مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۳

اثر محیط جاذب بر ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره

احسان عموقربان و علی مهدی‌فر

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۳/۱۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۲/۹/۳)

چکیده

به منظور بررسی اثرات محیط دی الکتریک پاشنده و جاذب و همچنین خمیدگی فضای فیزیکی بر خواص حالت‌های کوانتومی فرودی، روابط کوانتش امواج الکترومغناطیسی مبتنی بر رویکرد پدیده شناختی را برای به دست آوردن روابط کوانتومی ورودی- خروجی بین تابش‌ها در دو طرف تیغهٔ دی‌الکتریک به کار می‌بریم. با استفاده از این روابط، همانندی، توابع ویگنر و همچنین همبستگی کوانتومی حالت‌های خروجی از دی‌الکتریک را برای وضعیتی که حالت ورودی از سمت چپ حالت همدوس غیرخطی روی سطح کره و حالت ورودی از سمت راست حالت خلاء است به دست می‌آوریم. در اینجا حالت‌های فرودی را تک فام درنظرمی‌گیریم و محیط دی‌الکتریک را توسط مدل لورنتس مدل‌سازی می‌کنیم. براین اساس به مطالعهٔ ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های خروجی از قبیل درهم‌تنیدگی کوانتومی می‌پردازیم. مشاهده خواهیم کرد که ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های خروجی به شدت به خواص اپتیکی محیط دی‌الکتریک و همچنین به خمیدگی فضای فیزیکی بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی: کوانتش امواج الکترومغناطیسی، اتلاف، حالت همدوس غیرخطی

۱. مقدمه

سامانه‌های چهار درگاهی از قبیل شکافندهای پرتو، فیبرهای نوری، تداخل‌سنج‌ها و ... که کاربردهای بسیار زیادی در اپتیک کوانتومی و کلاسیک، ارتباطات کوانتوی و دوربری کوانتومی دارند، عموماً دارای تیغه‌های دی‌الکتریک هستند. دی‌الکتریک‌ها نیز معمولاً توسط تابع گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\omega)$ به صورت تابعی مختلط از بسامد توصیف می‌شوند که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن توسط رابطهٔ کرامرز-کرونیک به هم مرتبط می‌شوند. در سامانه‌های مزبور، از آنجا که قسمت موهومی تابع دی‌الکتریک بیانگر اتلاف بوده و با توجه به قضیه افت و خیز- اتلاف، به طور حتم نوفه نیز وجود دارد. از این‌رو، سامانه‌های اپتیکی شامل محیط‌های دی‌الکتریک، نمونه‌هایی از درگاه‌های کوانتومی نوفه‌ای هستند که نقش مؤثری بر ویژگی‌های غیرکلاسیکی (از قبیل همبستگی کوانتومی و درهم‌تنیدگی کوانتومی) حالت‌های کوانتومی عبوری از خود می‌گذارند. بنابراین، برای توصیف چگونگی اثر محیط‌های دی‌الکتریک بر حالت‌های کوانتومی فرودی لازم است تا کوانتش

امواج الکترومغناطیس را در محیط‌های دی الکتریک پاشنده و جاذب انجام دهیم. تاکنون روش‌های متعددی برای کوانتش امواج الکترمغناطیسی در حضور چنین محیط‌هایی معرفی شده‌اند که تقریباً می‌توان آنها را در دو رهیافت کلی لاگرانژی و پدیده شناختی دسته‌بندی کرد.

اولین تلاش برای کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور یک دی‌الکتریک غیر پاشنده توسط گلاوبر[۱] صورت گرفت [۱]. گلاوبر لاگرانژی جدیدی برای میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده نوشت که معادله‌های هایزنبرگ حاصل از آن به معادله‌های ماکسول در حضور مواد دی‌الکتریک منجر می‌شد. وی کوانتش میدان را در پیمانهٔ جدید $\nabla\cdot(\varepsilon A)=0$ انجام داد و نشان داد در این پیمانه نیز می‌توان مجموعهٔ مدهای میدان را به عنوان مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ مستقل توصیف کرد. پس از این کار تلاش‌های بسیاری شد تا روش گلاوبر برای مواد دی‌الکتریک پاشنده نیز تعمیم داده شود، ولی بعدها ثابت شد که به خاطر اتلافی بودن چنین محیط‌هایی نمی‌توان لاگرانژی جایگزیده‌ای برای میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط پاشنده به دست آورد.

برای اولین بار هاتنر و بارنت[۲] توانستند لاگرانژی‌ای در حضور مواد دی‌الکتریک ارائه دهند که بر اساس آن معادله‌های هایزنبرگ منجر به معادله‌های ماکسول در آن محیط می‌شدند [۲]. نکتهٔ جدیدی که در فرمول‌بندی آنها ظاهر شده بود، اضافه کردن خود محیط دی‌الکتریک در روند کوانتش بود. در واقع این روش را می‌توان به عنوان تعمیمی از مدل کالدیرا– لگت[۳] در توصیف اتلافی حرکت براونی در نظر گرفت. یکی از مزیت‌های این روش، کانونیک بودن آن است ولی این روش تنها برای محیط‌های دی‌الکتریک همگن و همسانگرد کارایی دارد. بعدها لاؤدن[۴]، مطلوب[۵]، ولش[۶] و همکارانشان رهیافت دیگری برای کوانتش میدان در حضور محیط‌های پاشنده و جاذب ارائه دادند [۳-۶]. در این روش، آنها از معادله‌های ماکسول به عنوان اصل موضوعه استفاده کردند و تحول زمانی را با استفاده از تابع گرین معادله‌های ماکسول به دست آورند. این روش که به رهیافت پدیده شناختی موسوم است به معادله‌های ماکسول پس از کوانتش، جمله‌های نوفه‌ای اضافه می‌کند. در واقع رهیافت آنها به نوعی تعمیم معادلهٔ ماکروسکوپیک لانژون است.

به تازگی خیراندیش و عموشاهی نیز با الهام از اتلاف انرژی یک ذرهٔ باردار، به خاطر جفت شدگی کمینهٔ آن با میدان الکترومغناطیسی، ساز و کار جدیدی برای توصیف کوانتومی اتلاف معرفی کردند و با تعمیم آن، هامیلتونی را برای توصیف کوانتش میدان در حضور محیط‌های مغناطو– دی الکتریک معرفی کردند [۷]. اگرچه اخیراً نیز لاگرانژی‌ای معرفی کرده‌اند که هامیلتونی جفت شدگی کمینه از آن قابل حصول است و بدین ترتیب، می‌توان کوانتش کانونیک میدان الکترومغناطیسی را در حضور محیط‌های مغناطو– دی الکتریک پاشندهٔ جاذب [۸-۱۰] و حتی تقویت‌کننده نیز انجام داد [۱۱].

در مراجع [۱۲و۱۳] با به کار بردن رهیافت کوانتش پدیده‌شناختی و محاسبهٔ مقدار میانگین بردار پوئینتینگ، تأثیر انتشار درون محیط‌های دی‌الکتریک در دمای ثابت بر تپ‌های فرودی بررسی شده است. نشان داده شده است که خواص اپتیکی تپ‌ها توسط دما، پاشندگی و جذب در محیط دی‌الکتریک تغییر می‌کند. برخی از این عوامل که در حوزهٔ کلاسیک و کوانتوم مشترک هستند موجب تأخیر در قلهٔ مرکزی و تغییرشکل تپ نسبت به تپ فرودی می‌شوند. از طرف دیگر، رهیافت‌های مشابه‌ای نیز برای انتشار حالت‌های غیرکلاسیکی از قبیل حالت‌های چلانده [۱۴-۱۷] و همچنین حالت‌های همدوس [۱۸] درون محیط‌های دی‌الکتریک به کار برده شده‌اند.

حالت‌های همدوس نخستین بار توسط شرودینگر برای توصیف بستهٔ موج با کمینهٔ پخشیدگی نوسانگرهای هماهنگ معرفی گردیند [۱۹]. این حالت‌ها، با عدم قطعیت کمینه، ویژه حالت عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ بوده و توزیع آمار

---

۱. Glauber
۲. Huttner- Barnett
۳. Caldirola-Leggett
۴. Loudon
۵. Matloob
۶. Welsch

شمارش فوتونی آنها از نوع پواسونی است [۲۰]. حالت‌های همدوس به روش‌های گوناگونی تعمیم یافته‌اند که گام‌های مهمی در جهت گسترش این نظریه هستند. از جملهٔ این تعمیم‌ها می‌توان به تعمیم‌های دینامیکی [۲۱]، تقارنی [۲۲] و جبری [۲۳] اشاره نمود. به عنوان نمونه، در تعمیم‌های جبری، عملگرهای بوزونی استاندارد $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ با شکل عام از این عملگرها جایگزین می‌شوند. این عملگرها در واقع ترکیبی از عملگرهای استاندارد و توابعی از برخی از ثابت‌های حرکت سامانه هستند. این فرآیند منجر به گذار از سامانهٔ خطی به سامانهٔ غیرخطی می‌شود.

از جمله تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی هستند. برای رسیدن به این حالت‌ها عملگرهای جبر نوسانگر، به‌صورت تغییر شکل یافتهٔ

$$\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1)\hat{a},$$

و

$$\hat{A}^{\dagger} = f^{\dagger}(\hat{n})\hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger} f^{\dagger}(\hat{n}+1),$$

در نظر گرفته می‌شوند [۲۳]. حالت‌های همدوس غیرخطی به صورت ویژه حالت‌های عملگر نابودی تغییر شکل یافتهٔ بالا تعریف می‌شوند. حالت‌های همدوس غیرخطی به دلیل خواص غیرکلاسیکی مورد توجه قرار گرفته‌اند، به طوری که بسیاری از حالت‌های اپتیک کوانتومی از قبیل حالت‌های همدوس با تغییر شکل q [۱]، حالت‌های فوتون افزوده [۲]، حرکت مرکز جرم یک یون به دام افتاده و همچنین برخی از حالت‌های همدوس تعمیم یافته [۲۴] را می‌توان از دستهٔ حالت‌های همدوس غیرخطی دانست. همچنین اثرات محصورسازی فضایی و انحنای فیزیکی بر ساختار جبری حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ در چارچوب حالت‌های همدوس غیر خطی بررسی شده است [۲۵ و ۲۶].

در مرجع [۲۶]، برای مطالعهٔ اثر خمیدگی فضای فیزیکی بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس، ساختار جبری یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح یک کره بررسی شده است. نشان داده شده است که نوسانگر دو بعدی را می‌توان به عنوان یک نوسانگر یک بعدی با جبر تغییر شکل یافته توصیف کرد. علاوه بر این، مشخص شده است که جبر نوسانگر روی کره نیز یک جبر نوسانگر تغییر شکل یافته نسبت به جبر آن در فضای تخت است. سرانجام با تعریف حالت‌های همدوس روی سطح کره نشان داده شده است که با افزایش خمیدگی کره، خواص غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس متناظر با آن افزایش پیدا می‌کند. در مرجع [۲۷] نیز با ارایهٔ طرحواره‌ای فیزیکی برای تولید حالت‌های همدوس غیرخطی حرکت ارتعاشی مرکز جرم اتم به دام افتاده، شیوه‌ای برای آشکارسازی خمیدگی فضای فیزیکی معرفی شده است. نشان داده شده است که با تغییر بسامد لیزرهای رابی تابیده شده می‌توان حالت‌های همدوس بر روی کره‌های با خمیدگی‌های مختلف را تولید کرد.

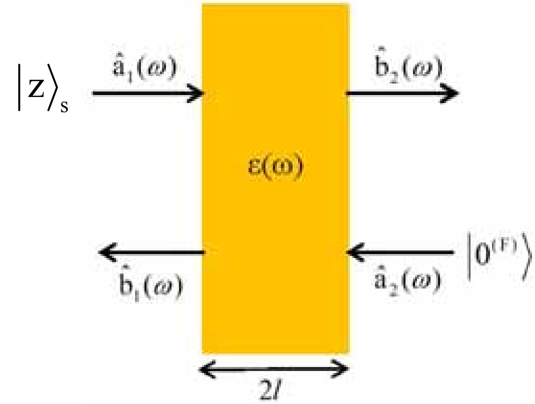
در این مقاله، به منظور بررسی اثرات محیط دی الکتریک پاشنده و همچنین خمیدگی فضای فیزیکی، رهیافت ارائه شده در مراجع [۴، ۱۷،۱۸، ۲۸ و۲۹] که مبتنی بر رویکرد پدیده شناختی است را برای به دست آوردن روابط ورودی- خروجی بین تابش‌ها در تیغه دی الکتریک پاشنده و جاذب به کار می‌بریم. با استفاده از این روابط، همانندی، توابع ویگنر و همچنین همبستگی کوانتومی حالت‌های خروجی از دی الکتریک را برای وضعیتی که حالت ورودی از سمت چپ حالت همدوس غیرخطی روی سطح کره و حالت ورودی از سمت راست حالت خلاء است به دست می‌آوریم. حالت‌های فرودی را تک فام و محیط دی‌الکتریک را توسط مدل لورنتس مدل‌سازی می‌کنیم. علاوه بر این، به مطالعهٔ درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی می‌پردازیم. مشاهده خواهیم کرد که ویژگی‌های غیر کلاسیکی حالت‌های خروجی به شدت به خواص اپتیکی محیط دی‌الکتریک و همچنین به خمیدگی فضای فیزیکی بستگی دارد.

۲. اثر محیط جاذب روی حالت‌های کوانتومی

با به کاربردن طرح کوانتش پدیده شناختی امواج الکترومغناطیسی درون محیط‌های دی‌الکتریک، اثر محیط‌های جاذب و پاشنده بر تابش‌های فرودی را می‌توان بر اساس

۱. q-deformed

۲. photon-added



شکل ۱ . نمایی از تیغهٔ دی‌الکتریکی به ضخامت $2l$ و گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\omega)$ که حالت همدوس غیر خطی از سمت چپ و حالت خلاء کوانتومی از سمت راست روی آن فرود می‌آید.

ماتریس انتقال $T(\omega)$ و ماتریس جذب $A(\omega)$ فرمول‌بندی کرد [۱۷ و ۱۸]. فرض می‌کنیم که $\hat{a}_i(\omega)$ و $\hat{b}_i(\omega)$، $i=1,2$ به طوری که در شکل ۱ نشان داده شده است، دامنهٔ عملگرهای بوزونی متناظر با تابش‌های فرودی و خروجی در دو طرف تیغهٔ دی‌الکتریک با ضخامت $2l$ و ضریب شکست $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ باشند. قسمت‌های حقیقی و موهومی گذردهی الکتریکی محیط $\varepsilon(\omega)$ توسط رابطهٔ کرامرز- کرونیک بهم مربوط می‌شوند، به ویژه که حضور جذب در محیط نتیجهٔ مسلمی از حضور پاشندگی در محیط است. از این‌رو، فرض می‌کنیم که عملگر $g_i(\omega)$ عملگر بوزونی متناظر با برانگیختگی‌های درون ماده است که نقش عملگر نیروی نوفهٔ متناظر با فرآیند جذب در محیط را بازی می‌کند. با معرفی عملگرهای دو برداری $\hat{a}(\omega)$، $\hat{b}(\omega)$ و $\hat{g}(\omega)$ برای نمایش عملگرهای میدان و ماده، رابطهٔ ورودی- خروجی برای تابش‌های روی تیغهٔ دی‌الکتریک به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{b}(\omega)=T(\omega)\hat{a}(\omega)+A(\omega)\hat{g}(\omega). \qquad (۱)$$

ماتریس‌های انتقال و جذب در رابطهٔ ماتریسی زیر صدق می‌کنند

$$T(\omega)T^{\dagger}(\omega)+A(\omega)A^{\dagger}(\omega)=1, \qquad (۲)$$

که در آن، درایه‌های $T_{12}=T_{21}=T(\omega)$ و $T_{11}=T_{22}=R(\omega)$ به ترتیب ضرایب بازتاب و عبور از تیغهٔ دی‌الکتریک بوده و توسط رابطه‌های زیر به پارامترهای محیط مربوط می‌شوند

$$R(\omega)=e^{-2i\omega l/c}[n^2(\omega)-1][e^{4i\omega n(\omega)l/c}-1]G^{-1}(\omega), \qquad (۳)$$

و

$$T(\omega)=4n(\omega)e^{2i\omega[n(\omega-1)]l/c}\,G^{-1}(\omega). \qquad (۴)$$

در روابط بالا، تابع $G(\omega)$ به صورت زیر تعریف شده است

$$G(\omega)=[n(\omega)+1]^2-[n(\omega)-1]^2e^{4i\omega n(\omega)l/c}. \qquad (۵)$$

رابطهٔ عملگری ورودی- خروجی شامل همهٔ اطلاعات لازم برای تبدیل یک تابع دلخواه از عملگرهای ورودی به تابعی از عملگرهای خروجی است. به ویژه، این امکان را فراهم می‌آورند تا همبستگی میدان‌های خروجی را بر حسب عملگرهای میدان‌های ورودی بیان کنیم و از این‌رو همهٔ اطلاعات لازم حالت‌های خروجی را به دست آوریم. معمولاً مناسب است که حالت‌های کوانتومی برحسب توابع فضای فاز و یا ماتریس‌های چگالی نمایش داده شوند. در ادامه، به منظور محاسبهٔ عملگر چگالی و یا توابع فاز مربوط به میدان‌های گذرنده از محیط‌های جاذب، روش‌های ارائه شده در مرجع [۲۸ و ۲۹] را دنبال خواهیم کرد.

در ابتدا عملگرهای چهار برداری زیر را تعریف می‌کنیم

$$\hat{\alpha}(\omega)=\begin{pmatrix}\hat{a}(\omega)\\ \hat{g}(\omega)\end{pmatrix},\qquad \hat{\beta}(\omega)=\begin{pmatrix}\hat{b}(\omega)\\ \hat{f}(\omega)\end{pmatrix} \qquad (۶)$$

که در آن $\hat{f}(\omega)$ یک عملگر بوزونی کمکی دوبرداری است. رابطهٔ ورودی- خروجی را می‌توان مجدداً برحسب این عملگرهای چهار برداری به صورت زیر بیان کرد

$$\hat{\beta}(\omega)=\Lambda(\omega)\hat{\alpha}(\omega), \qquad (۷)$$

که در آن داریم $\Lambda(\omega)\Lambda^{\dagger}(\omega)=1$. در اینجا ماتریس $\Lambda(\omega)$ برای محیط‌های جاذب متعلق به گروه $SU(4)$ است. در حالی‌که برای حالت‌های خاصی که بسامد میدان فرودی در نواحی دورتری از بسامدهای طبیعی ماده واقع باشد، اثر جذب ناچیز است و می‌توانیم $A(\omega)$ را تقریباً برابر صفر قرار دهیم و در این صورت، ماتریس $\Lambda(\omega)$ متعلق به گروه $SU(2)$ می‌شود.

با معرفی عملگرهای هرمیتی زیر

$$C(\omega)=\sqrt{T(\omega)T^{\dagger}(\omega)},\qquad S(\omega)=\sqrt{A(\omega)A^{\dagger}(\omega)}, \qquad (۸)$$

که با به کاربردن معادلهٔ (۲) از رابطهٔ $C^2(\omega)+S^2(\omega)=1$

تبعیت می‌کند، ماتریس $\Lambda(\omega)$ را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$\Lambda(\omega)=\begin{pmatrix} T(\omega) & A(\omega)\\ -S(\omega)C^{-1}(\omega)T(\omega) & C(\omega)S^{-1}(\omega)A(\omega)\end{pmatrix}. \tag{۹}$$

اکنون با استفاده از خواص تبدیلات گروهی SU(4)، و معادلهٔ (۲) داریم

$$\hat{\beta}(\omega)=\hat{U}^{\dagger}\hat{\alpha}(\omega)\hat{U}. \tag{۱۰}$$

در اینجا عملگر $\hat{U}$ یک عملگر یکانی متناظر با $\Lambda(\omega)$ است که عبارت است از

$$\hat{U}=\exp\left\{-\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega[\hat{\alpha}^\dagger(\omega)]^T\,\Phi(\omega)\hat{\alpha}(\omega)\right\}, \tag{۱۱}$$

که در آن $\Phi(\omega)$ ماتریسی ۴×۴ و هرمیتی است، که توسط رابطهٔ $exp\{-i\Phi(\omega)\}=\Lambda(\omega)$ به ماتریس $\Lambda(\omega)$ مربوط می‌شود.

با توجه به اینکه عملگر چگالی اولیهٔ کل سامانه $\hat{\rho}_{\mathrm{in}}=\hat{\rho}_{\mathrm{in}}[\hat{\alpha}(\omega),\hat{\alpha}^\dagger(\omega)]$ را می‌توان به صورت تابعی از حالت‌های کوانتومی ورودی بیان کرد، عملگر چگالی حالت‌های کوانتومی خروجی میدان به سادگی با استفاده از تبدیلات یکانی (۱۱) و ردگیری روی درجات آزادی محیط جاذب به دست می‌آید. از این‌رو داریم

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{out}}^{(F)}&=\mathrm{Tr}^{(\mathrm{D})}\{\mathbf{\hat{U}}\rho_{\mathrm{in}}\mathbf{\hat{U}}^\dagger\}\\&=\mathrm{Tr}^{(\mathrm{D})}\{\rho_{\mathrm{in}}[\Lambda^\dagger(\omega)\hat{\alpha}(\omega),\Lambda^t(\omega)\hat{\alpha}^\dagger(\omega)]\}.\end{aligned} \tag{۱۲}$$

در اینجا مشاهده می‌کنیم که $\rho_{\mathrm{out}}^{(F)}$ مستقل از عملگر کمکی معرفی شده در رابطهٔ (۶) است.

۳. حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره

حالت‌های همدوس غیرخطی یا حالت‌های همدوس تغییر شکل یافتهٔ[1] f، تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس استاندارد هستند. به طوری‌که عملگرهای خلق و نابودی جبر ویل–هایزنبرگ[2] یعنی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ با شکل‌های تغییریافتهٔ خودشان

$$\hat{A}=\hat{a}\,f(\hat{n})=f(\hat{n}+1)\,\hat{a}$$

و

$$\hat{A}^\dagger=f^\dagger(\hat{n})\,\hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger\,f^\dagger(\hat{n}+1)$$

جایگزین می‌گردند. در اینجا $\hat{n}$ عملگر عددی بوده و $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر مقدار است. در واقع حالت‌های همدوس غیرخطی ویژه حالت‌های عملگر تغییر شکل یافتهٔ $\hat{A}$ هستند.

در مرجع [۲۶]، به منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل در نظریهٔ حالت‌های همدوس غیرخطی و ساختار هندسی فضای فیزیکی، یک نوسانگر دو بعدی روی سطح کره‌ای با شعاع R و خمیدگی $\lambda=\frac{1}{R^2}$ در نظر گرفته شده و با مقایسهٔ جبر یک نوسانگر دو بعدی روی سطح تخت با جبر نوسانگر تغییر شکل یافتهٔ نشان داده شده است که نوسانگر دوبعدی مزبور را می‌توان به عنوان نوسانگر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل یافته‌ای با تابع تغییر شکل $f_s(n)=\sqrt{N-n+1}\;g(\lambda,n)$ که در آن

$$g(\lambda,n)=\sqrt{(\lambda(N+1-n)+\sqrt{1+\lambda^2/4})(\lambda n+\sqrt{1+\lambda^2/4})},$$

در نظرگرفت. در اینجا N بعد فضای فوک با ابعاد متناهی مربوط به جبر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره است. بر این اساس، حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر با نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره به صورت زیر بیان می‌شود

$$|z\rangle_s=M^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}}\,[g(\lambda,n)]!\,z^n|n\rangle, \tag{۱۳}$$

که در آن $M=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\{[g(\lambda,n)]!\}^2|z|^{2n}$ ضریب بهنجارش است. آشکار است که حالت‌های همدوس $|z\rangle_s$ را می‌توان به عنوان خانواده‌ای از حالت‌های همدوس‌غیرخطی متناظر با فضای خمیده به شمار آورد. علاوه بر این نشان داده شده است که با افزایش خمیدگی فضای فیزیکی (کره)، خواص غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره، رابطهٔ (۱۳)، افزایش پیدا می‌کند. در مرجع [۲۷] نیز با ارائهٔ طرحواره‌ای فیزیکی برای تولید حالت‌های همدوس غیرخطی حرکت ارتعاشی مرکز جرم اتم به دام افتاده، شیوه‌ای برای آشکارسازی خمیدگی فضای فیزیکی معرفی شده است. هم چنین نشان داده شده است که با تغییر بسامد رابی لیزرهای تابیده شده می‌توان حالت‌های همدوس بر روی کره‌های با خمیدگی‌های مختلف را تولید کرد. لذا می‌توان خمیدگی فضای

۱. f-deformed

۲. Weyl-Hiesenberg

فیزیکی را با تنظیم پارامترهای مربوط به سامانهٔ اتم به دام افتاده کنترل کرد. با این حال، به منظور بررسی اثرات محیط دی‌الکتریک و خمیدگی فضای فیزیکی بر خواص حالت‌های کوانتومی فرودی نیازمند آماده‌سازی حالت‌های میدان تابشی به صورت حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره هستیم. در مراجع [۳۰-۳۲] رهیافت‌هایی برای تولید هر برهم نهی دلخواه از حالت‌های عددی در یک فضای هیلبرت با بعد متناهی ارایه شده است. به عنوان نمونه، در مرجع [۳۱] طرحواره‌ای برای تولید حالت دلخواه میدان در یک کاواک تک مد از طریق انتقال همدوس اتمی به میدان درون کاواک ارائه گردیده است. در این مدل، سامانه اتمی شامل یک سری اتم دوترازی بوده که در آن اتم kام در یک برهم‌نهی خطی از حالت برانگیختهٔ $\langle e|$ و پایه $\langle g|$ به صورت $|e\rangle+\varepsilon_k|g\rangle$ هستند. اتم‌های مزبور با تک مد تشدیدی میدان الکترومغناطیسی کاواک از طریق هامیلتونی جینز-کامینگز [۳۳] برهم‌کنش می‌کنند. حالت اولیهٔ کاواک نیز به صورت حالت خلاء درنظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که پس از عبور $k-1$ امین اتم و درست قبل از ورود kامین اتم، میدان کاواک در حالت کوانتومی $\left|\phi^{(k-1)}\right\rangle=\sum_{n=0}^{N}\phi_n^{(k-1)}|n\rangle$ باشد. حال با خروج یک اتم از کاواک بررسی می‌کنیم که اتم در حالت پایهٔ $\langle g|$ و یا حالت برانگیختهٔ $\langle e|$ است. اگر اتم در حالت برانگیخته یافت شود، باید مراحل قبل، از ابتدا و با حالت خلاء کاواک تکرار شود. ولی اگر اتم در حالت پایه آشکارسازی گردد، مراحل را ادامه می‌دهیم تا در هر مرحله با انتقال انرژی اتم به میدان کاواک به حالت موردنظر اولیه برسیم. ضرایب جدید $\phi_n^{(k)}$ میدان پس از خروج kامین اتم، $\left|\phi^{(k)}\right\rangle=\sum_{n=0}^{N}\phi_n^{(k)}|n\rangle$، نیز برحسب ضرایب $\phi_n^{(k-1)}$ طبق یک رابطهٔ بازگشتی به دست می‌آیند [۳۱].

اکنون در اینجا نیز می‌توان با استفاده از رهیافتی مشابه، حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره با تعداد کوانتوم‌های کل N را تولید نمود. بدین منظور باید به دنبال یک برهم‌نهی از N حالت عددی برای میدان به شکل $\left|\phi^{(N-1)}\right\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}\phi_n^{(N-1)}|n\rangle$ باشیم که پس از عبور Nامین اتم آماده‌سازی شده در حالت اولیهٔ مناسب $|e\rangle+\varepsilon_N(\lambda)|g\rangle$ و آشکارسازی شده در حالت پایه، به حالت همدوس $|z\rangle_s$ تبدیل شود. همانند مرجع [۳۱] معادله‌ای برای $\varepsilon_N(\lambda)$ به دست می‌آید که با حل آن، $\varepsilon_N(\lambda)$ به دست می‌آید. در مرحلهٔ بعد، $\left|\phi^{(N-1)}\right\rangle$ را به صورت حالت مورد نیاز در نظرگرفته که باید با فرستادن $N-1$ اتم به درون کاواک به دست آید. برای این حالت نیز محاسبات مشابه انجام می‌شود تا $\varepsilon_{N-1}(\lambda)$ به دست آید. با انجام محاسبات تا انتها دنباله‌ای از اعداد مختلط وابسته به انحنای فضای λ به صورت $\varepsilon_1(\lambda),\cdots,\varepsilon_N(\lambda)$ به دست می‌آوریم که هر کدام از آنها مشخص می‌کنند هر یک از N اتم قبل از ورود به کاواک در چه برهم‌نهی از حالت‌های پایه و برانگیختهٔ $|e\rangle+\varepsilon_k(\lambda)|g\rangle$ باشند تا با انجام رهیافت بالا حالت نهایی میدان کاواک در حالت همدوس غیرخطی آماده‌سازی شده باشد.

اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که میدان‌های فرودی از سمت چپ و سمت راست تیغهٔ دی‌الکتریک به ترتیب حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره و خلاء کوانتومی هستند. بنابراین حالت اولیهٔ کل سامانه به صورت حاصل‌ضرب $|\psi\rangle_{in}=|z\rangle_s\left|0^{(F)}\right\rangle\left|F^{(D)}\right\rangle$ بیان می‌شود که $\left|F^{(D)}\right\rangle$ حالت نوفهٔ تیغهٔ دی‌الکتریک را که یک حالت مخلوط آماری است نشان می‌دهد. اثر عملگرهای نوفهٔ محیط $\hat{g}(\omega)$ به گونه‌ای است که دارای مقادیر چشمداشتی $\left\langle F^{(D)}\right|\hat{g}(\omega)\left|F^{(D)}\right\rangle=0$ هستند. اگر تیغهٔ دی‌الکتریک فوق در دمای متناهی θ حفظ شود، این عملگرهای نوفه دارای مقادیر چشمداشتی مخالف صفر زیر هستند

$$\left\langle F^{(D)}\right|\hat{g}^\dagger(\omega)\hat{g}(\omega')\left|F^{(D)}\right\rangle=N(\omega,\theta)\times\left(1-|T|^2-|R|^2\right)\delta(\omega-\omega'). \qquad (۱۴)$$

در اینجا $N(\omega,\theta)=\left(\exp(\hbar\omega/k_B\theta)-1\right)^{-1}$ تعداد میانگین فوتون‌های گرمایی گسیلی توسط دی‌الکتریک است و T و R به ترتیب ضرایب عبور و بازتاب هستند که در بخش قبلی تعریف شده‌اند. در ادامه برای سادگی محاسبات و بدون کاستن از کلیت

رهیافت، خودمان را به دمای $\theta=0$ محدود می‌کنیم که در این وضعیت محیط در حالت پایهٔ $\left|0^{(D)}\right\rangle$ واقع می‌شود.

عملگر چگالی اولیهٔ $\hat{\rho}_{in}=|\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|=\left|z_s,0^{(F)},0^{(D)}\right\rangle\left\langle z_s,0^{(F)},0^{(D)}\right|$ که از حالت اولیهٔ سامانه به دست می‌آید، با به کار بردن رابطهٔ (۱۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\rm in}=&|M|^{-1}\sum_{n,m=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\\&\times\frac{[g(\lambda,n)]![g^{*}(\lambda,m)]!z^{n}z^{*m}}{\sqrt{n!m!}}\\&\times\hat{\alpha}_1^{\dagger n}\left|0_s{}^{(F)},0^{(F)},0^{(D)}\right\rangle\left\langle 0_s{}^{(F)},0^{(F)},0^{(D)}\right|\hat{\alpha}_1^{m}.\end{aligned}\qquad (۱۵)$$

اکنون با جایگذاری رابطهٔ ورودی- خروجی (۷) در معادلهٔ فوق، عملگر چگالی خروجی کل به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\rm out}=&|M|^{-1}\sum_{n,m=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\\&\times\frac{[g(\lambda,n)]![g^{*}(\lambda,m)]!z^{n}z^{*m}}{\sqrt{n!m!}}\\&\times\sum_{\mu,\mu'=1}^{4}\left(\Lambda_{\mu 1}\hat{\alpha}_1^{\dagger}\right)^{n}\left|0_s{}^{(F)},0^{(F)},0^{(D)}\right\rangle\\&\left\langle 0_s{}^{(F)},0^{(F)},0^{(D)}\right|\left(\Lambda^{t}_{\mu' 1}\hat{\alpha}_1\right)^{m}.\end{aligned}\qquad (۱۶)$$

حال با معرفی عملگرهای کمکی $\hat{C}_{\nu}^{\dagger}=\sum_{i=1}^{2}\Lambda_{i\nu}\,\hat{a}_i^{\dagger}$ و $\hat{D}_{\nu}^{\dagger}=\sum_{i=1}^{2}\Lambda_{2+i\,\nu}\,\hat{g}_i^{\dagger}$ و ردگیری روی درجات آزادی محیط، عملگر چگالی خروجی کل (۱۶) برای میدان‌های خروجی از دو درگاه خروجی اول و دوم از تیغهٔ دی‌الکتریک به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(F)}_{\rm out}=&|M|^{-1}\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k,k'=0}^{n,m}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\binom{n}{k}\binom{m}{k'}\\&\times\frac{[g(\lambda,n)]![g^{*}(\lambda,m)]!z^{n}z^{*m}}{\sqrt{n!m!}}\\&\times\left(\left\langle 0^{(D)}\right|\hat{D}_1^{m-k'}\hat{D}_1^{\dagger n-k}\left|0^{(D)}\right\rangle\right)\\&\times\hat{C}_1^{\dagger k}\left|0_s{}^{(F)},0^{(F)}\right\rangle\left\langle 0_s{}^{(F)},0^{(F)}\right|\hat{C}_1^{k}.\end{aligned}\qquad (۱۷)$$

در اینجا مقدار چشمداشتی حالت پایهٔ محیط جاذب را می‌توان با جابه‌جا کردن عملگرهای $\hat{D}_1$ از چپ به راست و با به کار بردن روابط جابه‌جایی در بین آنها بدین شکل به دست آورد: $(n-k)!\left(1-|T|^2-|R|^2\right)\delta_{m-k',n-k}$. با جایگذاری این مقدار چشمداشتی و انجام محاسبات طولانی ولی ساده، عملگر چگالی میدان‌های خروجی (۱۷) به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(F)}_{\rm out}=&|M|^{-1}\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\sum_{k'=0}^{m}\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{k'}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\\&\times\binom{n}{k}\binom{m}{k'}\binom{k}{p}\binom{k'}{q}\frac{[g(\lambda,n)]![g^{*}(\lambda,m)]!(n-k)!z^{n}z^{*m}}{\sqrt{n!m!}}\\&\times\sqrt{p!q!(k-p)!(k'-q)!}\left(1-|T|^2-|R|^2\right)^{n-k}\\&\times R^{p}R^{*q}T^{k-p}T^{*k'-q}\delta_{m-k',n-k}\,|p,k-p\rangle\langle q,k'-q|.\end{aligned}\qquad (۱۸)$$

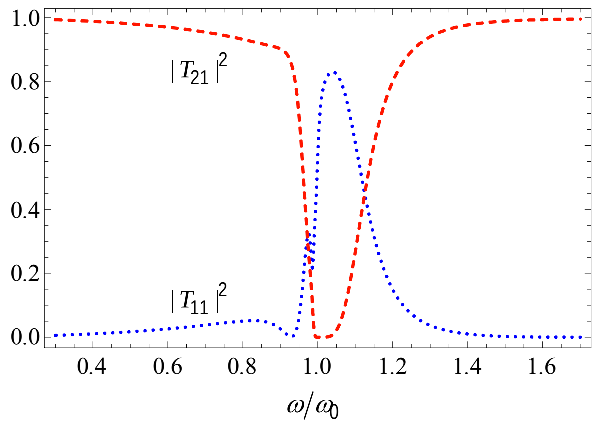
با رد گرفتن روی یکی از حالت‌های درگاه خروجی به رابطهٔ زیر برای عملگر چگالی میدان خروجی از درگاه jام می‌رسیم

$$\begin{aligned}&\hat{\rho}^{(F)}_{{\rm out},j}=|M|^{-1}\\&\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k=0}^{\min\{N-n,N-m\}}\frac{[g(\lambda,n+k)]![g(\lambda,m+k)]!}{k!\sqrt{n!m!(N-n-k)!(N-m-k)!}}\\&\times\frac{N!|z|^{2k}z^{n}z^{*m}T_{j1}^{n}T_{j1}^{*m}\left(1-|T_{j1}|^2\right)^{k}}{k!\sqrt{n!m!(N-n-k)!(N-m-k)!}}|n\rangle\langle m|,\end{aligned}\qquad (۱۹)$$

که در آن، $T_{j1}\,(j=1,2)$ درایه‌های ماتریس انتقال متناظر با ضرایب عبور و بازتاب (۳) و (۴) هستند. به سادگی می‌توان نشان داد که در حالت خاصی که دی‌الکتریک شفاف باشد، یعنی $\mathrm{Im}[\varepsilon]=0$، عملگر چگالی فوق به روابط به دست آمده برای شکافندهٔ نور غیرجاذب در مرجع [۳۴] میل می‌کند. در ادامه برای تجزیه و تحلیل اثرات تیغهٔ دی‌الکتریک بر انتشار حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح کره، این تیغه را توسط مدل لورنتس توصیف می‌کنیم که تابع دی‌الکتریک آن توسط رابطهٔ زیر داده می‌شود [۳۵]

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{\omega_g^2}{\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega}.\qquad (۲۰)$$

در اینجا ω_g بسامد پلاسما، ω_0 بسامد تشدید و γ ضریب جذب محیط است. در شکل ۲ ضرایب عبور و بازتاب (۳) و (۴)



شکل ۲. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) ضریب عبور $|T_{11}|^2$ (منحنی خط‌چین) و ضریب بازتاب $|T_{21}|^2$ (منحنی نقطه‌چین) به صورت تابعی از بسامد بدون بعد ω/ω_0 برای تیغهٔ دی‌الکتریکی با ضخامت $\frac{\omega_0 l}{c}=1$ که توسط مدل لورنتس (۲۰) با پارامترهای $\omega_p=0/5\,\omega_0$ و $\gamma=0/1\omega_0$ توصیف می‌شوند، رسم شده‌اند.

برحسب بسامد با استفاده از تابع دی‌الکتریک مدل لورنتس رسم شده است.

۳. ۱. تابع ویگنر

شبه تابع توزیع ویگنر به صورت تابعی از فضای فاز کوانتومی، ابزار مناسبی برای توصیف اثراتی است که از مکانیک کوانتومی و آمار کلاسیکی بر کوادرتورهای مشاهده‌گرها اعمال می‌شود. از آنجا که تابع مزبور شبیه به یک تابع توزیع شبه کلاسیکی عمل می‌کند، محاسبهٔ کمیت‌های مشاهده‌پذیری از قبیل مقادیر میانگین و یا تغییرات کوادرتورها را مطابق رهیافت کلاسیکی امکان پذیر می‌سازد. مقادیر منفی تابع ویگنر بیانگر خواص غیر کلاسیکی حالت مورد نظر است. این تابع فضای فاز که متناظر با حالت‌های کوانتومی در فضای لیوویل است، به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۳]

$$W(x,p)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \langle x+p/2|\hat{\rho}|x-p/2\rangle e^{-ipy/\hbar}. \quad (۲۱)$$

با جایگذاری عملگر چگالی (۱۹) در رابطهٔ فوق، تابع ویگنر متناظر با حالت کوانتومی خروجی از درگاه j ام به شکل زیر به دست می‌آید

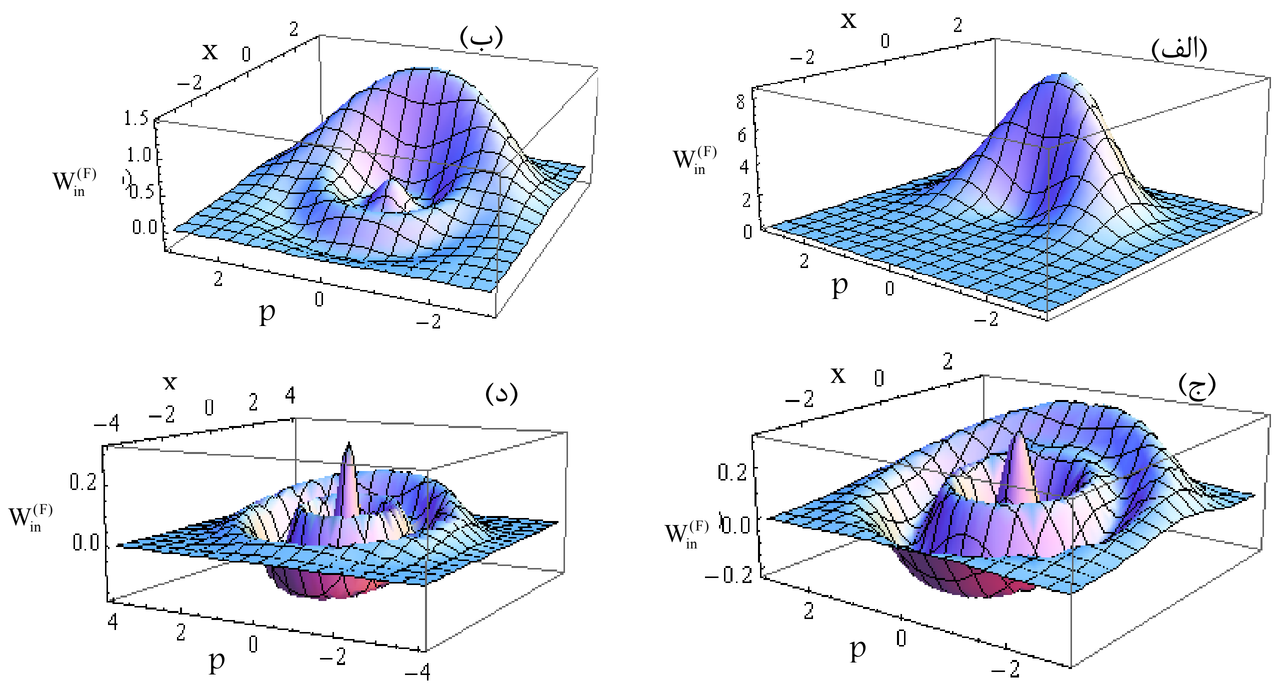
$$\begin{aligned}W^{(F)}_{\text{out},\,j}(x,p,\omega)&=\frac{1}{2\pi M}\\&\times\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k=0}^{\min\{N-n,N-m\}}\frac{[g(\lambda,n+k)]![g(\lambda,m+k)]!}{k!\sqrt{n!m!(N-n-k)!(N-m-k)!}}\\&\times\frac{N!|z|^{2k}\,z^n z^{*m}T_{j1}^{n}T_{j1}^{*m}(1-|T_{j1}|^2)^k}{k!\sqrt{n!m!(N-n-k)!(N-m-k)!}}\\&\times\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,u_m^{*}(x-y/2)u_n(x+y/2)e^{-ipy}.\end{aligned} \quad (۲۲)$$

در اینجا $u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)e^{-x^2/2}$ و $H_n(x)$ چند جمله‌ای‌های هرمیت هستند. یکاهای به کار برده شده برای x و p به ترتیب بر و در واحد $\sqrt{m\omega}$ هستند که m جرم نوسانگری است و $u_n(x)$ها ویژه توابع هامیلتونی آن هستند. همچنین در اینجا برای سادگی محاسبات یکای پلانک را انتخاب کرده‌ایم که در آن داریم: $h=c=1$. با محاسبهٔ انتگرال توابع هرمیت درون رابطهٔ (۲۲) و انجام محاسبات طولانی و سرراست به رابطهٔ ساده شدهٔ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}W^{(F)}_{\text{out},\,j}(x,p,\omega)&=\frac{e^{-(x^2+p^2)}}{M\pi}\times\\&\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k=0}^{\min\{N-m,N-m\}}\frac{[g(\lambda,n+k)]![g^{*}(\lambda,m+k)]!}{k!m!\sqrt{(N-n-k)!(N-m-k)!}}\\&\times\frac{N!|z|^{2k}(-z)^n z^{*m}T_{j1}^{n}T_{j1}^{*m}(1-|T_{j1}|^2)^k}{k!m!\sqrt{(N-n-k)!(N-m-k)!}}\\&\times[\sqrt{2}(x+ip)]^{m-n}L_n^{m-n}[2(x^2+p^2)],\end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن L_n^{m-n} چند جمله‌ای‌های تعمیم یافته لاگر هستند. در اینجا همان طور که انتظار داریم رابطهٔ فوق به ازای $j=1$، یعنی درگاه خروجی اول، تنها به ضریب بازتاب $R(\omega)$ و به ازای $j=2$، یعنی درگاه خروجی دوم، تنها به ضریب عبور $T(\omega)$ بستگی دارد.

برای مقایسهٔ ویژگی‌های توابع ویگنر خروجی با مقدار ورودی آن، مشابه روش ارائه شده در بالا تابع ویگنر ورودی را نیز محاسبه می‌کنیم



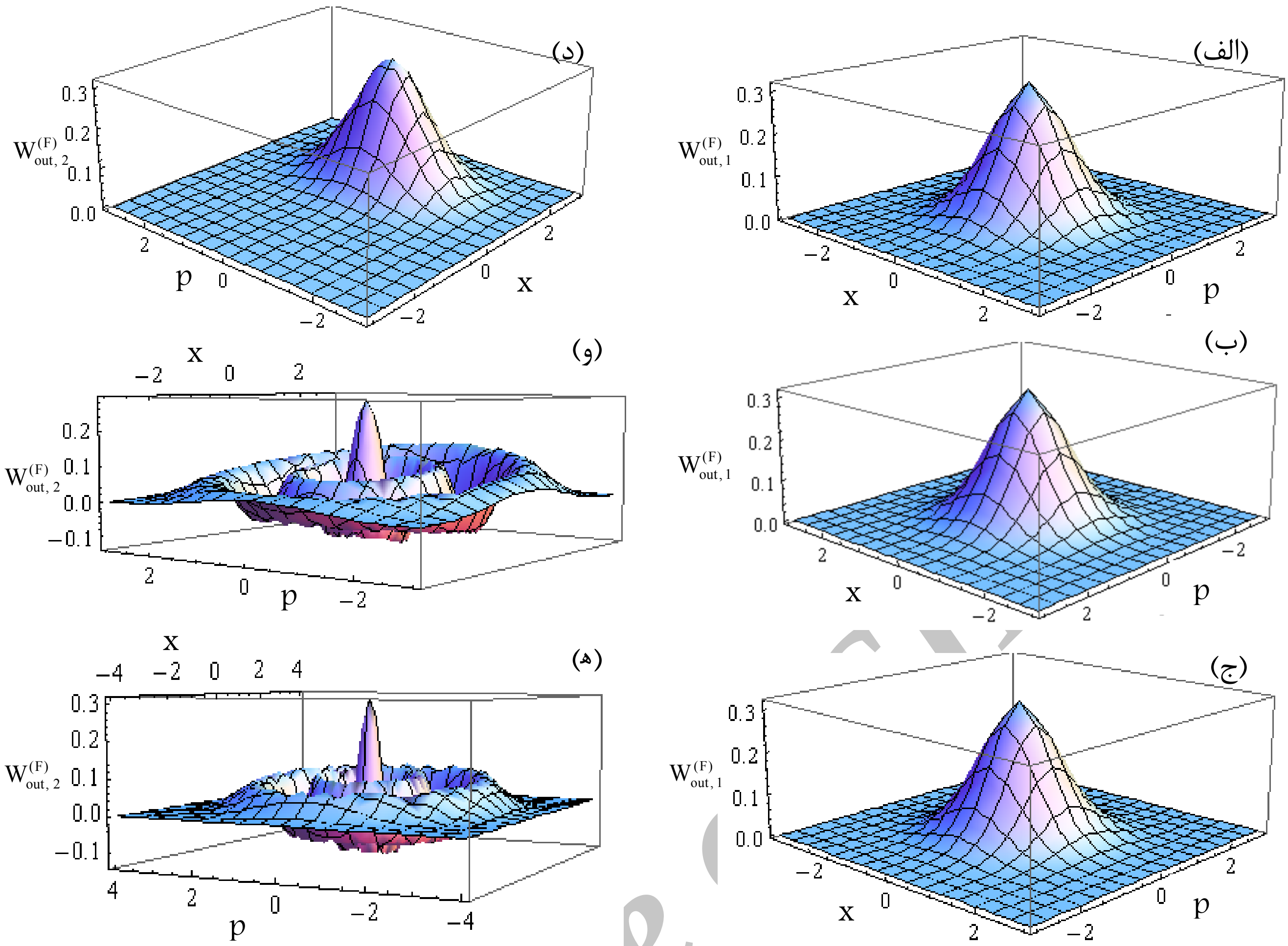
شکل ۳. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) تابع ویگنر ورودی $W_{in}^{(F)}$ مطابق رابطهٔ (۲۴) به ازای مقادیر خمیدگی (الف) $\lambda = 0$، (ب) $\lambda = 5$، (ج) $\lambda = 15$ و (د) $\lambda = 30$ رسم شده‌است.

$$W_{\rm in}^{(F)}(x,p)=\frac{e^{-(x^2+p^2)}}{M\pi}$$
$$\times\sum_{n,m=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}\,\frac{[g(\lambda,n)]![g^*(\lambda,m)]!\sqrt{n!}(-z)^n z^{*m}}{\sqrt{m!}}$$
$$\times[\sqrt{2}(x+ip)]^{m-n}\,L_n^{m-n}[2(x^2+p^2)]. \qquad (۲۴)$$

تابع ویگنر ورودی (۲۴) به صورت تابعی از متغیرهای مکان و اندازه حرکت به ازای مقادیر مختلف خمیدگی λ در شکل ۳ رسم شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش خمیدگی فضا ابتدا ارتفاع تک قلهٔ نامتقارن کنار نقطهٔ مرکزی $x = p = 0$ کاهش می‌یابد سپس قله‌ای فرعی و متقارن در نقطهٔ مرکزی ظاهر می‌شود و به تدریج تک قلهٔ نامتقارن به قله‌های دواری پیرامون قلهٔ مرکزی تغییر شکل می‌دهد که در بعضی از نواحی دارای مقادیر منفی هستند. بنابراین، همان گونه که انتظار داریم ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت ورودی با افزایش خمیدگی افزایش می‌یابد، و با افزایش بیشتر خمیدگی، الگوی تابع ویگنر به جز اندک افزایشی که در ارتفاع قلهٔ مرکزی می‌کند تغییر محسوس دیگری ندارد.

در شکل‌های ۴ و ۵ تابع ویگنر خروجی از درگاه‌های اول و دوم با به کار بردن تابع دی‌الکتریک (۲۰) محاسبه شده‌اند. به طور کلی مشاهده می‌کنیم که این توابع در دو وضعیت نزدیک و دور از بسامد تشدید محیط جاذب رفتارهای کاملا متفاوتی از خود نشان می‌دهند ولی اثر کلی آنها کاهش ویژگی‌های غیرکلاسیکی تابش ورودی به سبب اثرات اتلافی محیط است.

برای وضعیتی که حالت کوانتومی ورودی در نواحی دور از بسامد تشدید از محیط واقع شده است، $\omega/\omega_0 << 1$، تابع ویگنر خروجی از درگاه اول به ازای تمامی مقادیر خمیدگی همواره یک قلهٔ کاملاً مثبت و متقارن از خود نشان می‌دهد درحالی که تابع ویگنر خروجی از درگاه دوم تقریباً شبیه به تابع ویگنر ورودی است. به دلیل اینکه در نواحی دور از بسامد تشدید رابطهٔ $|R|^2+|T|^2 \approx 1$ برقرار است، از این‌رو، محیط جاذب تقریباً شبیه یک تیغهٔ تقسیم کنندهٔ نور بدون اتلاف با ضریب بازتاب $|R|^2 \approx 0$ و ضریب عبور $|T|^2 \approx 1$ عمل می‌کند. بنابراین تابع ویگنر خروجی از درگاه اول مستقل از مقدار خمیدگی که دارد شبیه تابع ویگنر حالت خلاء و تابع ویگنر



شکل ۴ . (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) تابع ویگنر خروجی درگاه اول و دوم $W^{(F)}_{out,1}$ و $W^{(F)}_{out,2}$ با پارامترهای مشابه شکل ۲، برای مقادیر مختلف خمیدگی رسم شده‌اند. در اینجا فرض شده است که تابش فرودی در نواحی دور از بسامد تشدید $\omega/\omega_0 = 0{,}01$ است با مقدار $z = 0{,}5$، $N = 4$ و مقادیر مختلف پارامتر خمیدگی (الف) و(د) $\lambda = 0$، (ب) و (و) $\lambda = 5$، (ج) و (هـ) $\lambda = 15$.

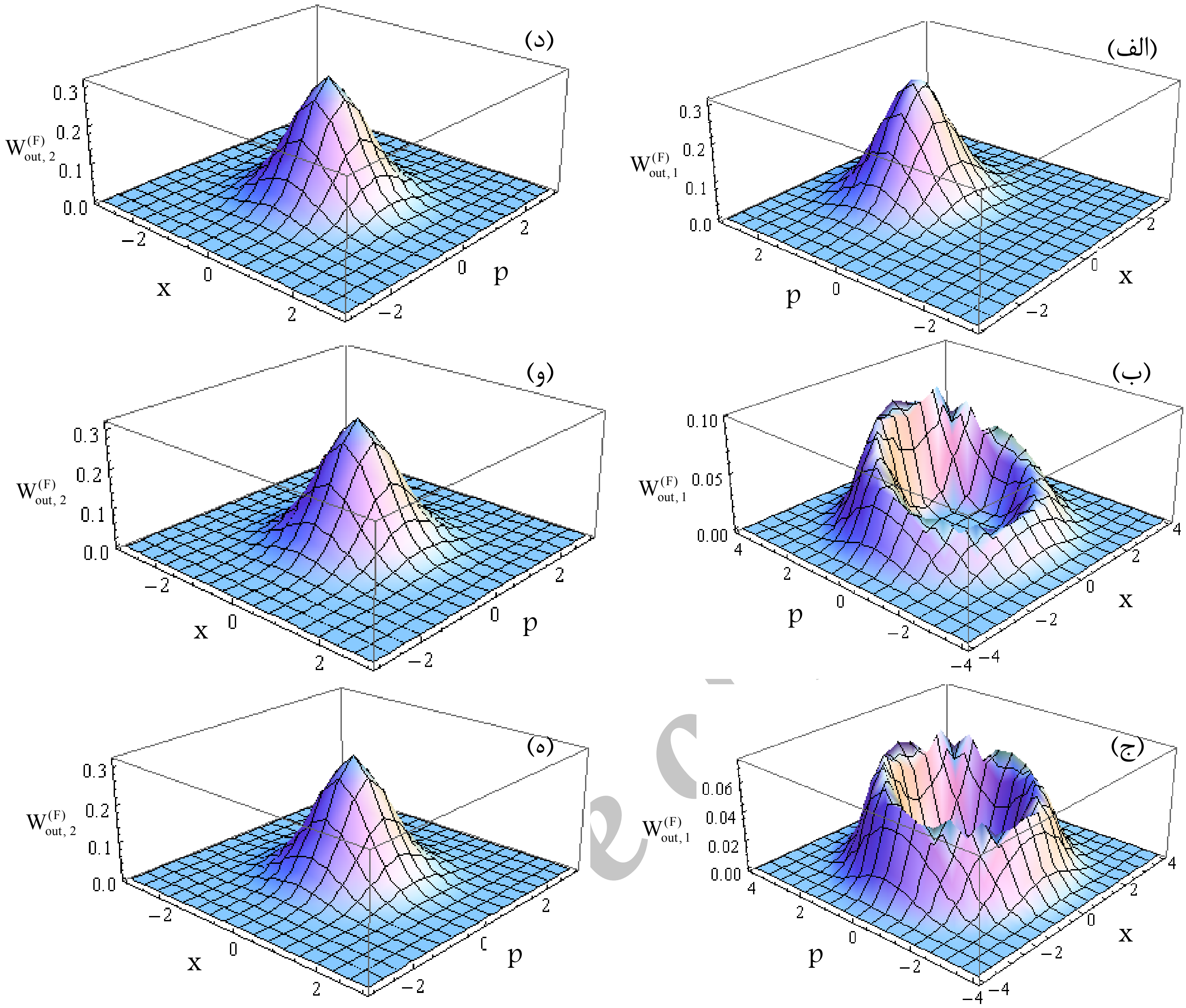
خروجی از درگاه دوم تقریباً شبیه به تابع ویگنر حالت‌های همدوس روی سطح کره رفتار می‌کند.

از طرف دیگر، برای وضعیتی که حالت کوانتومی ورودی در نواحی نزدیک بسامد تشدید از محیط واقع شده است، $\omega/\omega_0 \approx 1$، ضریب عبور از محیط تقریباً برابر صفر بوده ولی ضریب بازتاب به خاطر وجود اثرات اتلافی محیط کمتر از یک است. از این‌رو، حالت بازتابیده از درگاه دوم تقریباً نزدیک به حالت خلاء با تابع ویگنری مطابق شکل ۵ (د)، (و) و (هـ) است. در حالی که حالت بازتابیده از درگاه اول تقریباً مشابه به حالت همدوس روی سطح کره است که ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن به خاطر اثرات اتلافی محیط حذف شده است.

بنابراین مطابق شکل ۵ (الف)، (ب) و (ج) مقدار تابع ویگنر خروجی از درگاه اول هیچگاه منفی نمی‌شود. به عبارت دیگر اثرات بازتاب از محیط جاذب با افزایش مقدار خمیدگی باعث کاهش ارتفاع قلهٔ مرکزی تابع ویگنر ورودی و قلهٔ فرعی دوار پیرامونش تا مقدار صفر می‌شود. از این‌رو، مطابق شکل ۵ (ب) و (ج) ، فقط بیرونی‌ترین قلهٔ فرعی دوار باقی مانده است.

۳. ۲. درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی

یک حالت خالص از سامانهٔ کوانتومی دو بخشی AB که توسط عملگر چگالی ρ_{AB} توصیف می‌شود را جداپذیر گوییم اگر بتوانیم آن را به صورت حاصل‌ضربی از حالت‌های زیرسامانه



شکل ۵ . (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) تابع ویگنر خروجی از درگاه اول و دوم تیغهٔ دی‌الکتریکی با پارامترهای مشابه شکل ۲، برای مقادیر مختلف خمیدگی رسم شده است. در اینجا فرض شده است که تابش فرودی در بسامد تشدید $\omega/\omega_0=1$ است با مقدار $z=0/5$ ، $N=4$ و مقادیر مختلف پارامتر خمیدگی (الف) و(د) $\lambda=0$، (ب) و (و) $\lambda=5$، (ج) و (ه) $\lambda=15$.

هایش بنویسیم، به عبارت دیگر داشته باشیم: $\rho_{AB}=\rho_A\otimes\rho_B$. از طرف دیگر، حالت مخلوطی از سامانهٔ کوانتومی دو بخشی که در فضای هیلبرت $C^n\otimes C^m$ توسط عملگر چگالی ρ_{AB} توصیف می‌شود را جداپذیر گوییم اگر عملگر مزبور را بتوانیم به صورت $\rho_{AB}=\sum P^i\rho_A^i\otimes\rho_B^i$ بیان کنیم که در اینجا داریم: $P^i\ge 0$ ، $\sum P^i=1$ و $\rho^i_{A(B)}$ عملگرهای چگالی کاهش یافته‌ای هستند که از ردگیری روی درجات آزادی زیر سامانهٔ (B)A به دست می‌آیند. بنابراین سامانه‌های دو بخشی‌ای که به شکل‌های جداپذیر فوق نوشته نمی‌شوند را درهم‌تنیده گویند [۳۶]. در عمل، تعیین اینکه آیا سامانه هایی با حالت‌های کاملاً دلخواه را می‌توان به شکل جداپذیر فوق نوشت و یا نه بسیار مشکل است. از این‌رو، به سنجه‌هایی برای تعیین درجهٔ درهم‌تنیدگی این سامانه‌ها نیاز داریم.

برای وضعیتی که سامانهٔ دو بخشی در حالت خالص است، یگانهٔ سنجهٔ قابل قبول برای تعیین درجهٔ درهم‌تنیدگی سامانهٔ

کوانتومی، آنتروپی فون نویمن است که برای زیر سامانه‌های A و B به صورت $E(\hat{\rho}) = S_A = S_B = -Tr^{(A)}[\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_{AB}]$ تعریف می‌شود. مقدار آنتروپی فون نویمن برای وضعیتی که حالت کل سامانه جداپذیر باشد، صفر و برای حالتی که درهم‌تنیده باشد مثبت به دست می‌آید. بنابراین این سنجه به نحوی میزان درهم‌تنیدگی حالت سامانه را اندازه‌گیری می‌کند.

تعیین درجهٔ درهم‌تنیدگی برای حالت‌های مخلوط بسیار پیچیده‌تر از حالت خالص بوده و بدین منظور تاکنون سه سنجه پیشنهاد شده است [۳۷]. یکی از این سنجه‌ها درهم‌تنیدگی قابل تقطیر [۱] است که بیانگر میزان درهم‌تنیدگی خالصی است که می‌توان از عملگر چگالی $\hat{\rho}_{AB}$ استخراج کرد. سنجهٔ دیگر درهم‌تنیدگی تشکیل [۲] است که نسخهٔ بهنجار یافتهٔ آن هزینهٔ درهم‌تنیدگی نامیده می‌شود و میزان درهم‌تنیدگی خالص مورد نیاز برای ایجاد $\hat{\rho}_{AB}$ را بیان می‌کند. سنجهٔ آخر، آنتروپی نسبی $E(\hat{\rho}) = -\min_{\hat{\sigma} \in S} Tr[\hat{\rho}_{AB}(\ln \hat{\rho}_{AB} - \ln \hat{\sigma})]$ است که در اینجا S مجموعهٔ تمام حالت‌های کوانتومی جداپذیری است که سامانهٔ کل می‌تواند در آن آماده‌سازی شود. این سنجه برای حالت‌های خالص به آنتروپی فون نویمن برای هر یک از زیر سامانه‌هایش تبدیل می‌شود. در عمل هنوز مشخص نیست که چگونه می‌توان به طور مؤثر این سه سنجه را برای حالت‌های مخلوط دلخواه از جمله سامانه‌های کوانتومی نوفه‌ای که در این مقاله با آن روبه‌رو هستیم محاسبه کرد. اگرچه تنها یک استثناء نیز وجود دارد و آن هم در مورد درهم‌تنیدگی تشکیل حالت‌های دو کیوبیتی است که وترز [۳] برحسب تلاقی [۴] به دست آورده است [۳۸].

از آنجایی که حالت‌های کوانتومی خروجی (۱۸) همانند تمام سامانه‌های نوفه‌ای دیگر، در یک حالت مخلوط آماری به سر می‌برند و از طرف دیگر هنوز هیچ عبارت صریحی برای محاسبهٔ سنجه‌های معرفی شدهٔ فوق برای حالت‌های دلخواه وجود ندارد، از این‌رو ما از سنجه‌های قابل محاسبهٔ دیگری برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی دو حالت خروجی از تیغهٔ دی‌الکتریک استفاده می‌کنیم. اگرچه این سنجه‌ها صرفاً همبستگی‌های کوانتومی، از قبیل درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی، را نشان نمی‌دهند ولی در به دست آوردن بینشی در مورد علل کاهش همبستگی‌های کوانتومی بسیار سودمند هستند.

یکی از این سنجه‌ها شاخص همبستگی [۵] و یا آنتروپی متقابل نامیده می‌شود که متناظر با آن آنتروپیی است که توسط دو زیر سامانه به اشتراک گذاشته می‌شود. به عبارت دیگر، آنتروپی متقابل برای سامانهٔ ما بیانگر میزان کل همبستگی‌ای است که در دو حالت خروجی از تیغهٔ دی‌الکتریک نهفته است و به صورت $I_c = S_1 + S_2 - S$ تعریف می‌شود [۳۹ و ۴۰]. در این جا S آنتروپی فون‌نیومن سامانهٔ دو بخشی متشکل از دو حالت خروجی از تیغهٔ دی‌الکتریک و S_iها آنتروپی‌های فون‌نیومن حالت خروجی از درگاه iام هستند. این سنجه همیشه بزرگ‌تر و مساوی صفر است و با استفاده از نامساوی اراکی–لیب [۶] به سادگی می‌توان نشان داد که این سنجه دارای کران بالایی بدین شکل است: $I_c \le 2\min[S_1, S_2]$ [۳۹]. این سنجه همهٔ همبستگی‌ها از جمله همبستگی‌های کلاسیکی و همبستگی‌های کوانتومی را در بر دارد. از این‌رو، با استفاده از این سنجه نمی‌توان درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی را از همبستگی‌های کلاسیک تمیز داد. به طوری که ممکن است برای حالت‌های جداپذیری مقادیر مخالف صفر آنتروپی متقابل حاصل شود. از طرف دیگر نشان داده است که یک سامانهٔ دوبخشی با آنتروپی اضافی $\min[S_1, S_2] \le I_c \le 2\min[S_1, S_2]$ درهم‌تنیده است [۳۹ و ۴۰]. بنابراین، یک شرط لازم برای اینکه سامانهٔ دو بخشی جداپذیر باشد برابر است با: $0 \le I_c \le \min[S_1, S_2]$. بر این اساس، با تعریف پارامتر درهم‌تنیدگی $g = \dfrac{I_c}{\min[S_1, S_2]}$ دیده می‌شود که $0 \le g \le 2$ خواهد بود. بنابراین، اگر $1 < g \le 2$ باشد، سامانهٔ دوبخشی ما درهم‌تنیده بوده و شرط $0 \le g \le 1$، نشانگر یک شرط لازم برای جداپذیری حالت‌ها است [۴۱].

در شکل ۶ نمودار تغییرات آنتروپی فون نویمن برای

۱. distillable entanglement

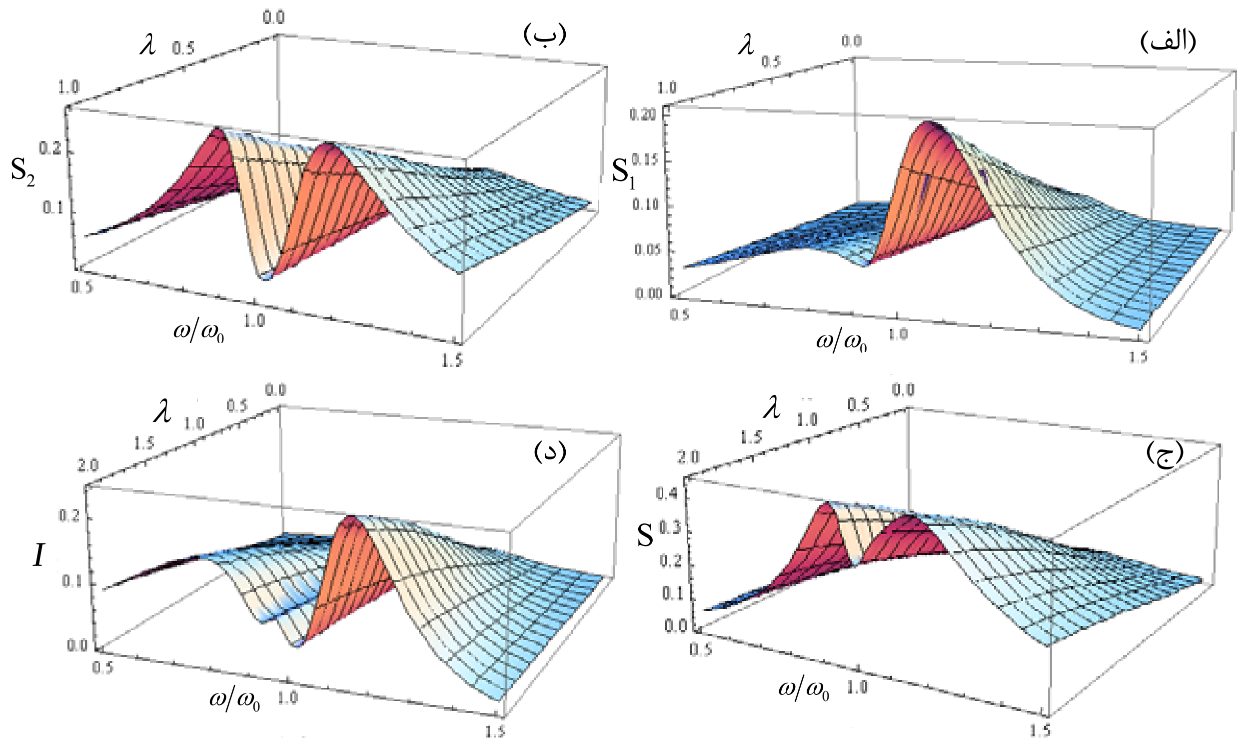
۲. entanglement of formation

۳. Wootters

۴. concurrence

۵. index of correlation

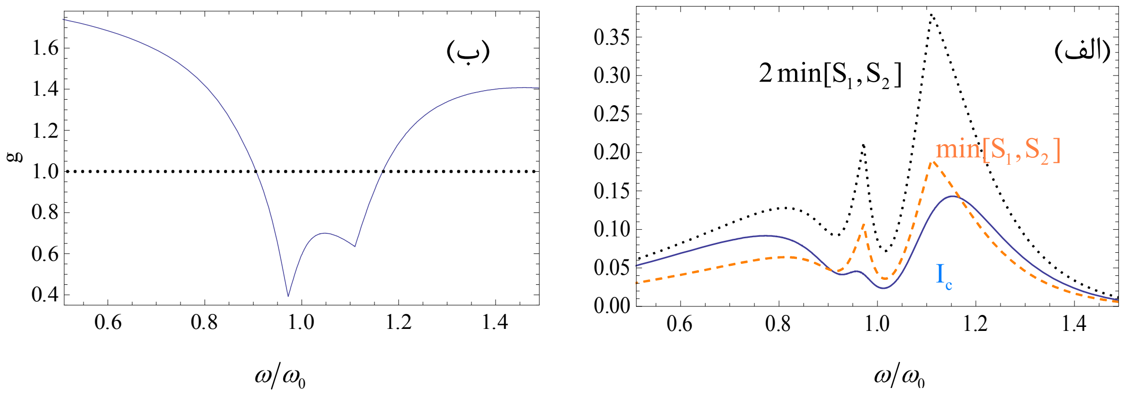
۶. Araki-Lieb



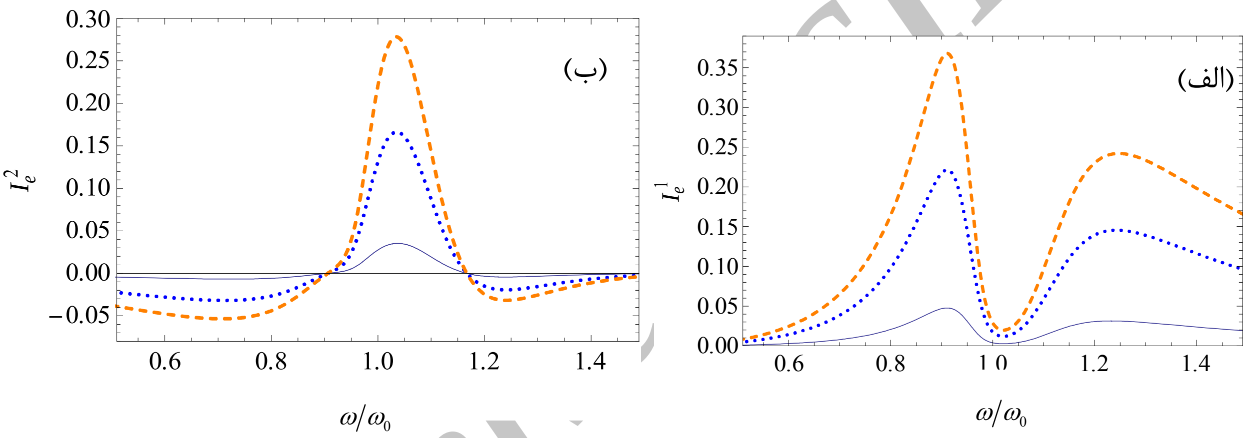
شکل ۶ . (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات آنتروپی فون نویمن برای حالت‌های خروجی ۱ (الف)، ۲ (ب)، هر دو حالت (ج) و همچنین آنتروپی متقابل (د) برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 و پارامتر خمیدگی λ رسم شده‌اند. در اینجا $N=2$ ، $z=0/5$ و پارامترهای به کار رفته برای محیط دی‌الکتریک مشابه شکل ۲ است.

حالت‌های خروجی از درگاه ۱ و ۲ و همچنین آنتروپی متقابل آنها برحسب بسامد موج فرودی و پارامتر خمیدگی λ رسم شده است. همان گونه که انتظار داریم، مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر خمیدگی λ اثرات غیرکلاسیکی و همبستگی‌های حالت‌های خروجی افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌کنیم که نمودار تغییرات آنتروپی فون‌نیومن برای حالت‌های خروجی ۱ و ۲ برحسب بسامد ω/ω_0، رفتاری مشابه تغییرات ضرایب بازتاب و عبور، شکل ۲، از خود نشان می‌دهند. در شکل ۶ (د) نیز مشاهده می‌شود که بیشینهٔ درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی در بسامدهای $\omega \approx 0/8\omega_0$ و $\omega \approx 1/15\omega_0$ رخ می‌دهد، در صورتی که در نواحی نزدیک بسامد تشدید ω_0 تقریباً هیچ همبستگی وجود ندارد. این عدم همبستگی بدین دلیل است که فوتون‌های فرودی بر دی‌الکتریک، بیشترین بازتاب و جذب را پیدا می‌کنند، پس در عمل هیچ مخلوط شدگی از حالت‌های فرودی وجود ندارد. در نواحی کمی دورتر از بسامد تشدید ω_0 که اثرات جذب محیط ناچیز هستند مشاهده می‌کنیم که آنتروپی متقابل تقریباً به بیشینهٔ مقدار خود نزدیک می‌شود.

در شکل ۷ قسمت (الف) نمودار تغییرات آنتروپی متقابل نشان داده شده در شکل ۶ (د)، بیشینه آنتروپی متقابل و کمینهٔ آنتروپی متقابل و در قسمت (ب) نمودار پارامتر درهم‌تنیدگی g به ازای پارامتر خمیدگی $\lambda=1$ رسم شده‌اند. در اینجا نیز مشاهده می‌کنیم که در نواحی دور از بسامد تشدید ω_0 که اثرات جذب محیط ناچیز است، پارامتر درهم‌تنیدگی g بین عدد یک و دو قرار می‌گیرد و بنابراین حالت‌های خروجی درهم‌تنیده هستند. از طرف دیگر، در نواحی نزدیک به بسامد تشدید ω_0 که اثرات جذب و بازتاب محیط زیاد است، پارامتر درهم‌تنیدگی g بین عدد صفر و یک واقع می‌شود که در این صورت انتظار داریم که حالت‌های خروجی جداپذیر باشند. ولی واقع شدن پارامتر درهم‌تنیدگی بین عدد صفر و یک بیانگر



شکل ۷. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) (الف) نمودار تغییرات آنتروپی متقابل (منحنی پررنگ)، بیشینهٔ آنتروپی متقابل $2\min[S_1,S_2]$ (منحنی نقطه‌چین) و کمینهٔ آنتروپی متقابل $\min[S_1,S_2]$ (ب) نمودار پارامتر درهم‌تنیدگی g، برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 رسم شده‌اند. . در اینجا $N=2$، $z=0/5$ و پارامترهای به کار رفته شده برای محیط دی‌الکتریک مشابه شکل ۲ است.

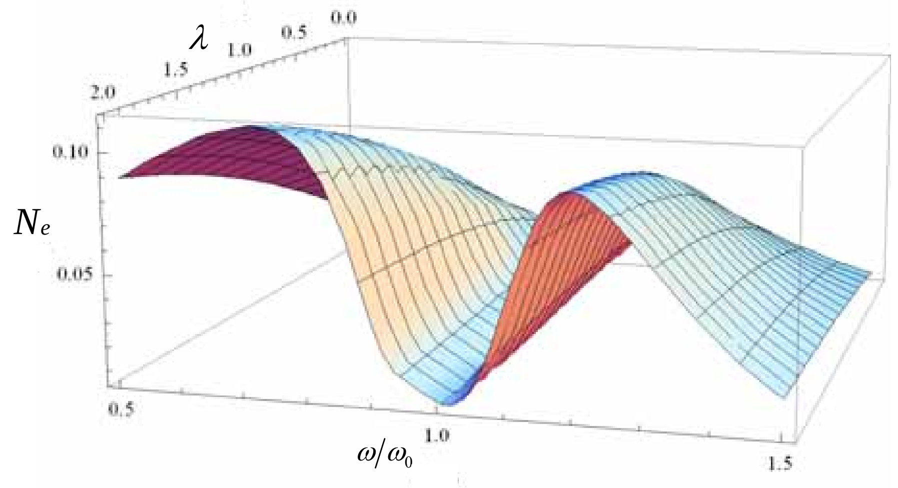


شکل ۸ . (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) (الف) نمودار تغییرات آنتروپی شرطی برای درگاه خروجی ۱ و (ب) درگاه خروجی ۲ به ازای $\lambda=0$ (منحنی پررنگ)، $\lambda=1$ (منحنی نقطه‌چین) و $\lambda=2$ (منحنی خط‌چین) برحسب ω/ω_0 رسم شده‌اند. در اینجا $N=2$، $z=0/5$ و پارامترهای به کار رفته شده برای محیط دی‌الکتریک مشابه شکل ۲ است.

یک شرط لازم و نه یک شرط کافی برای جداپذیری حالت‌ها است. بنابراین ما به سنجه‌های دیگری نیاز داریم تا به طور دقیق تعیین کنیم آیا جداپذیری حالت‌ها در این ناحیه رخ داده است و یا خیر.

سنجهٔ دیگری که می‌توانیم برای تعیین درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی به کار ببریم سنجهٔ آنتروپی شرطی $I_e^i=S-S_i$ با $i=1,2$ است [۴۰ و ۴۲]. در واقع این سنجه، آنتروپی یک زیر سامانه را پس از اندازگیری روی زیر سامانهٔ دیگر نشان می‌دهد که منفی شدن آن نشانهٔ درهم‌تنیدگی و غیرکلاسیکی بودن سامانه است. بنابراین یک شرط لازم برای جداپذیری این است که آنتروپی‌های شرطی مثبت شوند، زیرا همیشه آنتروپی کل یک سامانهٔ کلاسیکی از آنتروپی زیر سامانه‌های تشکیل‌دهنده‌اش بیشتر است.

در شکل ۸ نمودار تغییرات آنتروپی‌های شرطی به ازای مقادیر متفاوت λ برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 رسم شده است. مشاهده می‌شود که آنتروپی شرطی حالت خروجی ۱ در تمام بازهٔ بسامد مثبت است، در حالی که برای حالت خروجی ۲ در نواحی نزدیک بسامد تشدید مثبت و در نواحی دورتر از



شکل ۹. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات سنجهٔ منفی N_e برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 و پارامتر خمیدگی λ رسم شده است. در اینجا $N=2$، $z=0/5$ و پارامترهای به کار رفته شده برای محیط دی‌الکتریک مشابه شکل ۲ است.

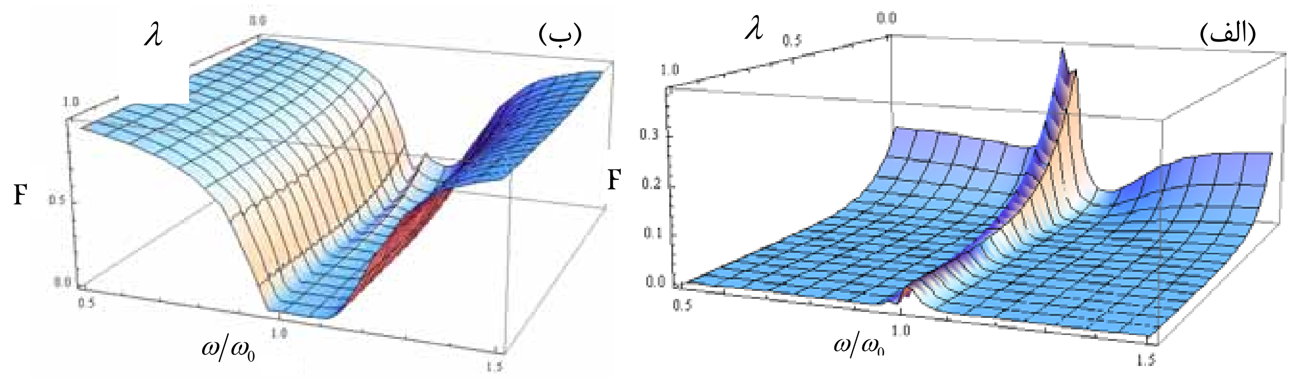
بسامد تشدید منفی است و این مقادیر مثبت و منفی با افزایش پارامتر خمیدگی λ افزایش می‌یابند. بنابراین همانند نتایج قبل در این جا نیز دیده می‌شود که در نواحی دورتر از بسامد تشدید که اثرات جذب محیط کمتر است، حالت‌های خروجی درهم‌تنیده هستند و همان گونه که انتظار داریم این درهم‌تنیدگی‌ها با افزایش پارامتر خمیدگی λ افزایش پیدا می‌کند. به علاوه، از مقایسه شکل ۸ (ب) با شکل ۷ (ب) مشاهده می‌شود که در بسامدهای $\omega \approx 0/9\omega_0$ و $\omega \approx 1/15\omega_0$ که متناظر است با بیشینه‌های همبستگی‌های کلاسیکی با پارامتر درهم‌تنیدگی $g=1$، آنتروپی شرطی صفر می‌شود که این مشاهدات با نتایج مرجع [۴۰] در سازگاری کامل هستند.

سنجهٔ قابل محاسبه دیگر که نقش به سزایی در پرکردن خلاء مطالعاتی در محاسبهٔ درجهٔ درهم‌تنیدگی‌های حالت‌های مخلوط دارد سنجهٔ منفیت[۱] است. این سنجه که بر اساس ترانهادهٔ جزئی ماتریس چگالی $\rho^{T_1}_{i\alpha,j\beta} \equiv \rho_{j\alpha,i\beta}$ پایه‌ریزی شده است به نوعی یک نسخهٔ کمی از ملاک پرز[۲] برای جداپذیری حالت‌ها بوده [۴۳] و تعیین کنندهٔ یک کرانه بالایی برای درهم‌تنیدگی قابل تقطیر است [۳۷]. مطابق این ملاک یک شرط لازم برای جداپذیری حالت‌ها، مثبت معین بودن ترانهادهٔ جزئی ماتریس چگالی سامانه است. البته هرودکی[۳] نشان داده است که این شرط برای جداسازی سامانه‌های $C^n \otimes C^m$ یک شرط کافی نیز هست اگر $nm \le 6$ باشد [۴۴].

سنجهٔ منفیت بر اساس ترانهادهٔ جزئی ماتریس چگالی ρ^{T_1} به صورت $N_e = \dfrac{\left\|\rho^{T_1}\right\|_1 - 1}{2}$ تعریف می‌شود که $\left\|\rho^{T_1}\right\|_1$ رد نرم ρ^{T_1} است و برای عملگرهای هرمیتی مانند ρ^{T_1} برابر است با $\left\|\rho^{T_1}\right\|_1 = Tr\sqrt{(\rho^{T_1})^{\dagger}\rho^{T_1}} = \sum_i |\mu_i|$ که μ_i ها ویژه مقادیر عملگر ρ^{T_1} هستند [۳۷]. بنابراین سنجهٔ منفیت N_e به صورت حاصل جمع ویژه مقادیر منفی عملگر ρ^{T_1} نوشته می‌شود. از این‌رو این سنجه، که تا اندازه‌ای که ρ^{T_1} نمی‌تواند مثبت معین باشد، را اندازگیری می‌کند، برای حالت‌های غیر درهم‌تنیده برابر عدد صفر به دست می‌آید.

از آنجا که ما در اینجا می‌خواهیم از شرط لازم و کافی بودن سنجهٔ منفیت در جداپذیری حالت‌های خروجی استفاده کنیم، لذا بعد فضای مربوط به حالت همدوس غیرخطی را برابر $N=2$ در نظر می‌گیریم تا ماتریس چگالی کاهش یافته (۱۸) در فضای $C^2 \otimes C^2$ عمل کند. در شکل ۹ نمودار تغییرات سنجهٔ N_e را برحسب بسامد بدون بعد

۱. Negativity
۲. Peres
۳. Horodecki



شکل ۱۰. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات همانندی برای حالت‌های بازتاب یافته (الف) و عبور کرده (ب) برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 و پارامتر خمیدگی λ رسم شده‌اند. در اینجا $N=2$، $z=0/5$ و پارامترهای به کار رفته شده برای محیط دی‌الکتریک مشابه شکل ۲ است.

ω/ω_0 و پارامتر خمیدگی λ رسم کرده‌ایم. همان گونه که انتظار داشتیم، مجدداً مشاهده می‌کنیم که با افزایش پارامتر خمیدگی λ اثرات درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌کنیم که در بسامد تشدید ω_0، همانند سنجهٔ آنتروپی متقابل، درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی حتی با افزایش پارامتر خمیدگی λ تقریباً برابر صفر است زیرا فوتون‌های فرودی بر دی الکتریک، بیشترین بازتاب و جذب را پیدا می‌کنند و بنابراین عملاً هیچ مخلوط شدگی از حالت‌های فرودی وجود ندارد. در صورتی که در نواحی کمی دورتر از بسامد تشدید ω_0 که اثرات جذب محیط ناچیز هستند، سنجهٔ منفی N_e تقریباً به بیشینه مقادیر خود نزدیک می‌شود و خود این بیشینه مقادیر نیز با افزایش پارامتر خمیدگی λ افزایش می‌یابند. در نهایت، در نواحی خیلی دورتر از بسامد تشدید ω_0، که تقریباً ضریب بازتاب و عبور به ترتیب برابر صفر و یک می‌شوند، این سنجه به مقدار صفر میل می‌کند. زیرا در چنین وضعیتی هم هیچ مخلوط شدگی از حالت‌های فرودی وجود ندارد (شکل ۹). بنابراین نتیجه می‌گیریم که درهم‌تنیدگی حالت‌ها به شدت به خواص اپتیکی مواد به کار رفته برای تولید ادوات اپتیکی، که حالت‌های مختلف فیزیکی از آنها عبور و بازتاب می‌کنند، بستگی دارد.

۳. ۳. همانندی

همانندی را می‌توان به عنوان سنجه‌ای از نزدیکی دو حالت کوانتومی نسبت به همدیگر در فضای هیلبرت در نظر گرفت. اگر عملگر چگالی ورودی و خروجی سامانه به ترتیب توسط روابط (۱۵) و (۱۸) بیان شوند، همانندی برای حالت بازتاب یافته از تیغهٔ دی‌الکتریک توسط رابطهٔ زیر بیان می‌شود [۲۹]

$$
\begin{aligned}
F &= \mathrm{Tr}\left(\rho_{in}^{(F)}\rho_{out}^{(F)}\right) \\
&= |M|^{-2}\sum_{n,m=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\sum_{k'=0}^{m}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{m}\binom{N}{k}\binom{N}{k'}} \\
&\times\binom{n}{k}\binom{m}{k'}\frac{[g(\lambda,n)]![g^*(\lambda,m)]![g(\lambda,k')]!}{\sqrt{n!m!}} \\
&\times\frac{[g^*(\lambda,k)]!z^n z^{*m} z^{k'} z^{*k}}{\sqrt{n!m!}} \\
&\times\sqrt{k!k'!}(n-k)!\left(1-|T|^2-|R|^2\right)^{n-k} R^k R^{*k'}\delta_{m-k',n-k}\,.
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

رابطه‌ای مشابه نیز همانندی حالت عبور کرده از تیغهٔ دی‌الکتریک را نشان می‌دهد که در آن به جای ضریب بازتاب R ضریب عبور T جانشین شده است.

در شکل ۱۰ نمودار تغییرات همانندی را برای حالت‌های بازتاب یافته و عبور کرده برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_0 و پارامتر خمیدگی λ رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌کنیم که با افزایش پارامتر خمیدگی همانندی حالت بازتاب یافته به شدت کاهش و به مقدار صفر میل می‌کند در حالی‌که این کاهش برای حالت عبوری با شیب بسیار آرام همراه است. علاوه بر این، همانندی

در بسامد تشدید برای حالت‌های بازتاب یافته بیشنه مقدار خود را دارا است، زیرا بیشترین ضریب بازتاب در بسامد تشدید رخ می‌دهد. برای حالت عبور کرده نیز به خاطر جذب شدید در نزدیکی بسامد تشدید، مقدار همانندی به کمترین مقدار خود یعنی صفر می‌رسد. از طرف دیگر، در نواحی دورتر از بسامد تشدید که اثرات جذب محیط کمتر است، به طوری که ضرایب بارتاب و عبور تقریباً برابر صفر و یک هستند، همانندی برای حالت‌های بازتاب یافته تقریباً برابر صفر و برای حالت‌های عبور کرده تقریباً برابر یک است.

۴. نتیجه‌گیری

با به کار بردن رهیافت پدیده‌شناختی در کوانتش امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های جاذب و پاشنده و با مفروض بودن تابع دی‌الکتریک سامانهٔ موردنظر که به طور تجربی قابل محاسبه است، اثرات کوانتومی جذب، بازتاب و عبور تیغهٔ دی‌الکتریک بر ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های کوانتومی فرودی را برحسب عملگر چگالی به دست آوردیم. مشاهده کردیم که در نتیجهٔ جذب، حالت‌های کوانتومی خروجی به حالت کوانتومی دی‌الکتریک در زمان فرود تابش‌ها بستگی دارد و بدین صورت، امکان دستکاری حالت‌های کوانتومی فراهم می‌شود. نتایج به دست آمده در اینجا را می‌توان به عنوان الگویی برای توصیف اثرات جذب و پاشندگی محیط دی‌الکتریک در سامانه‌هایی از قبیل شکافنده‌های نور، فیبرهای نوری، وسایل تداخل سنجی و... به کار برد. از آنجا که جذب به طور حتم با نوفه نیز همراه است، سامانه‌های مزبور را می‌توان به صورت کانال‌های نوفه‌ای برای عبور اطلاعات کوانتومی نیز در نظر گرفت. در این مقاله حالت‌های فرودی بر دی‌الکتریک از سمت چپ و راست را به ترتیب حالت همدوس غیرخطی روی سطح کره و حالت خلاء در نظر گرفته و محیط دی‌الکتریک را با مدل لورنتس الگوبندی کردیم. همچنین برای سادگی محاسبات فرض کردیم که دی‌الکتریک در دمای صفر نگه‌داری شود. با به کاربردن عملگرهای چگالی به دست آمده از کوانتش میدان‌های الکترومغناطیسی و روابط کوانتومی ورودی- خروجی، توابع ویگنر خروجی از محیط را محاسبه کرده و مشاهده کردیم که این توابع در دو وضعیت نزدیک و دور از بسامد تشدید محیط جاذب رفتارهای کاملا متفاوتی از خود نشان می‌دهند ولی اثر کلی آنها کاهش ویژگی‌های غیرکلاسیکی تابش ورودی به سبب اثرات اتلافی محیط است، به طوری که حتی با افزایش پارامتر خمیدگی λ که منجر به افزایش خواص غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس غیرخطی متناظر می‌شود، اثر جذب در کاهش ویژگی‌های غیرکلاسیکی را نمی‌توان جبران کرد.

در نهایت برای محاسبهٔ درهم‌تنیدگی دو حالت خروجی از تیغهٔ دی‌الکتریک که در یک حالت مخلوط آماری بسر می‌برند، سنجه‌های قابل محاسبه‌ای از قبیل آنتروپی متقابل، آنتروپی شرطی و منفیت را به کار بردیم. مشاهده کردیم که در بسامد تشدید، درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی حتی با افزایش پارامتر خمیدگی λ تقریباً برابر صفر است، زیرا فوتون‌های فرودی بر دی‌الکتریک، بیشترین بازتاب و جذب را پیدا می‌کنند و عملاً هیچ مخلوط شدگی از حالت‌های فرودی وجود ندارد. در صورتی‌که در نواحی کمی دورتر از بسامد تشدید ω_0 که اثرات جذب محیط ناچیز هستند، درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی به بیشینهٔ مقدار خود می‌رسند و این بیشینه‌ها حتی با افزایش پارامتر خمیدگی λ نیز افزایش می‌یابند. درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی در نواحی خیلی دورتر از بسامد تشدید ω_0 که تقریباً ضرایب بازتاب و عبور برابر صفر و یک هستند دوباره به مقدار صفر میل می‌کنند. زیرا در چنین وضعیتی باز هم هیچ مخلوط‌شدگی از حالت‌های فرودی وجود ندارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی، حتی برای حالت‌های غیرکلاسیکی‌ای همانند حالت همدوس غیرخطی، به شدت به خواص اپتیکی مواد به کار رفته برای تولید ادوات اپتیکی بستگی دارد.

قدردانی

نویسندگان، از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده قدردانی می‌نمایند.

مراجع

1. R J Glauber and M Lewenstein, *Phys. Rev*. A **43** (1991) 467.
2. B Huttner and S M Barnett, *Phys. Rev*. A **46** (1992) 4306.
3. R Matloob and R Loudon, *Phys. Rev*. A **53** (1996) 4567.
4. H T Dung, S Y Buhmann, L Knoll, D G Welsch, S Scheel, and J Kastel, *Phys. Rev*. A **68** (2003) 043816.
5. R Matloob, *Phys. Rev*. A **70** (2004) 022108.
6. W Vogel and D -G Welsch, "*Quantum Optics*", Wiley-Vch, Berlin (2006).
7. F Kheirandish and M Amooshahi, *Phys. Rev*. A **74** (2006) 042102.
8. M Amooshahi, *J. Math. Phys*. **50** (2009) 062301.
9. F Kheirandish and E Amooghorban, *Phys. Rev*. A **82** (2010) 042901.
10. F Kheirandish, E Amooghorban, and M Soltani, *Phys. Rev*. A **83** (2011) 032507.
11. E Amooghorban, M Wubs, N Asger Mortensen, and F Kheirandish, *Phys. Rev. A* **84** (2011) 013806.
12. M Artoni and R Loudon, *Phys. Rev*. A **55** (1997) 1347.
13. R Loudon, *Proc. R. Soc. London* A **355** (1997) 2313.
14. J Jeffers and S M Barnett, *J. Mod. Opt*. **41** (1994) 1121.
15. E Schmidt, L Knoll, and D-G Welsch, *Phys. Rev*. A **54** (1996) 843.
16. M Artoni and R Loudon, *Phys. Rev*. A **59** (1999) 2279.
17. E Amooghorban, N Asger Mortensen, and M Wubs, *Phys. Rev. Lett*. **110** (2013) 153602.
18. R Matloob and G Pooseh, *Optics Communications* **181** (2000) 109.
19. E Shrodinger, *Die Naturwissenschaften* **14** (1926) 664.
20. F T Arecchi, E Courtens, R Gilmore, and H Thomas, *Phys. Rev*. A **6** (1972) 2211.
21. G S Agarwal, *Opt. Commun*. **42** (1982) 205.
22. A M Perelomov, "*Generalized Coherent States and Their Applications*", Springer, Berlin (1986).

۲۳. ع مهدی‌فر، "*ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی*"، پایان‌نامه دکتری، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان (۱۳۸۶).

24. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **37** (2004) 8111.
25. M Bagheri Harouni, R Roknizadeh, and M H Naderi, *J. Phys*. A: *Math. Gen*. **42** (2009) 045403.
26. A Mahdifar, R Roknizadeh, and M H Naderi, *J. Phys. A: Math. Gen*. **39** (2006) 7003.
27. A Mahdifar, W Vogel, T Richter, R Roknizadeh, and M H Naderi, *Phys. Rev*. A **78** (2008) 63814.
28. S Scheel, L Knoll, T Opatrny, and D-G Welsch, *Phys. Rev*. A **62** (1998) 043803.
29. A V Chizhov, E Schmidt, L Knoll, and D-G Welsch, *J. Opt*. B: *Quantum Semiclass. Opt*. **3** (2001) 77.
30. C K Law and J H Eberly, *Phys. Rev. Lett*. **76** (1996) 1055.
31. K Vogel, V M Akulin, and W P Schleich, *Phys. Rev. Lett*. **71** (1993) 1816.
32. A Vidiella-Barranco and J A Roversi, *Phys. Rev*. A **58** (1998) 3349.
33. M O Scully and M S Zubairy, "*Quantum Optics*", Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).