدن به حالت $r=1$ که در آن تمامی فازهای رئوس یکسان هستند در شکل ۵ نشان داده شده است.

حالت $r=0$ زمانی اتفاق می‌افتد که تفاوت فاز هر رأس با همسایه‌های آن هیچ‌گاه بیشتر از $\pi/2$ نباشد و دست کم یک

می‌توان به $r=1$ دست یافت. بررسی تحلیلی شرایط اولیه‌ای که موجب بروز فقط $r=1$ در بازه $[-\pi, \pi]$ می‌شود.

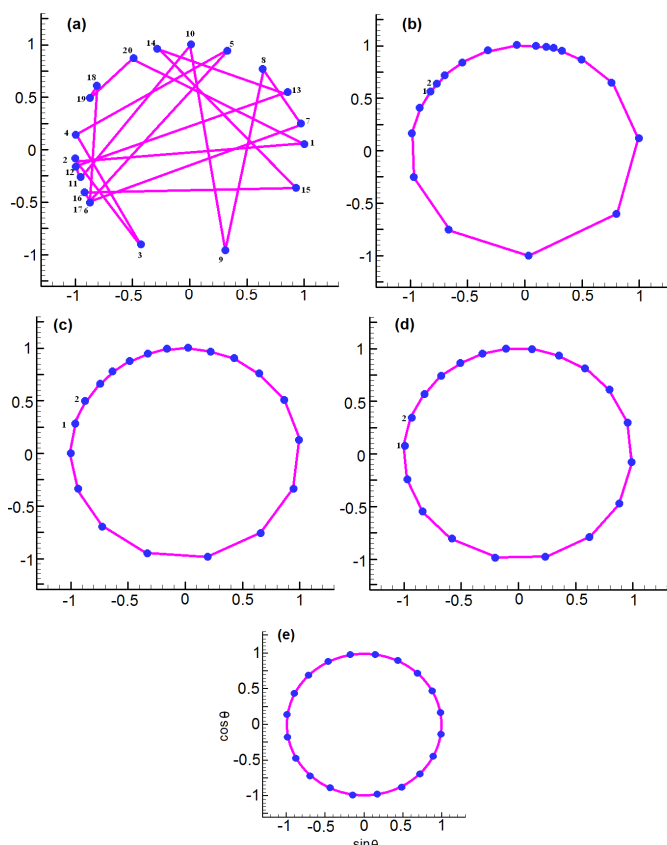
ابتدا شرایط وجود $r=0$ را بررسی می‌کنیم. باید اختلاف زاویه هر رأس با همسایه‌هایش کمتر از $\pi/2$ باشد. اگر رئوس به صورت منظم حول دایره‌ای نشسته باشند و اختلاف زاویه هر رأس با رأس کناری برابر با α باشد، بیشترین اختلاف زاویه بین هر رأس با همسایه‌اش برابر با $Nc*\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$Nc*\alpha \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha \leq \frac{\pi}{2Nc} \quad (4)$$

از طرفی، با توجه به اینکه رئوس به صورت منظم حول دایره هستند، α برابر با $2\pi/N$ است، و اگر رئوس مانند شکل ۱ روی هم قرار گرفته باشند، α بزرگتر از $2\pi/N$ است.

$$\alpha \geq 2\pi/N \quad (5)$$

از (۴) و (۵) خواهیم داشت $N \geq 4Nc$ ، بنابراین به ازای $N < 4Nc$ حتماً $r=1$ خواهیم داشت. البته به ازای $Nc=1$ که



شکل ۵. نحوه رسیدن به فاز ناهمگام ($r=0$) برای شبکه منظم با $Nc=1$ و $N=20$. خطوط نشان دهنده یال‌های بین رئوس هستند. شکل اول فاز هر نوسانگر را در $t=0$ نشان می‌دهد. شکل‌ها به ترتیب نشان دهنده وضعیت رئوس به ازای هر ۵ قدم زمانی هستند.

با محدود کردن بازه فاز اولیه نوسانگرها می‌توان به جواب پایدار تنها $r=1$ رسید.

در بازه فازهای اولیه $[-\pi, \pi]$ به ازای $N \leq 4Nc$ فقط $r=1$ وجود دارد و به ازای N های بیشتر هر دو حالت $r=1$ ، $r=0$ را داریم. (اگر رئوس فقط یک همسایه اول داشته باشند شرط به $N < 4Nc$ کاهش می‌یابد).

همسایه داشته باشد که تفاوت زاویه کمتر از $\pi/2$ باشد (به این معنا که اگر یک همسایه دارد بایستی اختلاف فاز کمتر از $\pi/2$ و اگر بیشتر از یک همسایه دارد بیشترین اختلاف فاز کمتر یا مساوی $\pi/2$ باشد). و همچنین رئوس به صورت منظم حول دایره فضای فاز قرار گرفته باشند. نحوه رسیدن به حالت $r=0$ در شکل ۵ نشان داده شده است.

Reports, 424 (2006) 175.

6. R Kouhi Esfahani, F Shahbazi and K Aghababaei Samani, "Noise-induced Synchronization in Small World Network of Phase Oscillators", Submitted to EPL (2011).
7. Y Kuramoto, "Chemical Oscillators, Waves, and Turbulence", Springer, Berlin (1984).
8. K Aghababaei Samani, S Ghanbarian, Phys. Rev. E 77 (2008) 036209.

1. S H Strogatz, "Sync: The emergence science of spontaneous order", Hyprion, New York (2003).
2. J D Murry, "Mathematical Biology", Springer, New York (1980).
3. A T Winfree; "The Geometry of Biological Time"; Springer, New York (1980).
4. H Khoshbakht, F Shahbazi and K Aghababaei Samani J. Stat. Mech. (2008) 10020.
5. S Bocalletti, V Latora and M Chavez; Physics