مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۶، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۵

وابستگی نرخ خشک‌شدگی به مقدار رطوبت در محیط‌های متخلخل

رضا ترابی[۱]، سهیل واشقانی فراهانی[۱] و غلامرضا جعفری[۲]

۱. دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه تفرش، تفرش

۲. دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: rezatorabi@aut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۹/۶ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۴/۱۰/۳۰)

چکیده

در این کار با استفاده از نظریهٔ پیمایش تصادفی، فرایند خشک شدن در محیط‌های متخلخل را مدل‌سازی می‌کنیم. بدین منظور ابتدا وابستگی نرخ خشک‌شدگی به کمیت‌های میکروسکوپی به دست آمده از پیمایش تصادفی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس رابطهٔ بین نرخ خشک‌شدگی و مقدار رطوبت را در حضور همرفت به دست می‌آوریم. نتایج به دست آمده در این مطالعه، اثر همرفت در فرایند خشک‌سازی در محیط‌های متخلخل را به تصویر می‌کشد.

واژه‌های کلیدی: محیط‌های متخلخل، پیمایش تصادفی، ریاضیات کسری، نرخ خشک‌شدگی

۱. مقدمه

بر کسی پوشیده نیست که آب نقش حیاتی در زندگی ما دارد.گاهی اوقات نیاز داریم که آن را برای کشاورزی و یا آشامیدن حفظ نماییم و گاهی اوقات به طور مثال در صنعت، هدف این است که یک ماده را از دست رطوبت خلاص کنیم. در اینجا می‌خواهیم نحوهٔ خشک‌شدگی و یا چگونگی از دست رفتن آب را در محیط‌های متخلخل به تصویر بکشیم. این به ما کمک می‌کند تا شرایطی را مهیا سازیم که آب را در طبیعت حفظ نماییم یا آن را به منظور خشک‌سازی موادی نظیر چوب حذف کنیم.

در پدیدهٔ خشک‌شدگی، تخلخل محیط نقش مهمی در نرخ آن بازی می‌کند. اگر بخواهیم فرایند خشک شدن را بررسی و مدل‌سازی کنیم باید از سازوکار پخش در محیط‌های متخلخل بهره گیریم. پخش در محیط‌های متخلخل می‌تواند توسط پیمایش تصادفی[۱] روی ساختار فرکتالی مدل‌سازی شود [۱]. در حقیقت با در نظر گرفتن یک محیط متخلخل به عنوان ساختاری فرکتالی، امکان مدل‌سازی چنین فرایندی مهیا می‌گردد [۲]. ولی باید در نظر داشت که برای حالتی که سوق یا همرفت نیز در

۱. Random walk

دستگاه وجود دارد، به دلیل پیچیدگی‌های ریاضیاتی که به وجود می‌آید، استفاده از ریاضیات کسری برای مدل‌سازی فرایند خشک‌شدگی بسیار مفید خواهد بود که در این مقاله بدان خواهیم پرداخت.

وجود تخلخل باعث می‌شود که پویندهٔ تصادفی[۱] دسترسی به همهٔ فضای سه‌بعدی را نداشته باشد. درحقیقت تخلخل مانع دسترسی به همهٔ قسمت‌های محیط شده و باعث می‌گردد که دسترسی به برخی مکان‌ها محتمل‌تر از قسمت‌های دیگر شود. این واقعیت منجر به یک پخش ناهنجار[۲] شده و نتیجه این می‌شود که پیمایش تصادفی از تخلخل دستگاه تأثیر پذیرفته و غیرمارکوی[۳] می‌گردد. این گونه فرایندها را می‌توان با ابزار جدیدی بنام ریاضیات کسری[۴] بررسی نمود. براساس این ابزار، یک فرایند مارکوی در فضایی کمتر از سه‌بعد (مثلاً یک فضای سه‌بعدی با محدودیت)، هم‌ارز با یک فرایند غیرمارکوی بدون محدودیت در سه‌بعد است [۳ و ۴] که مطالعهٔ آن آسان‌تر است.

ریاضیات کسری [۵- ۸] شاخه‌ای از ریاضیات کلاسیک است که با تعمیم عملگرهای متعارف مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری به عملگرهایی با مرتبهٔ کسری سرو کار دارد. چنین تعمیمی کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی داشته و در بسیاری از مواقع که رهیافت‌های متعارف توانایی بررسی مسئله‌ها را ندارند، به کمک آنها قادر به حل مسئلهٔ خواهیم بود [۹- ۱۹]. یکی از کاربردهای این ابزار ریاضی، توانایی آنها در توصیف پخش ناهنجار است [۹- ۲۰]. به منظور توصیف مسئله مهم خشک‌شدگی و یا به طور مشابه مسئلهٔ خشک‌سازی صنعتی، ابتدا در بخش دوم، به پخش ناهنجار در محیط‌های متخلخل خواهیم پرداخت و پس از آن در بخش سوم به مدل‌سازی فرایند خشک‌سازی در این محیط‌ها مبادرت ورزیده و معادله‌ای برای نرخ خشک‌سازی برحسب مقدار رطوبت (نسبت جرم رطوبت موجود بر جرم ماده خشک)، به دست خواهیم آورد.

۲. پخش ناهنجار در محیط‌های متخلخل

در فرایندهای خشک‌سازی عمدتاً بین محیط خارجی و محیط حاوی رطوبت، اختلاف دما وجود دارد. به طور مثال برداشته شدن رطوبت موجود در زمین به واسطهٔ حضور خورشید صورت می‌پذیرد و یا در صنعت خشک‌سازی چوب، یک گاز داغ از روی مادهٔ مورد نظر عبور داده می‌شود تا خشک کردن آن را تسریع نماید [۲]. همان طور که از ترمودینامیک عدم تعادل می‌دانیم، وجود چنین اختلاف دمایی در دستگاه باعث سوق[۵] دادن ذرات می‌شود. در این صورت به دلیل وجود حرکت همرفتی و یا سوقی ذرات، باید از معادلات پخش- همرفت[۶] برای چگالی ذرات استفاده نماییم و یا باید معادلات فوکر- پلانک[۷] برای چگالی احتمال را به کار بریم. از آنجا که مدل میکروسکوپی پخش در محیطهای متخلخل به معادلات فوکر پلانک کسری می‌انجامد، ما توجه خود را به این معادله معطوف می‌نماییم. راستای x را راستایی می‌گیریم که ذرات بخار آب در آن راستا به سمت سطح مادهٔ مورد نظر حرکت می‌کنند تا از آن خارج شوند. پس آنچه اهمیت دارد همین یک جهت است و بنابراین معادلهٔ فوکر- پلانک یک‌بعدی، برای منظور ما کافی است. معادلهٔ فوکر پلانک معمولی به قرار زیر است

$$\frac{\partial P}{\partial t}+v\frac{\partial P}{\partial x}=k\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x.t), \qquad (1)$$

که P احتمال حضور ذره در زمان t در مکان x، v سرعت سوق و k ضریب پخش است.

همان گونه که گفتیم تخلخل باعث غیرمارکوی شدن فرایند می‌گردد. فرایند غیر مارکوی فرایندی است که در آن دستگاه دارای حافظه بوده و از گذشته‌اش تأثیر می‌پذیرد. بدین معنا که ذره فراموش نمی‌کند که از چه مکانی شروع کرده و چه مسیرهایی را طی نموده تا به مکان حاضر رسیده است. به منظور حافظه‌دار کردن حرکت ذره، بایستی حرکت آن را به کمک یک تابع کرنل $K(t-t')$ و انتگرال‌گیری روی همهٔ زمان‌های گذشته، به گذشته‌اش مربوط نماییم [۲۱- ۲۴]. برای درک و مقایسهٔ بهتر ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که همرفتی در دستگاه وجود ندارد.

۱. Random walker
۲. Anomalous diffusion
۳. Non-Markovian
۴. Fractional calculus

۵. Drift
۶. Diffusion-advection
۷. Fokker-Planck

بنابراین پخش ذره از تخلخل تأثیر پذیرفته و معادلهٔ (۱) به صورت زیر تعمیم می یابد

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\int_{0}^{t} d t' K\left(t-t'\right) k \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} P(x, t).$$

به دلیل خواص فرکتالی محیط متخلخل، محققان از یک تابع توانی $\frac{A_\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}(t-t')^{\alpha-2}$ برای کرنل نام برده، استفاده می‌کنند [۲۵-۲۷] که A_α یک ثابت وابسته به محیط و α کمیتی مرتبط با بعد فرکتالی است. با جایگذاری این تابع کرنل توانی در رابطهٔ بالا به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_{0}^{t} d t'(t-t')^{\alpha-2} A_{\alpha} k \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} P(x, t).$$

حال با استفاده از تعریف انتگرال کسری [۵- ۸]، در خواهیم یافت که این رابطه هم‌ارز با معادلهٔ کسری انتگرالی، به صورت زیر است

$$\frac{\partial P}{\partial t}={}_{0}D_{t}^{1-\alpha} k_{\alpha} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} P(x, t), \tag{۲}$$

که $k_\alpha = A_\alpha k$ ثابت پخش در محیط متخلخل و ${}_0D_t^{-(\alpha-1)}$ انتگرال کسری از مرتبهٔ $\alpha-1$ روی بازهٔ $[0,t]$ است. با توجه به رابطهٔ (۲)، ممان‌های اول و دوم به صورت زیر داده می‌شوند [۹و۲۰]

$$\langle x(t)\rangle=0,\langle x^{2}(t)\rangle=\frac{2 k_{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha}. \tag{۳}$$

این منجر به واریانس زیر، برای تابع توزیع احتمال می‌شود

$$\langle(\Delta x(t))^{2}\rangle=\frac{2 k_{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha}. \tag{۴}$$

حال اگر بخواهیم همرفت را نیز در دستگاه در نظر بگیریم، باید خاطر نشان کنیم که در این حالت، هر دو جملهٔ مربوط به پخش و سوق از حافظه تأثیر می‌پذیرند و معادلهٔ حاکم بر دستگاه، تعمیم رابطهٔ (۱)، خواهد بود

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\int_{0}^{t} d t' K(t-t')\left(-v \frac{\partial}{\partial x}+k \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right) P(x, t),$$

که هم‌ارز با معادلهٔ کسری زیر است

$$\frac{\partial P}{\partial t}={}_{0}D_{t}^{1-\alpha}\left(-A_{\alpha} v \frac{\partial}{\partial x}+k_{\alpha} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right) P(x, t). \tag{۵}$$

V سرعت سوق ذره در غیاب تخلخل است. معادلهٔ (۵) به دست آمده از این رهیافت، معادله‌ای است که در مرجع [۲۰] از روشی دیگر به دست آمده است. ممان‌هـــای اول و دوم پیمایش تصادفی خواهند بود [۹و۲۰]

$$\langle x(t)\rangle=\frac{A_{\alpha} v t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\langle x^{2}(t)\rangle=\frac{2 A_{\alpha}^{2} v^{2} t^{2 \alpha}}{\Gamma(1+2 \alpha)}+\frac{2 k_{\alpha} t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{۶}$$

بنابراین واریانس با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\langle(\Delta x(t))^{2}\rangle=A_{\alpha}^{2} v^{2}\left(\frac{2}{\Gamma(1+2 \alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\right) t^{2 \alpha}+\frac{2 k_{\alpha} t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{۷}$$

رابطهٔ مربوط به متوسط جابه‌جایی، (رابطهٔ (۶))، نشان می‌دهد که یک فروترابرد[1] داریم، زیرا که $\alpha<1$ است. این در محیط متخلخل انتظار می‌رفت. اما حضور جملهٔ $t^{2\alpha}$ در جابه‌جایی میانگین مربعی، (معادلهٔ (۷))، برای ما امکان یک فرا پخش[2] را فراهم می‌سازد. در حقیقت وجود جملهٔ همرفتی باعث می‌شود که به ازای $\frac{1}{2}<\alpha<1$ یک فراپخش داشته باشیم. اکنون زمان آن رسیده است که به بررسی سازوکار خشک‌شدگی یا خشک‌سازی بپردازیم.

۳. فرایند خشک‌سازی و نرخ خشک‌شدگی

از جمله مثال‌ها برای خشک‌شدگی، فرآیند خشک شدن زمین و یا از دست رفتن آب‌های زیرزمینی و نیز خشک‌سازی موادی نظیر چوب در راستای مصارف صنعتی را می‌توان نام برد. یکی از مهمترین کمیت‌ها در این فرایند، نرخ خشک‌شدگی نام دارد که با رابطهٔ

$$h=-\frac{1}{A} \frac{d w}{d t} \tag{۸}$$

داده می شود. رابطهٔ (۸) از دست رفتن رطوبت در واحد زمان در واحـد سطح مـادهٔ مورد نظـر را به ما می‌دهـد. در فراینـد خشک‌شدگی و نیز در تکنولوژی خشک‌سازی، پژوهشگران علاقه‌مند به دانستن تابعیت نرخ خشک‌شدگی h به مقدار رطوبت w می‌باشند. برای به دست آوردن چنین رابطه‌ای، ابتدا نیازمندیم ارتباطی بین کمیت‌هـای ماکروسکوپـی موجـود در فراینـد خشک‌سازی نظیر h و w با کمیت‌های میکروسکوپی به دست

۱. Sub-transport
۲. Super-diffusion

آمده در بخش دوم، یعنی ممان‌های اول و دوم پیمایش تصادفی متناظر با معادلات فوکر- پلانک ذکر شده، به دست آوردیم. بدین منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فرایند خشک‌شدگی در حالت کلی یک فرایند پخش- همرفت است. در حقیقت معادلهٔ فوکر- پلانک (۱)، مربوط به چگالی احتمال را با توجه به اینکه چگالی ذرات n متناسب با چگالی احتمال P است، می‌توان به صورت معادلهٔ پخش- همرفت زیر نوشت

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x.t),$$

از طرفی می‌دانیم که نرخ خشک‌شدگی به سادگی متناسب با شار پخش j ذرات بخار آب می‌باشد، بنابراین با توجه به معادلهٔ پیوستگی $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla . j = 0$، شار پخش ذرات عبارت خواهد بود از

$$j = -k\nabla n + vn, \qquad (۹)$$

که n چگالی ذرات، k ثابت پخش، v سرعت سوق و $\nabla n = \frac{\partial n}{\partial x}\hat{i}$ است. جملهٔ اول در سمت راست معادلهٔ (۹)، «جملهٔ پخشی» و جملهٔ دوم «جملهٔ ترابردی» یا «جملهٔ سوق» نامیده می‌شود.

در خشک شدن آب‌های زیرزمینی می‌توان گفت که تعداد ذرات n موجود در بستر زمین در حین فرایند (در زمان‌های نه چندان طولانی) با تقریب خوبی ثابت باقی می‌ماند. همچنین در حالت ایستا[۱] یک گرادیان ثابت (∇n) برقرار است. در خشک‌سازی‌های صنعتی نیز اگر توجه خود را به بازه‌های زمانی نه چندان طولانی معطوف کنیم، این استدلال با تقریب خوبی بر قرار است. این تقریب برای مدل کردن نظری مسئله لازم است و مراجع دیگر نیز از چنین تقریب‌هایی استفاده کرده‌اند [۲].

حال می‌دانیم که ضریب پخش $k \propto \frac{d}{dt}\langle \Delta x^2(t)\rangle$ وسرعت سوق $v = \frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle$ می‌باشد و چون شار عبور کننده از سطح زمین (j) همان نرخ خشک‌شدگی h است، $j \equiv h$ بوده و رابطهٔ (۹) به صورت زیر خواهد شد

$$h = b_1\frac{d}{dt}\left\langle \Delta x^2\right\rangle + b_2\frac{d}{dt}x. \qquad (۱۰)$$

۱. Steady

رابطهٔ (۱۰) ارتباط بین کمیت‌های ماکروسکوپی نرخ خشک‌سازی و ممان‌های اول و دوم پیمایش تصادفی را به ما می‌دهد. لازم به ذکر است که b_1 و b_2 مقادیر ثابتی هستند. با توجه به رابطهٔ (۸) می‌توان نوشت

$$\Delta w(t) \equiv w_0 - w(t) = c_1\left\langle (\Delta x)^2\right\rangle + c_2\langle x\rangle, \qquad (۱۱)$$

که w_0 رطوبت اولیه و c_1 وc_2 مقادیر ثابتی هستند. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم رابطهٔ نرخ خشک‌شدگی برحسب مقدار رطوبت را برای حالت‌های مختلف به دست آوریم.

۱.۳. حالت اول: بدون حضور همرفت

در این حالت با استفاده از رابطه‌های (۳) و (۴) و (۱۰) به دست می آوریم

$$h = \frac{2b_1\alpha k_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha-1}, \qquad (۱۲)$$

و نیز با توجه به روابط (۳) و (۴) و (۱۱) خواهیم داشت

$$w_0 - w = \frac{2c_1 k_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}. \qquad (۱۳)$$

با حذف t از دو رابطهٔ (۱۲) و (۱۳)، رابطهٔ مورد نظر ما به دست می‌آید

$$h = \gamma(w_0 - w)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad (۱۴)$$

که γ ثابتی به قرار زیر است

$$\gamma = \frac{2b_1\alpha k_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2c_1 k_\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

آنچه که از رهیافت‌های نظری به دست می‌آید، شکل کیفی تابعیت h و w نسبت به یکدیگر است. ثابت γ ثابتی است که از آزمایش به دست می‌آید. رابطهٔ (۱۴) تابعیت کیفی نرخ خشک‌شدگی و مقدار رطوبت را در محیط‌های متخلخل و در غیاب همرفت، به تصویر می‌کشد. بنابراین به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$h \propto (w_0 - w)^{1-\frac{1}{\alpha}}. \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ (۱۵)، که حا لت خاصی از فرایند خشک‌شدگی است، نتیجه‌ای است که توسط مهر آفرین و فقیهی [۲]، در مدل‌سازی فرایند خشک‌سازی از روشی دیگر به دست آمده بود. در

محیط‌های معمولی که $\alpha=1$ است، معادلهٔ (۱۵) به یک نرخ خشک‌شدگی ثابت می‌انجامد. در محیط‌های متخلخل که $0<\alpha<1$ است، یک نرخ خشک‌شدگی معروف به نرخ خشک‌شدگی کاهشی خواهیم داشت. در واقع خروجی یک آزمون خشک‌سازی، معمولاً با «نمودار نرخ خشک‌سازی» داده می‌شود، که نموداری از نرخ خشک‌سازی برحسب مقدار رطوبت است [۲۸- ۳۰]. شکل دقیق این نمودار برای مواد مختلف فرق می‌کند، اما شکل کیفی آن برای همهٔ مواد متخلخل یکسان است [۲۸- ۳۰]. این منحنی در ابتدا دارای یک رژیم ثابت و متعاقب آن دارای یک رژیم کاهشی است. در ابتدای فرایند خشک‌شدگی، این رطوبت سطحی است که برداشته می‌شود. در این حالت با یک پخش متعارف از سطح ماده، و نه از داخل آن، مواجه هستیم. این همان نرخ ثابتی است که مدل پیش‌بینی می‌کند [۲]. به تدریج که ماده خشک می‌شود، سطح آن، دیگر از ذرات اشباع نبوده و ذرات مجبورند از داخل محیط برداشته شوند [۲]. در این حالت ما با سازوکار پخش از داخل محیط متخلخل مواجه هستیم که همان طور که گفتیم α مقداری کوچکتر از یک دارد و بر اساس رابطهٔ (۱۵)، رژیم کاهشی موجود در منحنی نرخ خشک‌سازی را توضیح می‌دهد.

۲.۳. حالت دوم: در حضور همرفت

در حضور همرفت، باتوجه به معادلات (۶)، (۷) و (۱۰) نرخ خشک‌شدگی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$h = M_1 t^{2\alpha-1} + M_2 t^{\alpha-1}, \qquad (16)$$

که M_1 و M_2 ثابت‌هایی به قرار زیر هستند

$$M_1 = 2\alpha A_\alpha^2 b_1 v^2\left(\frac{2}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\right),$$

$$M_2 = \frac{2\alpha b_1 k_\alpha + \alpha A_\alpha^2 b_2 v}{\Gamma(1+\alpha)}$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه‌های (۶)، (۷) و (۱۱) خواهیم داشت

$$w_0 - w = R_1 t^{2\alpha} + R_2 t^{\alpha}, \qquad (17)$$

که R_1 و R_2 ثابت‌هایی به قرار زیر هستند

$$R_1 = c_1 A_\alpha^2 v^2\left(\frac{2}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\right),$$

$$R_2 = \frac{2c_1 k_\alpha + c_2 A_\alpha v}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

اکنون باید بین دو رابطهٔ (۱۶) و (۱۷)، t را حذف کنیم تا رابطهٔ بین نرخ خشک‌شدگی و مقدار رطوبت را به دست آوریم. این کار را با تغییر متغیر $y=t^\alpha$ در رابطهٔ (۱۷) انجام می‌دهیم. با این کار به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای y خواهیم رسید که جواب‌های زیر را به ما می‌دهد

$$t^\alpha = \frac{-R_2 \pm \sqrt{R_2^2 + 4R_1(w_0 - w)}}{2R_1}. \qquad (18)$$

با توجه به مثبت بودن R_2 و این که باید زمان t مثبت باشد، فقط جواب با علامت مثبت در رابطهٔ (۱۸) قابل قبول است. اکنون با قرار دادن جواب مثبت رابطهٔ (۱۸) در (۱۶)، رابطهٔ بین h و w را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h &= M_1\left(\frac{-R_2 + \sqrt{R_2^2 + 4R_1(w_0 - w)}}{2R_1}\right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \\ &+ M_2\left(\frac{-R_2 + \sqrt{R_2^2 + 4R_1(w_0 - w)}}{2R_1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned} \qquad (19)$$

رابطهٔ (۱۹) تابعیت کیفی h برحسب w را در محیط‌های متخلخل و در حضور همرفت، به دست می‌دهد. محیط‌های متخلخل مختلف، ضرایب ثابت متفاوتی دارند اما شکل کلی تابعیت یاد شده برای همهٔ آنها، (رابطهٔ (۱۹))، یکسان است.

۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، پدیدهٔ خشک‌شدگی محیط‌های متخلخل به کمک فرایند پخش نابهنجار مدل گردید. تخلخل باعث غیر مارکوی شدن فرایند می‌شود که ریاضیات کسری ابزار مناسبی برای مطالعه این پخش نابهنجار می‌باشد. رهیافت به کار گرفته شده، ما را به معادلات فوکر- پلانک کسری رساند. با استفاده از این معادلات تعمیم یافته در چنین محیط‌هایی، ممان‌های اول و دوم که به ترتیب متناظر با متوسط جابه‌جایی و جابه‌جایی میانگین مربعی پیمایش تصادفی است، نوشته شد. با مرتبط کردن کمیت‌های میکروسکوپی در پیمایش تصادفی به نرخ خشک‌شدگی، توانستیم رابطهٔ بین نرخ خشک‌شدگی و مقدار رطوبت را، که در ادبیات خشک‌شدگی حائز اهمیت است، در غیاب و در حضور همرفت

به دست آوردیم. بنابراین علاوه بر اثر تخلخل، اثر همرفت در فرایند خشک‌شدگی را فرمول‌بندی نمودیم. دانستن این مفاهیم می‌تواند هم در صنعت خشک‌سازی و هم در جلوگیری از خشک شدن زمین‌های کشاورزی مفید باشد. با تغییر تخلخل، تغییر همرفت و یا با به کارگیری یک لایه با تخلخل دلخواه می‌توان نفوذ آب در زمین و یا میزان خشک‌شدگی را کنترل کرد.

مراجع

1. S Havlin and D Ben-Avraham, *Advances in Physics* **51** (2002) 187.
2. M Mehrafarin and M Faghihi, *Physica* A **301** (2001) 163.
3. A Taloni, A Chechkin, and J Klafter, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010).160602.
4. A Taloni, A Chechkin, and J Klafter, *Phys. Rev.* E **82** (2010) 061104.
5. I Podlubny, "*Fractional Differential Equations*", Academic Press, San Diego (1999).
6. K B Oldham and J Spanier, "*The Fractional Calculus*", Academic Press, New York (1974).
7. K S Miller and B Ross, "*An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*", Wiley-Interscience (1993).
8. S G Samko, A A Kilbas, and O I Marichev, "*Fractional Integrals and Derivatives*", Gordonand Breach Science Publishers, Amsterdam (1993).
9. R Metzler and J Klafter, *Phys. Rep*. **339** 1 (2000).
10. M Weissman, *Rev. Mod. Phys*. **60** (1988) 537.
11. M Shlesinger, *Annu. Rev. Phys. Chem*. **39** (1988) 269
12. G M Zaslavsky, *Phys. Rep*. **371** (2002) 461.
13. A I Saichev and G M Zaslavsky, *Chaos* **7** (1997) 753.
14. V V Uchaikin, *J. Exper. Theor.Phys*. **97** (2003) 810.
15. M M Meerschaert, D A Benson, and B Baeumer, *Phys. Rev*. E **63** (2001) 021112.
16. V E Tarasov, *Phys. Rev*. E **71** (2005) 011102.
17. V E Tarasov, *J. Phys*. A **38**, (2005) 5929.
18. N Laskin and G M Zaslavsky, *Physica* A **368** (2005) 38.
19. V E Tarasov and G M Zaslavsky, *Chaos* **16** (2006) 023110.
20. A Compte, R Metzler, and J Camacho, *Phys. Rev*. E **56** (1997) 1445.
21. B J West and P Grigolini, "*Complex Webs: Anticipating the Improbable*", Cambridge University Press (2011).
22. F Mainardi and P Pironi, *Extracta Mathematicae* **11** (1996) 140.
23. I Goychuk, *Phys. Rev.* E **80** (2009) 046125.
24. J H Jeon and R Metzler, *Phys. Rev*. E **81** (2010) 021103.
25. K Linkenkaer-Hansen, V V Nikouline, J Matias Palva, and R J Ilmoniemi, *The Journal of Neuroscience* **21** (2001) 1370.
26. R N Mantegna and H E Stanley, *Nature* **376** (1995) 46.
27. C K Peng, S Havlin, H E Stanley and A L Goldberger, *Chaos* **5** (1995) 82.
28. J M Coulsont, and J F Richardson, "*Chemical Engineering*", 4th Edition, Pergamon Press, Oxford (1993).
29. H Theliander, "*Chemical Engineering Design Advanced Course*", 3rd Edition, Chalmers University of Technology, Gothenburg (1999).
30. J G Salin, *Drying Tech*. **9** (1991) 775.