مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۲، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۱

يك نظرية جايگزين براي مكانيك بوهمي

محمد جواد كاظمي، محمد حسين براتي و ميثم مشهدي

دانشكدة علوم، دانشگاه قم، قم، ايران

(دريافت مقاله: ۱۳۹۰/۶/۲۹ ؛ دريافت نسخهٔ نهايي: ۱۳۹۱/۲/۳۰)

چكيده

دراين مقاله يك مدل علّي و مبتني بر مسير، براي توصيف سيستم‌هاي كوانتومي معرفي شده است.اين نظريه از لحاظ ساختار بسيار شبيه مكانيك بوهمي بوده و مانند نظرية بوهم، تمام نتايج آماري مكانيك كوانتومي استاندارد را باز توليد مي‌كند. مسيرهاي ذرات در اين مدل با مسيرهاي پيش بيني شده توسط مدل بوهم متفاوت مي‌باشند. همچنين فرم پتانسيل (نيروي) كوانتومي متفاوت با نظرية بوهم داده شده است. در حقيقت در اين نظريه يك پارامتر آزاد (μ) وجود دارد كه با صفر قرار دادن آن، مدل مذكور به نظرية بوهم تبديل مي‌شود. مشخصات نظري اين مدل، مانند ناورداي گاليله‌اي، مورد بررسي قرار گرفته است. همچنين مقايسة دقيقي بين اين نظريه و مكانيك بوهمي انجام شده است و پيشنهادهايي براي تمايز تجربي بين اين دو مدل (از طريق زمان تونل زني) ارائه شده است و در نهايت توسعه‌هايي از اين نظريه مورد بررسي قرار گرفته است.

واژه‌هاي كليدي: پتانسيل كوانتومي، مكانيك بوهمي، معادلة ليوويل، زمان تونل زني، زمان ورود، تعادل كوانتومي، معادلة هدايت

۱. مقدمه

در سال ۱۹۵۲ ديويد بوهم نظريه‌ای را ارائه نمود كه به عنوان مكانيک بوهمی شناخته شده است [۱-۲]. مكانيک بوهمی يک نظريهٔ علّی برای توصيف سيستم‌های كوانتومی است كه به عنوان يک فرمول‌بندی رقيب در كنار فرمول‌بندی كپنهاگی رواج يافته است. در اين نظريه، سيستم كوانتومی نه تنها از موج، بلكه از ذره نيز تشكيل شده است. در مدل بوهم ذرات بر روی مسيرهايی خوش تعريف حركت می‌كنند و آثار كوانتومی به كمک يک «نيروی كوانتومی» كه تابع موج به ذرات وارد می‌كند توضيح داده می‌شود. در نظريهٔ بوهم احتمال به صورت ذاتی در نظر گرفته نمی‌شود بلكه مشخصات تصادفی پديده‌های كوانتومی به كمک شرايط اوليهٔ تصادفی (جهل در مورد وضعيت اوليهٔ ذره) توضيح داده می‌شود. مكانيک «دوبروی- بوهم» توصيف كاملی برای تمام پديده‌های كوانتومی غير نسبيتی ارائه می‌دهد و برخی پديده‌ها كه در تعبير كپنهاگی راز آميز جلوه می‌كنند- مانند گذارهای اتمی و فرآيند اندازه‌گيری- در فرمول‌بندی «دوبروی- بوهم» توضيح بسيار ساده و قابل فهمی پيدا می‌كنند [۳-۶]. دراين مقاله قصد داريم يک نظريهٔ قطعيتی جديد، شبيه نظريهٔ بوهم، برای توصيف سيستم‌های كوانتومی معرفی نماييم. در اين مدل نيز به ذرات نيرويی وابسته به تابع موج وارد می‌شود. اما شكل اين نيرو با نيروی كوانتومی در مدل بوهم متفاوت می‌باشد. به دليل شباهت ساختار اين مدل با مكانيک بوهمی، مقايسه آن با مكانيک بوهمی می‌تواند ساختار اصلی آن را با وضوح بيشتری مشخص كند. برای اين منظور ابتدا به يادآوری نظريهٔ بوهم می‌پردازيم. با اينكار زمينه برای مقايسهٔ مدل پيشنهادی در اين مقاله، با مكانيک بوهمی، فراهم می‌شود.

Archive of SID

www.SID.ir

۲. مکانیک بوهمی

دو نوع رهیافت برای فرمول‌بندی مدل بوهم وجود دارد [۴]. در رهیافت اول که به تعبیر« دوبروی- بوهم» معروف است دینامیک ذرات مرتبهٔ دوم در نظر گرفته می‌شود و اثرات کوانتومی به کمک پتانسیل کوانتومی توضیح داده می‌شوند. این روش بیشتر براساس کار دیوید بوهم بنا شده است [۱-۴]. در رهیافت دوم اعتقادی به پتانسیل کوانتومی وجود ندارد و دینامیک ذرات مرتبهٔ اول درنظر گرفته می‌شود. این روش «رهیافت مینیمال» نامیده می‌شود که ریشه در کارهای دوبروی دارد و توسط Dürr, Goldstein, Zanghi. توسعه داده شده است [۵-۱۱]. ما در این قسمت اصول هر دو رهیافت را بیان کرده و در نهایت آنها را با مدل ارائه شده در این مقاله مقایسه می‌نماییم. همهٔ محاسبات برای سادگی در یک بعد انجام شده است.

۲. ۱. رهیافت کمینه (دینامیک مرتبهٔ اول)

دررهیافت مینیمال حالت سیستم کوانتومی با جفت (x,ψ) معین می‌شود. که در آن ψ تابع موج سیستم و x مکان ذره را مشخص می‌کند. در این فرمول‌بندی دو معادله (به عنوان اصل) برای تحول زمانی مکان ذره و تابع موج داده شده است. هردوی این معادلات نسبت به زمان مرتبهٔ اول هستند [۵-۶]. با توجه به شکل قطبی تابع موج

$$\psi = R e^{i\frac{S}{\hbar}}, \qquad (۱)$$

معادلات تحول سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

اصل اول: معادلهٔ حرکت ذره (معادلهٔ هدایت)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \qquad (۲)$$

اصل دوم: معادلهٔ تحول زمانی تابع موج (معادلهٔ شرودینگر)

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi, \qquad (۳)$$

در معادلات فوق m معرف جرم ذره می‌باشد.

همان طور که از شکل معادلهٔ هدایت (۲)، واضح است فاز تابع موج، مسیر حرکت ذرات را مشخص می‌کند، به همین سبب نام موج راهنما برای تابع موج در این فرمول‌بندی مناسب می‌نماید. برای تطبیق با نتایج آماری کوانتوم استاندارد، لازم است که برای مکان اولیهٔ ذرات یک توزیع آماری مناسب در نظر گرفته شود.

اصل سوم: توزیع آماری وضعیت ذرات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (تعادل کوانتومی)

$$\rho = |\psi|^2, \qquad (۴)$$

البته باید دقت داشت که با فرض برقراری معادلهٔ $\rho = |\psi|^2$ در یک لحظه، برقراری آن در تمام لحظات از اصول اول و دوم نتیجه می‌شود. درحقیقت اصل اول ذرات را در مسیرهایی هدایت می‌کند که $|\psi|^2$ به عنوان چگالی احتمال در طول زمان حفظ شود [۵ و۱۲]. همین موضوع باعث سازگاری نتایج آماری این نظریه با کوانتوم استاندارد می‌شود [۵، ۸ و ۹] این خاصیت تابع توزیع $|\psi|^2$ توسط .Dürr همگون وردایی نامیده شده است [۱۲]. البته تلاش شده است که اصل سوم (فرض تعادل کوانتومی) از مفروضات ساده‌تری نتیجه شود. به عنوان مثال تبدیل شدن یک توزیع دلخواه، ρ، به توزیع تعادل کوانتومی، $\rho = |\psi|^2$، مورد مطالعه قرار گرفته است [۲ و ۱۳]. چنین بررسی‌هایی نام «تعادل کوانتومی» را تا حدی موجه ساخته است.

۲. ۲. فرمول‌بندی بوهم (دینامیک مرتبهٔ دوم)

در فرمول‌بندی بوهم، دینامیک علی الاصول مرتبهٔ دوم در نظر گرفته می‌شود به این معنی که معادلهٔ حرکت ذرات، مانند مکانیک کلاسیک، مرتبهٔ دوم می‌باشد [۱-۴].

اصل اول : معادلهٔ حرکت ذرات (معادلهٔ بوهم)

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}(U+Q), \qquad (۵)$$

اصل دوم : معادلهٔ تحول زمانی تابع موج (معادلهٔ شرودینگر)

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi \qquad (۶)$$

برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد باید اصل زیر نیز به نظریه اضافه شود:

اصل سوم : تعادل کوانتومی مرتبهٔ دوم توزیع سرعت و مکان اولیه ذرات به صورت زیر به تابع موج مربوط می‌باشد :

Archive of SID

www.SID.ir

$$f_B(x,v) = R^2\,\delta(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x})\,, \qquad (۷)$$

این تابع توزیع،که آن را تابع توزیع بوهمی می‌نامیم، با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار می‌باشد، زیرا:

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} f_B(x,v)\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} R^2\,\delta\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)dv = R^2 = |\psi|^2\,, \qquad (۸)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (v\,f_B(x,v))\,dv = R^2\,(\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right), \qquad (۹)$$

البته باید دقت داشت که این اصول به‌طور کامل از هم مستقل نیستند. درحقیقت با فرض اصل سوم برای یک لحظه، درستی این اصل برای تمام لحظات از دو اصل دیگر نتیجه می‌شود همگون وردایی (باید توجه داشت که در فرمول‌بندی مرتبهٔ دوم مکانیک بوهمی، وضعیت آماری اولیهٔ ذرات با یک توزیع مکان- سرعت مشخص می‌شود. در نتیجه اصل سوم در این رهیافت مشابه اصل تعادل کوانتومی (اصل سوم) در رهیافت کمینه است. همچنین دقت کنید که در رهیافت مرتبهٔ دوم، معادلهٔ هدایت به عنوان شرایط اولیه آماری در تابع توزیع بوهمی (تعادل کوانتومی مرتبهٔ دوم) لحاظ شده است. در حالی‌که در رهیافت مرتبهٔ اول معادلهٔ هدایت به عنوان قانون حرکت در نظر گرفته شده است). همچنین از فرض برقراری اصل سوم و بااستفاده از معادلهٔ شرودینگر (اصل دوم) می‌توان شکل نیروی کوانتومی (اصل اول) را به‌دست آورد [۴].

۳. معرفی مدل جدید

در این قسمت قصد داریم یک نظریهٔ جدید برای توصیف ذرات زیر اتمی معرفی نماییم. در این مدل نیز مانند مدل بوهم سیستم کوانتومی هم از ذره و هم از میدان ψ تشکیل شده است و ذرات برروی مسیرهایی خوش تعریف حرکت می‌کنند. همچنین یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم برای تحول مکان ذرات داده شده است. درنتیجه حالت سیستم با (x,v,ψ) مشخص می‌شود که در آن ψ تابع موج سیستم و v,x به ترتیب مکان و سرعت ذره را مشخص می‌کنند. ابتدا اصول نظریه را بیان می‌کنیم:

اصل اول : معادلهٔ حرکت ذرات

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{\partial}{\partial x}(U+Q-m\mu\ln R)+S_{xx}(v-\frac{S_x}{m})\,, \qquad (۱۰)$$

که در معادلهٔ فوق Q همان پتانسیل کوانتومی در نظریهٔ بوهم یعنی $\frac{-\hbar^2}{2mR}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ می‌باشد. همچنین نمادهای S_x و S_{xx} به ترتیب به معنی $\frac{\partial S}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ به‌کار رفته‌اند. معادلهٔ (۱۰) را به صورت معادل زیر نیز می‌توان نوشت :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{\partial}{\partial x}(U)+F_Q(x,v) \qquad (۱۱)$$

که در عبارت بالا، نیروی کوانتومی F_Q، به صورت زیر برحسب تابع موج معرفی می‌شود :

$$F_Q = -\frac{\partial}{\partial x}[\frac{-\hbar^2}{2m|\psi|}\frac{\partial^2|\psi|}{\partial x^2}-m\mu\ln(|\psi|) - \frac{\hbar^2}{8m|\psi|^4}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x})^2] + \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\hbar}{2i|\psi|^2}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x})].v. \qquad (۱۲)$$

در اینجا نیز مانند نظریهٔ بوهم، در معادلهٔ حرکت ذرات یک نیروی کوانتومی وابسته به تابع موج وجود دارد، درنتیجه برای بسته شدن دستگاه معادلات، برای بررسی تحول زمانی سیستم، لازم است که معادله‌ای نیز برای تحول زمانی تابع موج داده شود.

اصل دوم : معادلهٔ تحول تابع موج (معادلهٔ شرودینگر)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U(x)\psi\,. \qquad (۱۳)$$

در اینجا نیز برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد به فرضی در مورد توزیع آماری وضعیت اولیهٔ ذرات نیاز می‌باشد.

اصل سوم : توزیع آماری مکان- سرعت ذرات با تابع توزیع زیر داده می‌شود:

$$f(x,v) = R^2\,(\mu\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{\mu}(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x})^2)\,. \qquad (۱۴)$$

دقت کنید که این تابع توزیع، مانند تابع توزیع بوهمی(۶)، نتایج آماری یکسانی با مکانیک کوانتومی استاندارد ایجاد می‌کند، زیرا

Archive of SID

www.SID.ir

$$\rho(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dv$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^{2}}{(\mu\pi)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}\right)dv \qquad (15)$$
$$=|\psi|^{2},$$
$$J(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} v\,f(x,v)\,dv$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} v\,R^{2}(\mu\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}\right)dv \qquad (16)$$
$$=\frac{R^{2}}{m}\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}-\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

واضح است که تابع توزیع این مدل، از جایگزین کردن یک تابع گوسی با پهنای μ، به جای تابع دلتای موجود در تابع توزیع بوهمی به‌دست آمده است .

اصل سوم در مدل ما، مشابه اصل تعادل کوانتومی (در رهیافت کمینه مکانیک بوهمی) می‌باشد. با این تفاوت که چون در رهیافت کمینه، دینامیک مرتبهٔ اول فرض شده است پس شرایط اولیهٔ آماری، با یک تابع توزیع مکان مشخص می‌شود ولی در اینجا به خاطر مرتبهٔ دوم بودن دینامیک، شرایط اولیه با یک تابع توزیع توأم مکان – سرعت مشخص می‌شود. در اینجا نیز باید دقت داشت که با فرض درستی اصل سوم برای یک لحظه، درستی این اصل برای تمام لحظات از دو اصل اول نتیجه می‌شود (همگون وردایی). دقت کنید که با توجه به این که تابع توزیع (۱۴) با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار است لذا برقراری این تابع توزیع در تمام زمان‌ها، سازگاری مدل جدید با تعبیر احتمالاتی تابع موج را تضمین خواهد کرد.

۳. ۱. اثبات همگون وردایی در مدل جدید

ابتدا همگون وردایی را برای بازه‌های زمانی بینهایت کوچک اثبات می‌کنیم. برای این منظور یادآوری می‌کنیم که قانون دوم نیوتن با در نظر گرفتن نیروی وابسته به سرعت، به معادلهٔ زیر برای تحول زمانی تابع توزیع منجر می‌شود : (معادلهٔ لیوویل)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial(Ff)}{\partial v}=0 \qquad (17)$$

لذا تغییرات زمانی تابع توزیع برای بازهٔ زمانی بینهایت کوچک dt به صورت زیر می‌باشد

$$f(x,v;t_{0}+dt)=f(x,v;t_{0})+\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_{0}}dt\,, \qquad (18)$$

$$f\left(x,v;t_{0}+dt\right)=f\left(x,v;t_{0}\right)-\left.\left(v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial\left(Ff\right)}{\partial v}\right)\right|_{t_{0}}dt\,. \qquad (19)$$

حال با درنظر گرفتن اصل سوم برای لحظهٔ t_{0} داریم:

$$f(x,v;t_{0})=\frac{R^{2}\left(x,t_{0}\right)}{(\mu\pi)^{1/2}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S(x,t_{0})}{\partial x}\right)^{2}\right) \qquad (20)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۱۰) و (۲۰)، خواهیم داشت:

$$\left.\left(v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial(Ff)}{\partial v}\right)\right|_{t_{0}}=$$
$$\frac{1}{(\mu\pi)^{1/2}}\left((A)+\frac{2R^{2}}{m\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}\right)\Bigg|_{t_{0}} \qquad (21)$$

که در عبارت فوق A و B به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A:=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^{2}}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right), \qquad (22)$$

$$B:=-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}-U(x)+\frac{\hbar^{2}}{2mR}\frac{\partial^{2}R}{\partial x^{2}}\,. \qquad (23)$$

همان‌طور که می‌دانیم جایگذاری شکل قطبی تابع موج (۱) در معادله شرودینگر (اصل دوم) به معادلات زیر برای تحول زمانی R و S منجر می‌شود

$$\frac{\partial R^{2}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^{2}}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right), \qquad (24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}-U(x)+\frac{\hbar^{2}}{2mR}\frac{\partial^{2}R}{\partial x^{2}}\,. \qquad (25)$$

از مقایسهٔ معادلات (۲۴) و (۲۵) با معادلات (۲۲) و (۲۳)، واضح است که:

$$A=\frac{\partial R^{2}}{\partial t}, \qquad (26)$$

$$A=\frac{\partial R^{2}}{\partial t}. \qquad (27)$$

با جایگذاری عبارت‌های (۲۶) و (۲۷) در معادلهٔ (۲۱) خواهیم داشت:

Archive of SID

www.SID.ir

$$\left.(v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial(Ff)}{\partial v})\right|_{t_0}=$$
$$\frac{1}{(\mu\pi)^{1/2}}\left(\left(\frac{\partial R^2}{\partial t}\right)+\frac{2R^2}{m\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right)\Bigg|_{t_0} \quad (28)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R^2(x,t)}{(\mu\pi)^{1/2}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2\right)\right)\Bigg|_{t_0},$$

با جایگذاری معادلات (۲۸) و (۲۰) در معادلهٔ (۱۹) خواهیم داشت:

$$f(x,v;t_0+dt)=\frac{R^2(x,t_0)}{(\mu\pi)^{1/2}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S(x,t_0)}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R^2(x,t)}{(\mu\pi)^{1/2}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2\right)\right)\Bigg|_{t_0}dt, \quad (29)$$

در نتیجه

$$f(x,v;t_0+dt)=\frac{R^2(x,t_0+dt)}{(\mu\pi)^{1/2}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S(x,t_0+dt)}{\partial x}\right)^2\right), \quad (30)$$

که همگون وردایی را برای یک بازهٔ زمانی بینهایت کوچک اثبات می‌کند. برای اثبات همگون وردایی برای یک بازهٔ زمانی محدود Δt، کافی است که بازهٔ زمانی Δt را به بازه‌های زمانی کوچک تقسیم کنیم و استدلال فوق را در مورد هرکدام از آن بازه‌ها به‌کار بریم. با به سمت صفر میل دادن زیر بازه‌ها، استدلال دقیق خواهد شد و همگون وردایی در حالت عمومی اثبات می‌شود. در بخش بعد با فرض اصل سوم برای تمام لحظات با استفاده از معادلهٔ شرودینگر شکل نیروی مدل جدید، رابطهٔ (۹) را استخراج می‌کنیم با این کار در حقیقت همگون وردایی مدل با روشی دیگر نیز ثابت شده است.

۳. ۲. استخراج شکل نیروي کوانتومي جدید

دراین بخش می‌خواهیم نیرویی را بیابیم که معادلهٔ لیوویل براساس آن، به همگون وردایی تابع توزیع (۱۳) منجر شود. در حقیقت با معلوم گرفتن تابع توزیع و در نظر گرفتن نیرو به عنوان مجهول در معادلهٔ لیوویل، به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی برای نیرو می‌رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial(Ff)}{\partial v}=0. \quad (31)$$

حل عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$F(x,v)=-\frac{m}{f}\left[\int\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}dv+C(x,t)\right], \quad (32)$$

که در آن $C(x,t)$ یک تابع دلخواه می‌باشد. با جایگذاری فرم تابع توزیع برحسب تابع موج خواهیم داشت:

$$F=-\frac{m}{f}\left[\int\frac{\exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right)}{\sqrt{\pi\mu}}\left(\frac{\partial R^2}{\partial x}+\frac{\partial R^2}{\partial t}-\frac{2R^2}{m\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+v\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\right)dv+C(x,t)\right]. \quad (33)$$

حال از آنجا که قصد داریم تحول زمانی تابع توزیع با معادلهٔ شرودینگر، هماهنگ باشد قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial R^2}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^2}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-U(x)+\frac{\hbar^2}{2mR}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}. \quad (35)$$

حال اگر با جایگذاری معادلات (۳۴) و (۳۵) در معادلهٔ (۳۳)، انتگرال موجود در معادلهٔ (۳۳) را محاسبه کنیم، با ساده سازی فراوان خواهیم داشت:

$$F(x,v)=-\frac{\partial}{\partial x}(U+Q-m\mu\ln R)+S_{xx}\left(v-\frac{S_x}{m}\right)-\frac{m}{f}C(x,t). \quad (36)$$

با توجه به دلخواه بودن تابع $C(x,t)$، برای سادگی آن را برابر با صفر می‌گیریم و در نتیجه به شکل نیروی داده شده در نظریهٔ خودمان می‌رسیم:

$$F(x,v)=-\frac{\partial}{\partial x}(U+Q-m\mu\ln R)+S_{xx}\left(v-\frac{S_x}{m}\right) \quad (37)$$

در حقیقت ما در این قسمت نیرویی متناظر با تابع توزیع $f(x,v)$ یافتیم به طوری‌که تحول زمانی تابع توزیع با تعبیر

Archive of SID

www.SID.ir

احتمالاتی معادلهٔ شرودینگر هماهنگ باشد و با این روش یک نظریهٔ معادل با کوانتوم استاندارد و مبتنی بر مسیر ایجاد کرده‌ایم.

۳. ۳. بحث پیرامون $C(x,t)$

در فرآیند به دست آوردن فرم نیرو، روشن است که نیرو به هیچ وجه به طور یکتا از مفروضات ذکر شده، به‌دست نمی‌آید. بلکه به اندازهٔ یک تابع دلخواه جمعی $C(x,t)$ آزادی در تعریف نیرو وجود دارد به طوری که همه این نیروها به همگون وردایی تابع توزیع (۱۴) منجر می‌شوند:

$$F(x,v)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(U+Q-m\mu\ln R\right)+S_{xx}\left(v-\frac{S_x}{m}\right)-\frac{\sqrt{\mu\pi}\ m}{R^{2}\ \exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2}\right)}C(x,t). \qquad (۳۸)$$

واضح است که ساده‌ترین شکل نیرو همان شکلی است که در این مقاله به عنوان نیرو معرفی شده است (معادلهٔ (۹)). هرچند همهٔ نیروهایی که به شکل معادلهٔ (۳۸) می‌باشند، همگون‌وردایی تابع توزیع (۱۴) را حفظ می‌کنند، این خود با توجه به نظریهٔ علّی اندازه‌گیری [۱، ۴ و ۷] سازگاری کامل با نتایج آماری کوانتوم استاندارد را تضمین می‌کند. ولی این موضوع به این معنی نیست که تمام انتخاب‌های ممکن برای $C(x,t)$ به توصیف واقعگرایانه مناسبی برای توصیف جهان میکروسکوپی منجر می‌شود. لذا در تعیین یک نیروی منحصر به فرد لازم است که شرایط فیزیکی مانند تقارن‌ها و آزمایش را نیز دخیل نمود (بخش‌های ۳-۴ و ۴-۱ و۴-۲ از همین مقاله را ببینید). اما فعلاً هدف ما در این مقاله این است که نشان دهیم مدلی که با انتخاب $C(x,t)=0$ به‌دست می‌آید از بسیاری جهات نظریهٔ موجهی می‌باشد. با این حال باید توجه داشت که به کمک این آزادی در تعریف نیرو، احتمالاً می‌توان نظریه‌هایی با مشخصات نظری مناسب تری ایجاد کرد و برخی از مشکلات ایجاد یک نظریهٔ علّی کاملاً مناسب را از میان برداشت.

۴. مقایسهٔ بین مکانیک بوهمی و مدل جدید

در نظریهٔ بوهم سرعت ذرات در هر نقطه از فضا برابر $\frac{S_x}{m}$ می‌باشد. در مدل ما، سرعت ذره در هرنقطه با یک توزیع گوسی (با پهنای μ) داده شده است و $\frac{S_x}{m}$ تنها سرعت متوسط را در هر نقطه مشخص می‌کند. باید توجه داشت که با به سمت صفر میل دادن μ، به مفروضات نظریهٔ بوهم می‌رسیم (این موضوع را در بخش بعد با جزییات بیشتری بررسی می‌نماییم).

برای به‌دست آوردن یک تصویر شهودی از تمایز مدل ما با نظریهٔ بوهم، تمثیل زیر می‌تواند بسیار سودمند باشد. هر چند که نباید این تمثیل را بیش از اندازهٔ اعتبار آن، به‌کار برد.

نسبت مدل ما با نظریهٔ بوهم مانند نسبت نظریهٔ جنبشی با نظریهٔ سیالی در توصیف پلاسما می‌باشد. در نظریهٔ جنبشی در هر نقطه از فضا ذرات می‌توانند سرعت‌های گوناگونی داشته باشند. در حالی که در توصیف سیالی برای هر نقطه از سیال یک سرعت در نظر گرفته می‌شود و آن سرعت همان سرعت متوسطی است که از نظریهٔ جنبشی برای آن نقطه به دست می‌آید.

تفاوت نظریهٔ ما با مکانیک دوبروی- بوهم این است که با توجه به معین بودن سرعت در هرنقطه از فضا در نظریهٔ بوهم، مکانیک بوهمی (رهیافت کمینه)، یک نظریهٔ مرتبهٔ اول می‌باشد و مسیر حرکت ذرات با توجه به مکان اولیهٔ آنها به کمک خطوط میدان سرعت مشخص می‌شود، در حالی که مدل ما از ابتدا یک نظریهٔ مرتبهٔ دوم می‌باشد و مسیرهای ذرات با توجه به مکان و سرعت اولیهٔ آنها معین می‌شود.

مسیرهای ذرات در مدل ما با مکانیک بوهمی متفاوت می‌باشند، همچنین نیروی کوانتومی در این نظریه با مکانیک بوهمی متفاوت است، مخصوصاً که در این مدل نیرو به صورت تابعی از مکان و سرعت ذرات داده شده است در حالی که در مکانیک بوهمی نیرو تنها به صورت تابعی از مکان مشخص شده است.

با همه این تفاوت‌ها، مدل ما و نظریهٔ بوهم نتایج آماری یکسانی را با کوانتوم استاندارد ایجاد می‌کنند. مثلاً در محاسبهٔ سطح مقطع پراکندگی، از آنجا که تنها چگالی جریان احتمال به کار می‌رود و با توجه به اینکه چگالی جریان احتمال و تحول زمانی آن در نظریهٔ ما به‌طور یکسان با مکانیک کوانتومی استاندارد داده می‌شود، در نتیجه در محاسبهٔ سطح مقطع پراکندگی تمایزی بین نظریهٔ ما و مکانیک بوهمی و کوانتوم استاندارد وجود ندارد البته

Archive of SID

www.SID.ir

مواردی وجود دارد که احتمالا به کمک آنها می‌توان بین نظریه ما و کوانتوم بوهمی در آزمایشگاه تمایز گذاشت. برخی از چنین مواردی را در بخش ۳. ۴ بررسی می‌کنیم.

۴. ۱. حد بوهمی

همان طور که قبلاً هم تذکر دادیم مدل ما در حد $\mu \to 0$ به نظریهٔ بوهم تبدیل می‌شود. برای اثبات این موضوع کافی است دقت کنیم که در حد $\mu \to 0$، تابع توزیع نظریهٔ ما به تابع توزیع بوهمی تبدیل می‌شود:

$$f(x,v) = R^2 (\mu\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v - \frac{S_x}{m}\right)^2\right) \to R^2 \delta\left(v - \frac{S_x}{m}\right). \quad (۳۹)$$

این تابع توزیع به طور ضمنی معادلهٔ هدایت و فرض تعادل کوانتومی را در بردارد. همچنین با جایگذاری $v = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}$ و به سمت صفر میل دادن μ ، نیروی داده شده در نظریهٔ ما به نیروی کوانتومی در مکانیک بوهمی میل می‌کند:

$$\lim_{\mu\to 0}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(U + Q - m\mu \ln R\right) + S_{xx}\left(v - \frac{S_x}{m}\right)\right]_{v=\frac{S_x}{m}} = -\frac{\partial}{\partial x}(U+Q). \quad (۴۰)$$

توضیحات اخیر نشان می‌دهد که در حد $\mu \to 0$ نظریهٔ ما با نظریهٔ بوهم یکسان خواهد شد.

قبلاً توضیح دادیم که سرعت بوهمی ذره در هرنقطه از فضا، برابر سرعت متوسط در مدل ما برای آن نقطه می‌باشد. اکنون متوسط نیرو در یک نقطه از فضا در این مدل را با نیروی داده شده در نظریهٔ بوهم مقایسه می‌کنیم.

متوسط نیرو در هر نقطه را با نماد $\bar{F}(x)$ نمایش می‌دهیم:

$$\bar{F}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x,v) f(x,v)\, dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\, dv} = -\frac{\partial}{\partial x}(U + Q - m\mu \ln R). \quad (۴۱)$$

همان طورکه از محاسبهٔ بالا نتیجه می‌شود متوسط نیرو در مدل ما با نیرو در نظریهٔ بوهم به اندازهٔ $\frac{\partial}{\partial x}(m\mu \ln R)$ تفاوت دارد. اما دقت کنید که در حد $\mu \to 0$ متوسط نیرو در نظریهٔ ما با نیروی کوانتومی در مکانیک بوهمی برابر خواهد شد. همچنین باید دقت داشت که در حد $\mu \to 0$، دیگر متوسط گیری چندان پر معنی نیست زیرا که در این حد، به ازای هر نقطه از فضا فقط یک سرعت وجود دارد و متوسط نیرو، به ازای سرعت‌های مختلف در یک نقطه، با همان نیرو در آن نقطهٔ یکسان می‌باشد. تحلیل اخیر نیز به زبانی دیگر تبدیل شدن نظریه ما به مکانیک بوهمی درحد $\mu \to 0$ را نتیجه می‌دهد.

۴. ۲. حد کلاسیك نظریه (قضیهٔ اهرنفست)

هر چند که بررسی حد کلاسیک مدل ما (مانند مکانیک بوهمی) نیاز به بحثی طولانی دارد ولی فعلاً به عنوان یک مقدمه قصد داریم درستی قضیهٔ اهرنفست را در این قسمت بررسی نماییم. برای این منظور با متوسط‌گیری از معادلهٔ حرکت شروع می‌کنیم:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\,p}{d\,t}\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle + \langle F_Q\rangle, \quad (۴۲)$$

$$\langle F_Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v) F_Q(x,v)\, dx\, dv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R^2 (\mu\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(v - \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right) \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - m\mu \ln R\right) + S_{xx}\left(v - \frac{S_x}{m}\right)\right] dx\, dv \quad (۴۳)$$

$$\Rightarrow \langle F_Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^2\left[-\frac{d}{dx}(Q - m\mu \ln R)\right] dx = R^2\left(Q - m\mu \ln R\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2RR_x\left(-\frac{\hbar^2 R_{xx}}{2mR} - m\mu \ln R\right) dx, \quad (۴۴)$$

$$\langle F_Q\rangle = \frac{-\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(R_x)^2\, dx - 2m\mu\left[-\frac{R^2}{2}\ln R\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(R^2\right) dx\right] = 0. \quad (۴۵)$$

در نتیجه خواهیم داشت (قضیهٔ اهرنفست):

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle. \quad (۴۶)$$

Archive of SID

www.SID.ir

۴. ۳. تمایز بین مکانیك بوهمي و مدل جدید: زمان در مکانیـك کوانتومي - زمان تونل زني

کمیت زمان در بین سایر کمیت‌ها در کوانتوم استاندارد وضعیت متفاوتی دارد. هرچند که برای کمیت‌هـای مختلـف در کوانتـوم استاندارد یک عملگر در نظر گرفته می‌شود و محاسبات مربـوط به آن کمیت بر اساس آن عملگر انجام می‌شـود، ولـی زمـان در این نظریه همچنان یک پارامتر بـاقی مانـده اسـت. در حقیقـت پائولی در قضیه‌ای ثابت کرده است کـه بـرای سـاختن عملگـر مناسبی برای زمان محدودیت‌های زیادی وجود دارد.

با این حال کمیت‌های زمانی مختلفی در مکانیک کوانتـومی تعریف، فرمول‌بندی و اندازه‌گیری شده‌اند [۱۳]، از جمله: زمـان پارامتری، زمان تونل زنی، زمان تأخیر، زمان اقامـت (اسـکان) و زمان ورود. با همه این اوصاف، تحلیل نظری این کمیت‌ها مورد توافق عمومی نیست و اختلاف نظرهای فراوانی وجود دارد.

در این قسمت ما بر روی زمان تونل زنی تمرکـز مـی‌کنـیم. روش‌های متعددی برای محاسبهٔ زمان تونل زنـی در چـارچوب مکانیک کوانتومی استاندارد پیشنهاد وگسترش داده شده‌اند ولـی این روش‌ها غالباً مورد اعتراض واقع شده‌اند. دلیل برخی از این اعتراض‌ها در نظر گرفتن نوعی مـسیر، بـه طـور ضـمنی، بـرای حرکت ذرات در طول محاسبه می‌باشـد، چیـزی کـه در قالـب مفاهیم کوانتوم کپنهاگی قابل دفاع نیـست. در مـورد روش‌هـای دیگر نیز ابهامات فراوان دیگری وجود دارد.

اما در مکانیک بوهمی وضعیت کاملاً رضایت بخش اسـت. دلیل این امر این است که به سبب در نظـر گـرفتن مـسیرهـای خوش تعریف برای ذرات در مکانیک بوهمی، هیچ گونه ابهامی در محاسبهٔ زمان تونـل زنـی بـه وجـود نمـی‌آیـد. در حقیقـت روش‌های کارایی نیز برای محاسبهٔ زمان تونل زنـی در مکانیـک بوهمی به وجود آمده است .همچنین روش‌های عـددی نیـز در این مورد تا حدی توسعه یافته‌اند و شبیه سازی‌های فراوانی نیز انجام شده است [۱۳].

در نظریه‌ای که در این مقاله معرفی شد نیـز، محاسـبهٔ زمـان تونل بدون ابهام می‌باشد، زیرا که در اینجا نیز مسیرهایی خوش تعریف برای ذرات در نظر گرفته شده است. واضـح اسـت کـه زمان تونل زنی به نوع مسیرهایی که ذرات در طول آنها حرکت می‌کنند بستگی دارد، درنتیجه به دلیل تفاوت مسیرها در نظریـهٔ ما با نظریهٔ بوهم، محاسبهٔ زمان تونل زنی در این نظریهٔ به نتایج متفاوتی با مکانیک بوهمی منجر می‌شود. این موضوع می‌توانـد به عنوان ابزاری برای آزمون تجربـی نظریـهٔ مـا در نظـر گرفتـه شود. به بیان دیگر از آنجا که مسیرهای موجود در مـدل مـا بـه مقدار پارامتر، μ ،بستگی دارد پس زمان تونل زنی نیـز بـه ایـن پارامتر وابسته خواهد شد و با توجه به حد بوهمی نظریهٔ ما، در حد $\mu \to 0$ به نتایج بوهمی برای زمان تونل زنی می‌رسیم. پس با مقایسهٔ نتایج تجربی با محاسبات نظری می‌توان تخمینی برای مقدار پارامتر μ به‌دست آورد. در این دیدگاه مـی‌تـوان نظریـهٔ ارائه شده در این مقاله را بـه عنـوان یـک نظریـهٔ آزمـون بـرای مکانیک بوهمی تلقی کرد که معادلهٔ هدایت را می‌آزماید به ایـن معنا که هرچقدر پـارامتر μ نزدیکتـر بـه صـفر بـه‌دسـت آیـد برقراری معادلهٔ هدایت با دقت بیشتری آزموده شده است. البتـه باید دقت داشت که به علت در نظر نگرفتن برهم‌کنش ساعت با سیستم، زمان محاسبه شده زمان ذاتی خواهد بود که در صورتی قابـل مقایـسه بـا نتـایج آزمایـشگاهی مـی باشـد کـه بتـوان از برهم‌کنش ساعت با سیستم صرف نظر نمود.

۵. تقارن‌هاي فضا زماني

در این قسمت قصد داریم تقارن‌های فـضا- زمـانی مـدل ارائـه شده در این مقاله را مورد بررسی قرار دهیم. چنین بررسی‌هـایی از لحاظ بنیادی اهمیت ویژه‌ای دارنـد و بـه اسـتحکام سـاختار نظری ارائه شده می‌افزاید.

۵. ۱. ناوردایي گالیله‌اي

دو چارچوب لخـت باسـرعت نـسبی μ را در یـک بعـد نظـر بگیرید. تبدیلات گالیله‌ای مختصات این دو چارچوب را به هم مربوط می‌نماید:

$$x = x' + ut', \quad t = t'. \qquad (۴۷)$$

برای بررسی ناوردایی گالیله‌ای این مدل جدید ابتدا تبدیل تـابع توزیع را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم کـه $f(x,v)$ توزیـع در دستگاه مختصات اول است و $f'(x',v')$ توزیع در دسـتگاه دوم باشد. با توجه به اینکه اگر ذره در چـارچوب بـدون پـریم

Archive of SID

www.SID.ir

در محدودهٔ x تا $x+dx$ و v تا $v+dv$ باشد، آنگاه در چارچوب پریم دار در محدودهٔ x' تا $x'+dx'$ و v' تا $v'+dv'$ خواهد بود. نتیجه می‌گیریم که احتمال حضور ذره در محدوده x تا $x+dx$ و v تا $v+dv$ در چارچوب اول برابراحتمال حضور ذره در محدودهٔ x' تا $x'+dx'$ و v' تا $v'+dv'$ در چارچوب پریم دار می‌باشد. در نتیجه:

$$f'(x',v')\,dx'\,dv' = f(x,v)\,dx\,dv \ , \qquad (۴۸)$$

$$f'(x',v') = f(x,v)\left|J\right| \ , \qquad (۴۹)$$

که در آن J ژاکوبی تبدیل است. که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= x'+ut' \ , \\ v &= v'+u \ , \end{aligned} \qquad (۵۰)$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x'} & \dfrac{\partial x}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ \ . \qquad (۵۱)$$

در نتیجه با جایگذاری تعاریف در معادلهٔ (۴۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{R'^{۲}(x')}{\sqrt{\pi\mu}}\exp\left(-\frac{\left(v'-\dfrac{S'_{x'}}{m}\right)^{۲}}{\mu}\right) \\ &\qquad = \frac{R^{۲}(x)}{\sqrt{\pi\mu}}\exp\left(-\frac{\left(v-\dfrac{S_x}{m}\right)^{۲}}{\mu}\right). \end{aligned} \qquad (۵۲)$$

در نتیجه داریم:

$$R'(x') = R(x) \ , \qquad (۵۳)$$

$$S'_{x'}(x') = S_x(x) - mu \ , \qquad (۵۴)$$

$$\Rightarrow S'_{x'x'}(x') = S_{xx}(x) \ . \qquad (۵۵)$$

اکنون نشان می‌دهیم که معادلهٔ حرکت ذرات تحت تبدیلات گالیله ناوردا می‌باشد:

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(U+Q-m\mu\ln R\right) + S_{xx}\left(v-\frac{S_x}{m}\right), \qquad (۵۶)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{۲}x'}{dt'^{۲}} &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(U'+Q'-m\mu\ln R'\right) \\ &\quad + S'_{x'x}\left((v'+u)-\frac{S'_{x'}+mu}{m}\right), \end{aligned} \qquad (۵۷)$$

$$\frac{d^{۲}x'}{dt'^{۲}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(U'+Q'-m\mu\ln R'\right) + S'_{xx}\left(v'-\frac{S'_x}{m}\right). \qquad (۵۸)$$

تبدیلاتی که برای S و R به‌دست آوردیم معادلهٔ شرودینگر را نیز ناوردا نگه می‌دارد. البته باید توجه داشت که می‌توانستیم فرآیند معکوسی را نیز (برای اثبات ناوردایی گالیله‌ای) به کار بریم. به این معنی که از فرض ناوردایی گالیله‌ای معادلهٔ شرودینگر شروع کنیم و تبدیلات S و R را به دست بیاوریم سپس ناوردایی معادلهٔ حرکت ذرات و ناوردایی تابع توزیع تحت این تبدیلات را نتیجه‌گیری بنماییم.

۵. ۲. ناوردایی تحت معکوس کردن جهت زمان

تبدیلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} x' &= x \\ t' &= -t \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

همان طور که می‌دانیم شرط ناوردایی معادلهٔ شرودینگر تحت این تبدیل، به تساوی‌های زیر منجر می‌شود [۴]

$$R'(x') = R(x) \ , \qquad (۶۰)$$

$$S'(x') = -S(x) \ . \qquad (۶۱)$$

حال ناوردایی معادلهٔ حرکت ذرات را تحت این تبدیلات بررسی می‌کنیم. از معادلهٔ حرکت در دستگاه بدون پریم شروع می‌کنیم و همه کمیت‌ها را برحسب کمیت‌های دستگاه پریم دار جایگزین می‌نماییم

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(U+Q-m\mu\ln R\right) + S_{xx}\left(v-\frac{S_x}{m}\right), \qquad (۶۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{۲}x'}{dt'^{۲}} &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(U'+Q'-m\mu\ln R'\right) \\ &\quad + \left(-S'_{x'x'}\right)\left(v-\frac{\left(-S'_{x'}\right)}{m}\right) \ , \end{aligned} \qquad (۶۳)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^{۲}x'}{dt'^{۲}} &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(U'+Q'-m\mu\ln R'\right) \\ &\quad + S'_{x'x'}\left(-v-\frac{\left(S'_{x'}\right)}{m}\right). \end{aligned} \qquad (۶۴)$$

اما در تبدیل معکوس زمانی، سرعت به منفی خود تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d^{۲}x'}{dt'^{۲}} &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(U'+Q'-m\mu\ln R'\right) \\ &\quad + S'_{x'x'}\left(v'-\frac{\left(S'_{x'}\right)}{m}\right). \end{aligned} \qquad (۶۵)$$

Archive of SID

www.SID.ir

در نتیجه معادلهٔ حرکت ذرات تحت تبدیل معکوس زمانی ناوردا می‌ماند. همچنین اگر تبدیل تابع توزیع بررسی شود خواهیم دید که تابع توزیع نیز به درستی تبدیل می‌شود:

$$f'(x',v') = f(x,v)\,. \qquad (۶۶)$$

۶. توسعه‌ها و تعمیم‌های مدل جدید

تا این قسمت، تمام محاسبات برای ساده‌ترین سیستم، یعنی تک ذره در یک بعد، انجام شده است. در ادامهٔ مقاله امکان تعمیم مدل جدید به حالت‌های سه بعدی و چند ذره و ... را بررسی می‌نماییم.

۶. ۱. تعمیم مدل به سه بعد

برای بررسی جنبه‌های دیگر، مانند برهم کنش با میدان الکترومغناطیس و یا تداخل دو شکاف، به تعمیم سه بعدی این مدل نیاز داریم. لذا در این قسمت مقاله فرمول‌بندی این نظریه را در سه بعد بیان می‌کنیم.

در حالت سه بعدی معادلهٔ نیروی کوانتومی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\left(U + Q + m\mu \ln R\right) + T.\left(\vec{v} - \frac{\vec{\nabla}S}{m}\right), \qquad (۶۷)$$

که در آن ماتریس T به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$T = \begin{bmatrix} S_{xx} & ۰ & ۰ \\ ۰ & S_{yy} & ۰ \\ ۰ & ۰ & S_{zz} \end{bmatrix}. \qquad (۶۸)$$

ماتریس T را می‌توان به شکل $\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right).(SI)$ نیز در نظر گرفت که در آن I ماتریس واحد یا یکه می‌باشد.

همچنین برای توزیع آماری ذرات، تعمیم سه بعدی معادلهٔ (۱۳) را در نظر می‌گیریم:

$$f\left(\vec{r},\vec{v}\right) = \frac{R^{۲}}{\left(\pi\mu\right)^{\frac{۳}{۲}}} \exp\left[\frac{-۱}{\mu}\left(\vec{v} - \frac{\vec{\nabla}S}{m}\right)^{۲}\right]. \qquad (۶۹)$$

این تابع توزیع نیز با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار می‌باشد یعنی :

$$\rho(\vec{r}) = \int_{all\ over} f\, d^{۳}\vec{v} = R^{۲}\,, \qquad (۷۰)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int_{all\ over} f\,\vec{v}\, d^{۳}\vec{v} = R^{۲}\frac{\vec{\nabla}S}{m}\,. \qquad (۷۱)$$

در حالت سه بعدی طبیعتاً برای تحول زمانی تابع موج معادلهٔ شرودینگر سه بعدی در نظر گرفته می‌شود

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}\psi + U\psi\,. \qquad (۷۲)$$

در اینجا نیز با به‌کار بردن شکل قطبی تابع موج به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial R^{۲}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\frac{R^{۲}}{m}\vec{\nabla}S\right) = ۰\,, \qquad (۷۳)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{\nabla^{۲}R}{R} + U + \frac{۱}{۲m}\left(\vec{\nabla}S\right)^{۲} = ۰\,. \qquad (۷۴)$$

با استفاده از معادلات (۷۳) و (۷۴) و معادلهٔ لیویل سه بعدی

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{\nabla}_{\vec{v}}.\left(\frac{\vec{F}}{m} f\right) = ۰\,. \qquad (۷۵)$$

به روشی مشابه با حالت تک بعدی، می‌توان همگون‌وردایی تابع توزیع (۶۹) را اثبات نمود.

۶. ۲. برهم کنش با میدان الکترومغناطیس

در این قسمت مقاله به تعمیم نظری برای ذره در یک میدان الکترومغناطیس خارجی می‌پردازیم و ناوردایی پیمانه‌ای نظریهٔ خود را می‌آزماییم. فرض کنید حالت میدان خارجی با پتانسیل‌های $\vec{A}\,,\,\varphi$ داده شده است که بنا بر تعریف به صورت زیر به میدان‌ها مربوط می‌باشند:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,,$$
$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,. \qquad (۷۶)$$

در کوانتوم استاندارد برای توصیف ذره در میدان الکترومغناطیس خارجی از معادلهٔ شرودینگر زیر استفاده می‌شود:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{\frac{-\hbar^{۲}}{۲m}\left[\nabla - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\vec{A}\right]^{۲} + e\varphi\right\}\psi\,, \qquad (۷۷)$$

که با در نظر گرفتن شکل قطبی تابع موج و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم :

$$\frac{\partial R^{۲}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\frac{R^{۲}}{m}\left[\vec{\nabla}S - e\vec{A}\right]\right) = ۰\,, \qquad (۷۸)$$

Archive of SID

www.SID.ir

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}+e\varphi+\frac{1}{2m}\left[\vec{\nabla}S-e\vec{A}\right]^2=0. \qquad (۷۹)$$

همچنین چگالی احتمال مکان و چگالی جریان احتمال به‌صورت زیر داده می‌شود :

$$\rho=|\psi|^2=R^2, \qquad (۸۰)$$

$$\vec{J}=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi-(\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right]-\left(\frac{eR^2}{mc}\right)\vec{A} =\frac{R^2}{m}\left[\vec{\nabla}S-\left(\frac{e}{c}\right)\vec{A}\right]^2. \qquad (۸۱)$$

ملاحظات اخیر نشان می‌دهد که برای بازنویسی مدل ما، در حضور میدان الکترومغناطیس تنها لازم است که ∇S را با $\overrightarrow{\nabla S}-\frac{e}{c}\vec{A}$ در معادلات (۶۷) و (۶۸) و (۶۹) جایگزین نماییم. در نتیجه شکل تابع توزیع به صورت زیر در می‌آید:

$$f\left(\vec{r},\vec{v}\right)=\frac{R^2}{(\pi\mu)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\frac{-1}{\mu}\left(\vec{v}-\left(\frac{\overrightarrow{\nabla S}}{m}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)^2\right). \qquad (۸۲)$$

دقت کنید که این تابع توزیع، مانند موارد قبل به نتایج آماری یکسانی با تعبیر استاندارد منجر می‌شود، یعنی:

$$\int_{all\ over} f\,d^3\vec{v}=R^2 \qquad (۸۳)$$

$$\int_{all\ over} f\,\vec{v}\,d^3\vec{v}=\frac{R^2}{m}\left[\nabla S-\left(\frac{e}{c}\right)\vec{A}\right] \qquad (۸۴)$$

همچنین برای هماهنگی با تعبیر احتمالاتی معادلهٔ شرودینگر، لازم است معادلهٔ زیر را برای حرکت ذرات در نظر بگیریم :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\vec{\nabla}\left(Q+\mu\ln R\right)+e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) +T'.\left(\vec{v}-\frac{\overrightarrow{\nabla S}}{m}+\frac{e}{c}\vec{A}\right), \qquad (۸۵)$$

که در آن T' به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T'=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_y}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{bmatrix}. \qquad (۸۶)$$

در عبارت فوق A_x, A_y, A_z مولفه‌های دکارتی پتانسیل برداری می‌باشند. دقت کنید که تابع توزیع برای یک حالت، نه تنها به تابع موج وابسته می‌باشد بلکه به شکل پتانسیل برداری نیز بستگی دارد.

۶. ۳. ناوردایی پیمانه‌ای

برای یک میدان معین داده شده می‌توان پتانسیل‌های مختلفی را به‌کار برد. همان‌طور که می‌دانیم اگر پتانسیل‌های $\vec{A}\,,\varphi$ توصیف کننده یک میدان الکترومغناطیس باشند، پتانسیل‌های $\vec{A}'\,,\varphi'$ که به صورت زیر تعریف شده‌اند، نیز همان میدان را توصیف می‌کنند:

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\chi\,, \qquad (۸۷)$$

$$\varphi'=\varphi-\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\chi}{\partial t}\,, \qquad (۸۸)$$

که در آن $\chi(\vec{r},t)$ یک تابع دلخواه می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم ناوردایی مدل جدید را تحت این تبدیل پیمانه‌ای بررسی کنیم.

بانوشتن معادلهٔ شرودینگر با استفاده از پتانسیل‌های $\vec{A}'\,,\varphi'$ و مقایسهٔ آن با معادله‌ای که برحسب پتانسیل‌های $\vec{A}\,,\varphi$ نوشته شده است (معادلهٔ (۷۷))، ارتباط بین ψ و ψ' مشخص می‌شود:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}=\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\nabla-\left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\vec{A}'\right]^2+e\varphi'\right\}\psi'\,, \qquad (۸۹)$$

$$\psi'=\exp\left(\frac{ie\chi}{c\hbar}\right)\psi\,,$$
$$\Rightarrow\ R'(x,t)=R(x,t), \qquad (۹۰)$$
$$S'(x,t)=S(x,t)+\left(\frac{e}{c}\right)\chi(x,t).$$

در نتیجه با توجه به تبدیل پیمانه‌ای پتانسیل برداری، واضح است که

$$\nabla S'-\left(\frac{e}{c}\right)\vec{A}'=\nabla S-\left(\frac{e}{c}\right)\vec{A}\,. \qquad (۹۱)$$

در نتیجه تابع توزیع تحت تبدیل پیمانه‌ای ناوردا خواهد بود

$$f'(\vec{r},\vec{v})=f(\vec{r},\vec{v})\,, \qquad (۹۲)$$

که این خود نشان می‌دهد که تغییر پیمانه در توصیف آماری سیستم نقشی ندارد، ازجمله اینکه محاسبه چگالی احتمال و چگالی جریان احتمال در هر دو پیمانه به نتایجی یکسان منجر می‌شود.

Archive of SID

www.SID.ir

همچنین از تعریف نیرو با جاگذاری به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که نیرو نیز تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا می‌باشد. در نتیجه تغییر پیمانه در دینامیک ذرات نیز تأثیری نمی‌گذارد. و اثبات ناوردایی پیمانه‌ای نظری کامل می‌شود.

۶. ۴. سیستم بس ذره‌اي

واضح است که بررسی یک تک ذره در یک میدان خارجی تنها یک تقریب است و یک نظریهٔ بنیادی باید بتواند سیستمی بسته از ذرات را با در نظر گرفتن برهم کنش‌های آنها به درستی توصیف نماید. به همین منظور در این قسمت مقاله شکل چند ذره‌ای را فرمول‌بندی می‌کنیم.

سیستمی N ذره‌ای را در نظر بگیرید، برای توصیف کامل این سیستم تابع موجی در فضای پیکربندی در نظر می‌گیریم که در معادلهٔ شرو دینگر صدق می‌کند :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(x_1,...,x_N,y_1,...,y_N,z_1,...,z_N;t\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{-\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2\psi+U\psi\ . \qquad (۹۳)$$

در عبارت فوق ∇_i^2 به معنی $\nabla_i^2=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$ به کار رفته است.

همچنین تحول زمانی مکان ذرات با قانون دوم نیوتن با نیرویی به شکل زیر داده می‌شود :

$$F_i=-\overrightarrow{\nabla_i}\left(U+Q-\mu_i\ln R\right)+\left[\left(\overrightarrow{\nabla_i}\overrightarrow{\nabla_i}\right).\left(S.I\right)\right].\left(\bar{v}_i-\frac{\bar{\nabla}_i S}{m_i}\right) \qquad (۹۴)$$

که در آن Q همان پتانسیل کوانتومی در نظریهٔ چند ذره‌ای بوهم می‌باشد و μ_i ثابت‌های حقیقی مثبتی می‌باشند، که پهنای توزیع سرعت ذرات مختلف را مشخص می‌کنند. البته برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد لازم است تابع توزیع زیر نیز برای وضعیت اولیهٔ ذرات در نظر گرفته شود :

$$f=\frac{1}{\sqrt{\pi^{3N}\prod_{i=1}^{N}\mu_i}}\exp\sum\frac{\left(\bar{v}_i-\frac{1}{m_i}\bar{\nabla}_i S\right)^2}{-\mu_i}\ . \qquad (۹۵)$$

همچنین مانند حالت تک ذره، اگر تابع توزیع فوق برای یک لحظه برقرار باشد، معادلات (۹۳) و (۹۴)، برقراری آن را برای تمام لحظات تضمین می‌کنند. لذا سازگاری با تعبیر احتمالاتی تابع موج تضمین می‌شود.

ناموضعیت : در شکل چند ذره نظریهٔ ما نیز مانند نظریهٔ بوهم، نوعی ناموضعیت وجود دارد. این نکته ازشکل نیروی داده شده در بالا روشن است. زیرا نیروی وارد بر یکی از ذرات در یک لحظه به مکان سایر ذرات در همان لحظه وابسته می‌باشد.

جدایی پذیری : حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن تابع موج به صورت حاصل‌ضربی به شکل زیر باشد

$$\psi=\prod_{i=1}^{n}\psi_i\left(x_i,y_i,z_i\right)\ . \qquad (۹۶)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$R=\prod_{i=1}^{n}R_i\left(x_i,y_i,z_i\right),\qquad S=\sum_{i=1}^{n}S_i\left(x_i,y_i,z_i\right). \qquad (۹۷)$$

همچنین فرض کنید پتانسیل کلاسیک به‌صورت زیر قابل تجزیه باشد

$$U=\sum_{i=1}^{n}U_i\left(x_i,y_i,z_i\right). \qquad (۹۸)$$

در این حالت، ذرات مختلف را می‌توان به‌صورت سیستم‌هایی مستقل و جدا از هم بررسی نمود زیرا که :

اولاً : معادله شرودینگر چند ذره، به معادلهٔ شرودینگر تک ذره در مورد هر یک از ψ_iها تبدیل می‌شود

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{-\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2\psi_i+U_i\psi_i\ . \qquad (۹۹)$$

ثانیاً : نیروی کوانتومی وارد به هر ذره، تنها به تابع موج همان ذره وابسته می‌باشد، و به مکان سایر ذرات وابسته نمی‌باشد:

$$F_i=-\overrightarrow{\nabla_i}\left(U_i+Q_i-\mu_i\ln R_i\right)+\left[\left(\overrightarrow{\nabla_i}\overrightarrow{\nabla_i}\right).\left(S_i.I\right)\right].\left(\bar{v}_i-\frac{\bar{\nabla}_i S_i}{m_i}\right). \qquad (۱۰۰)$$

ثالثاً : تابع توزیع توام مکان- سرعت ذرات به صورت حاصل‌ضرب تابع توزیع هریک ذرات در می‌آید، که مشخصه متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشد:

Archive of SID

www.SID.ir

$$f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\right) = f_1\left(\vec{r}_1,\vec{v}_1\right) f_2\left(\vec{r}_2,\vec{v}_2\right)...f_n\left(\vec{r}_n,\vec{v}_n\right). \quad (۱۰۱)$$

باید دقت داشت که در حالت عمومی که تابع موج به صورت حاصل‌ضربی نیست، چنین جداسازی ممکن نیست و نمی‌توان هر ذره را به صورتی مستقل از سایر ذرات بررسی نمود. باید دقت داشت که وجود چنین همبستگی‌هایی در حالت‌های درهم تنیده برای توضیح مسئله EPR و فرآیند اندازه گیری، ضروری می‌باشد.

همچنین سازوکار چند ذرهٔ ارائه شده در این بخش را به سادگی می‌توان اصلاح کرد تا برای بررسی ذرات یکسان مناسب شود. این فرآیند کاملاً مشابه مکانیک بوهمی می‌باشد و از ذکر آن صرف نظر می‌کنیم [۴].

۶. ۵. نظریه‌هایی که با شکل‌های دیگر تابع توزیع می‌توان ساخت

برای خواننده حتماً این سوال پیش آمده است که آیا شکل خاص تابع توزیع (برحسب تابع موج) نقش یا اهمیت خاصی در تولید چنین نظریه‌هایی دارد؟

البته با کمی دقت روشن می‌شود که بجز چند شرط معقول و ساده که باید تابع توزیع دارا باشد آزادی زیادی در معرفی تابع توزیع وایجاد نظریه‌های علی مشابهی بر مبنای آنها وجود دارد.

در این قسمت بدون آنکه این شرایط محدود کننده را به‌طور صریح و کلی ذکر کنیم یک نمونه دیگر از این نظریه‌ها را به‌طور خلاصه معرفی می‌کنیم تا برای یک بررسی جامع شهود مناسب ایجاد شود.

فرض کنید که متناظر با هر تابع موج تابع توزیع زیر را معرفی کنیم

$$f\left(x,v\right)=\frac{R^2}{\pi.\sqrt{\mu}}\frac{1}{1+\frac{v^2}{\mu}} \quad . \quad (۱۰۲)$$

دقت کنید که این تابع توزیع نیز به نتایج آماری یکسانی با تعبیر احتمالاتی تابع موج منجر می‌شود

$$\rho=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,v\right)dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^2}{\pi.\sqrt{\mu}}\frac{1}{1+\frac{v^2}{\mu}}dv=|\psi|^2, \quad (۱۰۳)$$

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} v\,f(x,v)\,dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^2}{\pi.\sqrt{\mu}}\frac{v}{1+\frac{v^2}{\mu}}dv = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right). \quad (۱۰۴)$$

حال باید یک شکل نیرو مناسب بیابیم که به تحول زمانی یکسانی با معادلهٔ شرودینگر، برای این تابع توزیع منجر شود. با به‌کار بردن معادلهٔ (۳۲) می‌توان فرم نیروی مناسب را به‌دست آورد

$$F(x,v)=-\frac{m}{f}\left[\int\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}dv+C\left(x,t\right)\right]. \quad (۱۰۵)$$

این تابع توزیع اخیر و همچنین نیروی کوانتومی مربوط به آن نیز، در حد $\mu\to 0$ به تابع توزیع بوهمی، و همچنین نیروی بوهمی، منجر می‌شوند.

ما در اینجا برای ساخت تابع توزیع مناسب، بجای استفاده از فرم گوسی تابع دلتا، یکی دیگر از شکل‌های تابع دلتای دیراک، یعنی شکل لورنتسی، را مورد استفاده قرار داده‌ایم. در حالی که می‌توانستیم از شکل‌های دیگری نیز استفاده کنیم که البته به مدل‌های متفاوت دیگری منجر می‌شد. ما در اینجا از بیان جزییات مربوط به شرایط عمومی برای ساخت چنین مدل‌هایی، صرف نظر کرده تنها متذکر می‌شویم که امکانات فراوانی برای توصیف فرآیندهای کوانتومی بر اساس مدل‌های مبتنی بر مسیر وجود دارد و بررسی جامع این موضوع را به یک مقالهٔ مجزا موکول می‌نماییم.

۷. نتیجه‌گیری

مدل ارائه شده در این مقاله را می‌توان توصیفی آماری از مکانیک بوهمی دانست. در حقیقت به کمک این مدل نشان داده شد که امکانات فراوانی برای توصیف سازگار از جهان کوانتومی به کمک نظریه‌های حقیقت‌گرایانه و مبتنی بر مسیر وجود دارد و برای این منظور شکل خاص نیروی کوانتومی بوهم به هیچ وجه الزامی نیست.

Archive of SID

www.SID.ir

مراجع

1. D Bohm, *Phys. Rev*. **85**, 2 (1952) 166.
2. D Bohm, *Phys. Rev*. **89**, 2 (1953) 458.
3. D Bohm, and B J Hiley, *"The Undivided Universe",* London, Routledge (1993).
4. P R Holland, *"The Quantum Theory of Motion",* Cambridge University Press (1993).
5. D Dürr, S Goldstein, R Tumulka, and N Zanghi, "*Bohmian Mechanics*", in the Encyclopedia of Philosophy, Second Edition, edited by D M Borchert, Macmillian Refrence (2006).
6. K Berndl, M Daumer, D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9504010.
7. J Wheeler, "*Quantum Theory and Measurement*", Princeton University Press (1983).
8. M Daumer, D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *Erkennetnis* **45** (1996) 379.
9. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *J. Stat. Phys*. **116** (2004) 959.
10. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9512031.
11. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9511016.
12. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *Stat J. phys*. **67** (1992) 843.
13. C R leavens, The "*tunneling-time problem for electron, Bohmian Mechanics and Quantum theory*", An Appraisal, Dordrecht: Kluwer (1996).

Archive of SID

www.SID.ir