یادداشت پژوهشی

مجلۀ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۲، شمارۀ ۴، زمستان ۱۳۹۱

بررسي تعادل نش با افزايش پارامترهاي سيستم سه ذره‌اي در بازي كوانتومي

هادي گودرزي و سميرا بيرامي

گروه فيزيك، دانشكدۀ علوم، دانشگاه اروميه

پست الكترونيكي: h.goudarzi@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۹/۳۰ ؛ دریافت نسخۀ نهایی: ۱۳۹۱/۶/۴)

چكيده

با استفاده از فرمول‌بندي بازي كوانتومي در سيستم سه ذره‌اي، تعادل نش را با افزودن پارامترهاي عملگر تبديل يكاني در مسئلۀ احتمال رخدادها محاسبه مي‌كنيم. از آنجايي كه درهم‌تنيدگي نقش اساسي در بازي‌هاي كوانتومي ايفا مي‌كند، تأثير آن بر روي حالت‌هاي ايجاد شدۀ تعادل نش مورد بررسي قرار مي‌گيرد. نشان داده مي‌شود كه افزايش پارامترهاي سيستم، نتايج بازي سه ذره‌اي را بهبود مي‌بخشد.

واژه‌هاي كليدي: بازي كوانتومي، درهم‌تنيدگي، تعادل نش، قانون پارتو

۱. مقدمه

نظریۀ بازی مطالعۀ عمل‌ها و عکس‌العمل‌های سیستم‌ها در چهارچوب علوم ریاضی است که توسط قواعد بازی توضیح داده می‌شود. این نظریه در سال ۱۹۳۰ در زمینۀ اقتصاد به وسیلۀ ون نیومن[۱] و مورگنشترن[۲] گسترش یافت [۱ و ۲] و کارهای بسیاری در این زمینه انجام گرفت و در حال حاضر به‌طور منظم در حیطۀ بسیاری از علوم مانند علوم اجتماعی، زیست، فیزیک، سیاست و... به کار می‌رود [۳-۱۴].

نظریۀ بازی به مطالعۀ شرایطی می‌پردازد که دو بازیکن (یا بیشتر) برای دست‌یابی به نتیجۀ بهتر با هم رقابت می‌کنند. فرض شده است بازیکنان منطقی و ملزم به ایجاد راهبرد مبتنی بر منافع شخصی هستند. هرگونه تصمیم‌گیری بازیکنان برای رسیدن به هدفشان مستلزم به کارگیری راهبرد برای آن بازی است. راهبرد از مفاهیم پایه‌ای نظریۀ بازی است. برای یک بازیکن، راهبرد مجموعه‌ای از قواعد است که بدون هیچ ابهامی گزینۀ حرکت شخصی بازیکن را بر اساس موقعیتی که در جریان بازی پیش آمده است، مشخص می‌کند.

اساساً هدف نظریۀ بازی، بررسی رفتار منطقی بازیکنان در موقعیت‌های تعارض‌آمیز، یعنی تعیین راهبرد بهینه برای هریک از بازیکنان جهت دستیابی به نتیجۀ بهتر است. راهبرد بهینه برای بازیکن در نظریۀ بازی، آن راهبرد است که در صورت تکرار، به او اطمینان بدهد که بیشترین مقدار میانگین امکان پذیر به دست می‌آید. استدلال برای انتخاب این راهبرد بر این فرض استوار است که حریف نیز دست کم همان قدر منطقی است که ما هستیم و برای جلوگیری از اینکه ما به هدف خود برسیم، به هر کاری دست می‌زند. نظریۀ بازی در تلاش است شرایطی را

۱. Von Neumann

۲. Morgenstern

که بازیکنان متقابل عمل می‌کنند، به صورت ریاضی‌وار مدلسازی کند. این نظریه شامل دو حرکت مشارکتی و تدافعی است. منظور از بازی تدافعی مدلی است که در آن موقعیت‌ها و مواضع توسط اهمیت دادن به گزینه‌های انتخابی پیش روی بازیکنان، انگیزه و اطلاعات آنها وغیره مشخص می‌شود و تلاش بر این است که حرکت بعدی بازیکنان و چگونگی بازی آنها پیش‌بینی شود. اما در بازی مشارکتی تمرکز بر روی شکل و فرم همکاری‌ها است.

مسئلهٔ زندانی نمونه‌ای از بازی تدافعی است و مسئلهٔ مورد بحث ما می‌باشد. با تعمیم این مسئله به فضای استراتژیک بزرگتر می‌توان به نتیجهٔ بازی مسئلهٔ زندانی رسید [۱۵]. حرکت بازیکنان کاملاً شناخته شده است، یا فرار می‌کنند یا همکاری می‌کنند. نتیجهٔ حاصل تضاد بین تعادل نش[1] و قانون پارتو[2] می‌باشد. تعادل نش، در واقع نتیجهٔ بازی بهینه برای هر بازیکن است که او می‌تواند از طریق تغییر یک‌جانبه در راهبرد خود آن را کسب کند در حالی‌که راهبرد سایر بازیکنان ثابت می‌ماند. اما، قانون پارتو بهترین نتیجهٔ بازی است که بازیکن می‌تواند بدون اشتباه بازیکن دیگرْ به دست آورد [۱۶–۱۸].

میر[3] در کار اولیهٔ خود بر روی نظریهٔ بازی، بازی کوانتومی سادهٔ پنی فیلیپ[4] (سکه) را شرح داد [۱۹و۲۰] که یکی از ساده‌ترین وسیله‌های بازی سیستم دو حالته است. اگر سکه با سیستم کوانتومی دو حالته مانند ذره با اسپین ۱/۲ جایگزین شود، از کلاسیک وارد سیستم کوانتوم می‌شویم. بنجامین[5] و هیدن[6] بازی کوانتومی را برای بیش از دو ذره ارائه دادند [۲۱و۲۲]. آنها نشان دادند که اینگونه بازی‌ها می‌توانند به شکل تعادل کوانتومی ویژه نمایش داده شوند که هیچ مشابهی در کلاسیک ندارد. همچنین در بازی‌های کوانتومی دو نفره کار عمدهٔ آنها بررسی ماکزیمم حالت‌های درهم‌تنیده[7] می‌باشد [۲۳]. درهم‌تنیدگی یک حالت از سیستم کوانتومی مرکب است که به صورت حاصلضرب تانسوری تک حالت‌های سیستم در فضای هیلبرت جدید نوشته شود. برای مثال، حالت یک سیستم مرکب از دو کیوبیت به وسیلهٔ یک بردار در فضای حاصلضرب تانسوری با بردارهای پایهٔ $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ مشخص می‌شود. سیستم کوانتومی همچنین می‌تواند با یک حالت برهم‌نهی به صورت ترکیب خطی از همهٔ حالت‌ها نمایش داده شود. غیر از این حالت‌ها، بعضی حالت‌های کوانتومی وجود دارند که شدیداً همبستهٔ کوانتومی و تفکیک‌ناپذیر می‌باشند و نمی‌توانند به شکل حاصل‌ضرب تانسوری سیستم‌های جزئی نوشته شوند. حالتی از یک سیستم مرکب، که نمی‌تواند به صورت حاصل‌ضرب تانسوری سیستم‌های جزئی نوشته شود، حالت درهم‌تنیده نامیده می‌شود.

در بازی کوانتومی نیز اگر بازیکن نتیجه‌ای که می‌گیرد بر روی نتایج دیگر بازیکنان اثر بگذارد و همبستگی خارج از اراده بازیکنان در نتایج وجود داشته باشد، آنگاه بازی دچار درهم‌تنیدگی می‌شود. بنابراین درهم‌تنیدگی می‌تواند نقش اساسی در بازی کوانتومی ایفا کند.

ایزرت[8] و سایرین درهم‌تنیدگی را برای سیستم دو ذره‌ای محاسبه کرده و بیشترین تعادل نش را در حالت دو و سه پارامتری به دست آورده‌اند [۲۴و۲۵]. همچنین تعادل نش برای سیستم سه ذره‌ای در حالت دو پارامتری محاسبه شده است. در کار حاضر تعادل نش حالت سه پارامتری برای سیستم سه ذره‌ای محاسبه می‌شود ونتایج به دست آمده با حالت دو پارامتری مقایسه می‌گردد.

با استفاده از راهبردهای کلاسیکی اولیه و تبدیل یکانی مربوط به اثر درهم‌تنیدگی کوانتومی، بردارهای پایه به طور دقیق محاسبه می‌شود و سپس توابع نتیجه بر حسب پارامترهای درجهٔ آزادی سیستم سه ذره‌ای به دست می‌آید. در بخش بعدی نتایج بازی بر حسب اتخاذ راهبردهای مختلف ممکن برای هر یک

۱. Nash
۲. Parreto
۳. Meyer
۴. Peny-flip
۵. Benjamin
۶. Hayden
۷. Entanglement
۸. Eisert

جدول ۱. ماتریس نتایج بازیکنان. تعداد ۸ حالت برای بازیکنان وجود دارد که می‌توانند برای رسیدن به نتیجۀ بهتر این راهبردها را انتخاب کنند. شخصیت اول متعلق به آلیس، دومی متعلق بـه بـاب و سـومین شخصیت راهبرد مربوط به کالین است.

Colin	Alice	Bob: C	Bob: D
Colin:C	C	(۳,۳,۳)	(۲,۵, ۲)
Colin:C	D	(۵,۲,۲)	(٤,٤,۰)
Colin:D	C	(۲,۲,۵)	(۰,٤,٤)
Colin:D	D	(٤,۰,٤)	(۱,۱,۱)

از بازیکنان مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نهایتاً نکات حائز اهمیت ساختار مورد مطالعه به عنوان نتیجه‌گیری آورده می‌شود.

۲. نظریه و مدل

در فرمول‌بندی نظریۀ بازی، راهبـردهـا تبـدیل بـه بردارهـایی می‌شوند که در فضای هیلبرت تعریف شده‌اند، به این بردارها حالت‌های مختلف راهبرد مـی‌گـوییم. در اینجـا سیسـتم سـه کیوبیتی را بررسی می‌کنیم که اندازه‌گیری در فضای هیلبرت با استفاده از حاصلضرب تانسوری صورت می‌گیرد. سیستم سـه کیوبیتی را معادل مسئلۀ سه زندانی در نظر می‌گیریم و تعـادل نش را که با افزایش درهم‌تنیدگی، نتایج بازی بازیکنـان را در مقایسه با بازی کلاسیکی تغییر می‌دهد، حسـاب مـی‌کنـیم. در واقع در حالت بازی کوانتومی مشاهده می‌شود که بـا افـزایش درهم‌تنیدگی نتیجۀ تعادل نش هم بهتر می‌شود. با توجه به دو راهبرد فرار و همکاری که بازیکنان انتخاب می‌کنند، هر کـدام از این سه زندانی، سه نتیجۀ متفاوت را به دست خواهند آورد. راهبرد فرار با D[۱] و همکاری با C[۲] نشان داده می‌شوند. تعـداد هشت راهبرد ممکن وجود خواهد داشت کـه بازیکنـان بـرای رسـیدن بـه نتـایج مطلـوب مـی‌تواننـد از آنهـا اسـتفاده کنند.

ماتریس نتایج برای سه ذره بدین صورت در نظر گرفته شده است که سه بازیکن به نام‌های آلیس، بـاب و کـالین زنـدانیانی هستند که اگر هر سه فرار را انتخاب کنند، نتیجۀ ۱ را می‌گیرند. اگر هر سه همکاری کنند نتیجۀ ۳ را به دست خواهند آورد. اگر یکـی از بازیکنـان فـرار را انتخـاب کنـد و دو بـازیکن دیگـر همکاری را ترجیح دهند، برای بازیکن اولی نتیجه ۵ و برای دو بازیکن دیگر ۲ می‌باشد. این شرایط و نتایج متفاوت آن به طـور کامل در جدول ۱ آورده شده است. می‌توان دید که راهبـرد D، راهبرد غالب برای تمام بازیکنان است. در شرایطی از بـازی بـا انتخاب محافظه‌کارانه (DDD) تعادل نـش منحـصر بـه فـرد بـا نتیجه (۱۱۱) حاصل می‌شود. انحراف یـک‌طرفـه از ایـن تعـادل نتیجه را کاهش می‌دهد.

از آنجایی که هر کدام از بازیکنان به طور کامل یک بازیکن منطقی هستند، بازی قطعاً در شرایطی تمام خواهد شد که همـۀ بازیکنان راهبرد D را انتخاب کنند. واضح است انتخاب راهبـرد (DDD) می‌تواند منجر به نتیجۀ (۳۳۳) شود. می‌دانیم در نظریـۀ بازی (CCC) قانون پارتو یک راهبرد مؤثر در بـازی اسـت. امـا دلیل منطقی ایجاب می‌کند بازیکنان راهبرد D را انتخـاب کننـد. بنابراین بازی در (DDD) تمام خواهد شـد. ایـن یـک مثـالی از نتیجۀ بهینه برای زیرسیستم است که نتیجـۀ خـوبی بـرای تمـام سیستم نیست و این یک مشکل در بازی است که باید رفع شود [۲۶].

مدل فیزیکـی بـرای سیـستم سـه ذره‌ای درصـورت اعمـال درهم‌تنیدگی کوانتومی بین سه بازیکن در شـکل ۱ نمـایش داده شده است.

نتایج ممکن از راهبردهای کلاسـیکی همکـاری و فـرار بـه صورت بردارهای پایه $|۱\rangle$ و $|۰\rangle$ در فضای هیلبرت به صـورت حاصل‌ضرب تانسوری محاسبه می‌شوند [۲۷] که بـرای سیـستم سه ذره‌ای به شکل زیر می‌باشد:

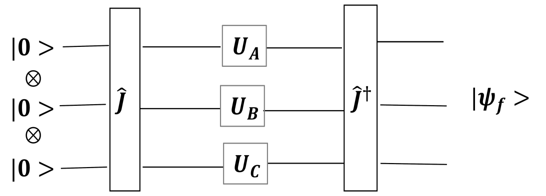
$$|\sigma\rangle|\sigma'\rangle|\sigma''\rangle = |\sigma\sigma'\sigma''\rangle, \qquad \sigma,\sigma',\sigma'' \in \{۰,۱\} \qquad (۱)$$

$$|\psi_i\rangle = \hat{J}|۰۰۰\rangle, \qquad (۲)$$

$\hat{J}$ عملگر درهم‌تنیدگی است که ارتباط کوانتومی با راهبرد منحصر به فرد را بیان می‌کند. عامل $J(\gamma)$ با پارامتر γ تعریف می‌شود که γ درجۀ درهم‌تنیدگی است که افزایش درجۀ درهم‌تنیدگی مستقیماً نتایج بازی راتحت تأثیر قرار می‌دهد و

۱. Defection

۲. Cooperation



شکل ۱. مدل فیزیکی برای بازی کوانتومی سه بازیکنی.

$\gamma \in [0,\pi/2]$. در واقع $J(\gamma)$ کانال ارتباطی بین داده‌های ورودی و خروجی می‌باشد. برای $\gamma=\pi/2$ بیشترین درجهٔ درهم‌تنیدگی را داریم. عملگر درهم‌تنیدگی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat J = \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_x\right) \tag{3}$$

که σ_x ماتریس پائولی است.

از آنجایی که حرکت‌های استراتژیک برای بازیکنان مختلف مستقل است، عملگر هر بازیکن فقط روی کیوبیت خود آن بازیکن عمل می‌کند. بنابراین فضای استراتژیک S باید زیرمجموعه‌ای از گروه یکانی ماتریس ۲×۲ باشد. فضای استراتژیک مشابه سیستم دو حالته و دوران در فضای هیلبرت به صورت SU(۲) درنظر گرفته می‌شود. شکل کلی عملگر تبدیل یکانی در سیستم دو حالته شامل چهار پارامتر است [۲۸] که در حالت دو پارامتری این عملگر برای سه بازیکن با راهبردهای U_A، U_B و U_C را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U(\theta,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \frac{e^{i\alpha}\sin\theta}{2}\\ -\frac{e^{-i\alpha}\sin\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

که $0\le\theta\le\pi$ و $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. $U(0,0)=I$ عملگر همانی مطابق با همکاری است و $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=\hat\sigma_x$ برابر با عملگر بیت-فیلیپ[۱] است که مؤید فرار می‌باشد:

$$F=i\hat\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

اثر کوانتومی بازی ایجاب می‌کند که اندازه‌گیری در دستگاه اشترن- گرلاخ صورت گیرد. از روی شکل ۱ می‌توان دید تابع

۱. bit-flip

حالت نهایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\left|\psi_f\right\rangle &= \left|\psi_f\left(U_A,U_B,U_C\right)\right\rangle\\ &= \hat J^\dagger\left(U_A\otimes U_B\otimes U_C\right)\hat J\left|000\right\rangle,\end{aligned} \tag{6}$$

نتیجهٔ اندازه‌گیری بعد از ارسال کیوبیت‌ها برای آلیس به صورت زیر است و برای باب و کالین هم از روی جدول ۱ قابل محاسبه می‌باشند،

$$\begin{aligned}\$_A &= 5P_{DCC}+4(P_{DDC}+P_{DCD})+3P_{CCC}\\ &\quad +2(P_{CCD}+P_{CDC})+1P_{DDD}+0P_{CDD},\end{aligned} \tag{7}$$

به طوری‌که هر احتمال اتخاذ راهبرد $P_{\sigma\sigma'\sigma''}$ توسط رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$P_{\sigma\sigma'\sigma''}=\left|\left\langle\sigma\sigma'\sigma''\middle|\psi_f\right\rangle\right|^2 \tag{8}$$

بازی در حالت بیشینهٔ درجهٔ درهم‌تنیدگی است. نتایج به دست آمده بازیکنان با استفاده از عملگر یکانی (۴) و رابطهٔ (۷) به شکل زیر قابل بحث می‌باشد:

با توجه به حالت استراتژیک $\$_A\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ برای هر سه بازیکن، این حالت تعادل نش نیست، زیرا در واقع داریم:

$$\begin{aligned}&\$_A\left(U(\theta,\alpha),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &\quad=\sin^2\theta/2\left(1+2\cos^2\alpha\right)\le 3,\end{aligned} \tag{9}$$

می‌توان دید وقتی که باب و کالین راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ را انتخاب می‌کنند، دیگر $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ پاسخ مناسبی برای آلیس نیست و بازیکنان به نتیجهٔ مطلوب دست نمی‌یابند، زیرا داریم:

$$\$_A\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\right)=1, \tag{10}$$

در حالی‌که اگر آلیس از راهبرد $U(\pi,0)$ استفاده کند، هر سه به نتیجه بهتری می‌رسند و می‌توان رابطهٔ زیر را یک تعادل نش در نظر گرفت:

$$\$_A\left(U(\pi,0),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\right)=3. \tag{11}$$

از طرف دیگر، اگر باب و کالین به ترتیب از راهبردهای $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ و $U(\pi,0)$ استفاده کنند، آلیس در صورتی برندهٔ بازی

خواهد بود که عملگر همانی را به کار بگیرد. به طوری‌که داریم:

$$\$_A\left(U(\theta,\alpha),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U(\pi,0)\right) = \left(7+3\cos\theta-2\sin^2\theta/2\cos^2\alpha\right)\le 5, \qquad (۱۲)$$

$$\$_A\left(U(0,0),U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),U(\pi,0)\right)=3. \qquad (۱۳)$$

به دلیل تقارن بازی، تعداد هشت تعادل نش (شامل $U(\pi,0)$ و $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$) در بازی تفکیک‌پذیر به دست می‌آید. وقتی هر سه بازیکن راهبرد $U(\pi,0)$ را انتخاب کنند، به بهترین نتیجه می‌رسند که به عنوان تعادل نش می‌باشد:

$$\$_A\left(U(\theta,\alpha),U(\pi,0),U(\pi,0)\right) = \left(1+2\cos^2\alpha\right)\sin^2\theta/2\le 3, \qquad (۱۴)$$

$$\$_{A,B,C}\left(U(\pi,0),U(\pi,0),U(\pi,0)\right)=3. \qquad (۱۵)$$

رابطهٔ (۱۵) نشان می‌دهد هر بازیکن می‌تواند نتیجهٔ بازی را با استفاده از راهبرد $U(\pi,0)$ به نفع خود تمام کند. زیرا این رابطهٔ علاوه بر تعادل نش، خاصیتی از قانون پارتو نیز دارد.

نتایج بالا نشان می‌دهد که انتخاب راهبردهای گوناگون از فضای استراتژیک کوانتومی، بازیکنان را به نتیجهٔ مطلوب می‌رساند. اما از طرف دیگر همان طور که اشاره شد دلیل منطقی ایجاب می‌کند که بازیکنان راهبرد فرار (D) را انتخاب کنند. نتیجه‌ای که با توجه به رابطهٔ (۱۰) با انتخاب راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ برای بازیکنان حاصل شد، نشان دهندهٔ این مطلب است که بازیکنان با این راهبرد به نتیجهٔ دلخواه نمی‌رسند. حال برای اینکه بازیکنان بتوانند با راهبرد (D) به بهترین نتیجه از لحاظ منطق بازی برسند نیاز به تغییر در سیستم عملکرد آنها وجود دارد. این تغییر را در عملگر تبدیل یکانی اعمال می‌کنیم. بدین صورت که پارامتر سوم را به سیستم اضافه کرده و با استفاده از راهبردهای بازیکنان نتایج حاصله را بررسی می‌کنیم.

با افزایش پارامتر سوم (β) عملگر به شکل زیر انتخاب می‌شود:

$$U(\theta,\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i\beta}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\beta}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\alpha}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \qquad (۱۶)$$

که $-\pi\le\alpha,\beta\le\pi$ و $0\le\theta\le\pi$ است. شکل بردارهای پایه و تابع بردار نهایی مانند حالت دو پارامتری برابر با رابطهٔ (۶) است. اینجا نیز درهم‌تنیدگی بسیار مهم است و عملگر آن به شکل معادلهٔ (۳) می‌باشد. در حالت سه پارامتری همگرا $(\gamma=0)$، بازی تفیک‌پذیر می‌شود و بازی کوانتومی تفکیک‌پذیر هیچ مزیت کوانتومی را نشان نمی‌دهد. افزایش درهم‌تنیدگی موجب افزایش نتیجهٔ بازی از حالت اولیه می‌شود. سه ذره اطلاعات خود را برای اندازه‌گیری نهایی نتایج، از طریق عملگر یکانی معرفی شده ارسال می‌کنند. در اینجا نیز نتیجهٔ اندازه‌گیری برای ذرهٔ اول(A) از معادلهٔ (۷) محاسبه می‌شود. اندازه‌گیری صورت گرفته برای بازیکنان با انتخاب راهبردهای متعدد بدین طریق محاسبه خواهد شد:

اگر باب و کالین هر دو از راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right)$ استفاده کنند، نتایجی که برای آلیس حاصل می‌شود عبارت است از:

$$\$_A\left(U(\theta,\alpha,\beta),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right)\right) = \sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+2\sin^2\beta\right)+5\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha, \qquad (۱۷)$$

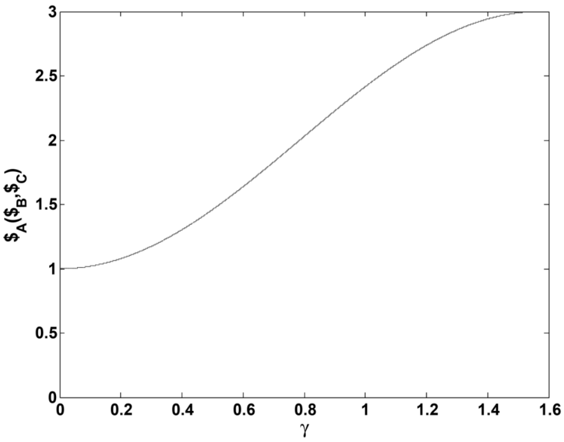
حال اگر راهبرد $U(\pi,0,\pi)$ معرف حرکت آلیس در فضای کوانتومی باشد به نتیجه‌ای بهتر از ۱ دست نخواهد یافت، به طوری‌که داریم:

$$\$_A\left(U(\pi,0,\pi),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)=1 \qquad (۱۸)$$

انتخاب شکل $U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right)$ نیز تأثیری در بهبود نتیجهٔ بازی ندارد. هرچند نتیجه زیر نوعی تعادل کوانتومی به شمار می‌رود، اما نمی‌توان آن را به عنوان نتیجهٔ مطلوب در نظر گرفت، زیرا

$$\$_A\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)=1 \qquad (۱۹)$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۹) حاکی از این است که آلیس برای رسیدن به نتیجهٔ مطلوب باید شکل‌های دیگر راهبرد ممکن از



شکل ۲. این نمودار برای حالتی رسم شده است که بازیکنان در شرایط تعادل نش $\$_A\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=3$ باشند.

فضای کوانتومی را انتخاب نماید. حال شکل راهبرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\$_A\left(U(\theta,\alpha,\beta),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+2\sin^2\beta\right)+5\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\alpha\,, \qquad (۲۰)$$

پر واضح است با راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ بهترین نتیجه حاصل می‌شود که خاصیتی از قانون پارتو نیز دارد:

$$\$_A\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\,. \qquad (۲۱)$$

این نتیجه یک تعادل نش جدیدی است که حاصل می‌شود و از آنجایی که بازی متقارن است این نتیجه برای باب و کالین هم برقرار است. چنانچه داریم:

$$\$_A=\$_B=\$_C=3\,, \qquad (۲۲)$$

این در حالی است که در حالت دو پارامتری بازیکنان با انتخاب راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ به نتیجه قابل توجهی دست نمی‌یافتند. از آنجایی که درهم‌تنیدگی اثر قابل توجهی بر نتیجهٔ بازی دارد، اگر شکل راهبرد $U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ را برای بازیکنان با وابستگی γ در نظر بگیریم، داریم:

$$\$_{A,B,C}\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=1+2\sin^2\gamma\,, \qquad (۲۳)$$

از شکل معادلهٔ بالا می‌توان دید با افزایش پارامتر γ نتایج بازی بهتر می‌شود، به طوری‌که اگر درجه درهم‌تنیدگی برابر $\gamma=\pi/2$ باشد تعادل نش حاصل شده و مسئله به طور کامل رفع می‌شود. نتیجهٔ به دست آمده از رابطهٔ (۲۳) بر حسب درجه درهم‌تنیدگی در شکل ۲ رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد چگونه نتایج به مقدار درهم‌تنیدگی بستگی دارد، وقتی که بازیکنان به تعادل نش می‌رسند. از این شکل می‌توان دید درهم‌تنیدگی غالب است و خاصیت بازی را افزایش می‌دهد.

با تعریف شکل‌های دیگر راهبرد برای هرکدام از بازیکنان می‌توان به نتایج بهتری نیز رسید:

$$\$_A\left(U(0,\pi,\pi),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\pi\right),U\left(\pi,0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=5\,. \qquad (۲۴)$$

این روابط همیشه تعادل نش می‌باشند و بازیکنان با استفاده از این راهبردها بازی را تمام خواهند کرد. شکل راهبردهای معادلهٔ (۲۴) برای باب و کالین نیز بدین صورت است:

$$\$_{B,C}\left(U\left(0,\pi,\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=2 \qquad (۲۵)$$

از رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) می‌توان دید که این شکل راهبرد بازی را به نفع آلیس به اتمام می‌رساند. این نتیجه برای سایر بازیکنان هم برقرار است. به طوری‌که اگر بازیکنان به ترتیب از راهبردهای $U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ و $U(0,\pi,\pi),U\left(\pi,0,\frac{\pi}{2}\right)$ استفاده کنند، این باب است که برندهٔ بازی خواهد شد،

$$\$_{A,B,C}\left(U\left(\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),U(0,\pi,\pi),U\left(\pi,0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=2,5,2 \qquad (۲۵)$$

۳. نتیجه‌گیری

در سیستم سه ذره‌ای تعادل نش کوانتومی متقارن، در حالت سه پارامتری برای مسئلهٔ زندانی بررسی شد و تعادل نش جدیدی به دست آمد که تحت انتخاب راهبرد خاص توسط بازیکنان، باعث بهتر شدن نتایج بازی به نفع آنها می‌گردد و نوعی تعادل ویژه کوانتومی می‌باشد. نمودار رسم شده نیز نشانگر افزایش

نتیجهٔ بازی با درجهٔ درهم‌تنیدگی است. نتیجهٔ قابل ملاحظه اینکه در واقع پارامتر سوم افزوده شده به سیستم، نتایج حاصل از میزان درهم‌تنیدگی سیستم و تعادل نش را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این تأثیرپذیری منجر به نتیجه‌گیری بهتر در راهبردهای معین می‌شود. هر چند در اینجا باید متذکر شد که افزایش پارامترها، افزایش تعداد احتمالات را نیز در بر دارد که این امر موجب می‌شود کنترل سیستم کوانتومی نسبت به حالت دو پارامتری سخت‌تر گردد.

مراجع

1. J von Neumann and O Morgenstern, "*The Theory of Games and Economic Behavior*", Princeton University Press, Princeton (1944).
2. P Adrian, C F Lloyd, and L Hollenberg, *arXiv*: *quant-ph*/0610084v1.
3. R Axelrod, "*The Evolution of Cooperation",* Basic Books, New York (1984); R Dawkins, "*The Selfish Gene",* Oxford University Press, Oxford (1976).
4. B Barry and R Hardin, "*Rational Man and Irrational Society?*", Sage Publications, Beverly Hills (1982).
5. M D Davis, "*Game theory: a nontechnical introduction*", Dover Publications, Mineola, NY (1997).
6. N S Glance and B A Huberman, *Sci. Am*. (1994) 76.
7. H Hamburger, "*Games as models of social dilemmas*", San Francisco, CA, U.S.A: W H Freeman and Co (1979).
8. G Hardin, *Science* **162** (1968) 1243.
9. R D Luce and H Raiffa, "*Introduction and Critical Review"*, Dover Publications, New York (1989).
10. A Rapoport, *Peace & Change,* **13** (1988) 18.
11. A Rapoport and M Guyer, *General Syst,* **23** (1978) 125.
12. P E Turner and L Cho, *Nature* **398** (1999) 441.
13. R Wright, "*Nonzero: The Logic of Human Destiny",* Pantheon, New York (2000).
14. F C Zagare, *"Game theory: Concepts and applications",* Newbury Park, CA, Sage (1984)
15. S J van Enk and R Pike, *Phys. Rev.* A **66** (2002) 024306.
16. R B Myerson, "*An Analysis of Conflict",* MTN Press, Cambridg, MA (1991).
17. J Maynard-Smith and G R Price, *Nature* **246** (1973) 15.
18. J Hruby, *arXiv:quant-ph/0703275v1*.
19. D A Meyer, *Phys. Rev. Lett*. **82** (1999)1052.
20. S J vanEnk, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 789.
21. S C Benjamin and P M Hayden; *Phys. Rev.* A **64** (2001) 030301.
22. J Du, H Li, X Xiaodong, b X Zhou, and R Han, *arXiv: quant- ph/0110122v2.*
23. N F Johnson, *Phys. Rev.* A **63** (2001) 020302.
24. J Eisert, M Wilkens, and M Lewenstein, *Phys. Rev. Lett*. **83** (1999) 3077; **87** (2001) 069802.
25. A P Flitney and D Abbott; *arXiv: quant-ph/0208069v2.*
26. J Du, H Li, X Xu, M Shi, and X Zhou, *Phys. Lett.* A **302** (2002) 229.
27. A Iqbal and A H Toor, *Phys. Rev.* A **65** (2002) 022036.
28. J Eisert and M Wilkens, *J. Mod. Opt*. **47** (2000) 2543.