

تأثیر مقیاس زمان سرمایش و غیرایده‌آل بودن گاز در امواج ضربه‌ای

محسن نژاد اصغر

گروه فیزیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

پست الکترونیکی: nejadasghar@umz.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۵/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۸/۲۶)

چکیده

امواج ضربه‌ای، در مهندسی هوا و فضا و همچنین در محیط‌های میان ستاره‌ای به وفور مشاهده می‌گردند. اگر سرمایش گاز پس‌از ضربه سریع اتفاق بیافتد، چگالی آن می‌تواند خیلی زیاد شده و لذا اثرات غیرایده‌آل بودن معادله حالت گاز، دارای اهمیت شود. در این مقاله، تأثیر مقیاس زمان سرمایش و غیرایده‌آل بودن گاز در امواج ضربه‌ای سرمایشی را مورد مطالعه قرار دادیم. با تقریب رانکین-هوگنیت، نسبت چگالی محیط پس‌از ضربه به چگالی گاز پیش‌ضربه را بر حسب مقادیر مختلف سه پارامتر (۱) عدد ماخ، (۲) اهمیت غیرایده‌آل بودن و (۳) اهمیت مقیاس زمان سرمایش، به دست آوردیم. نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن سرمایش گاز پس‌از ضربه، با مقیاس‌های زمانی کمتر، می‌تواند موجب چگال‌تر شدن محیط پس‌از ضربه شده و در نظر گرفتن غیرایده‌آل بوده گاز، موجب رقیق‌تر شدن آن می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: امواج ضربه‌ای، گاز غیرایده‌آل، آهنگ سرمایش گاز، دینامیک شاره‌ها، محیط میان ستاره‌ای

۱. مقدمه

بسیار زیاد به حرکت در آورده و لایه‌ها را به هم فشرده می‌کند و ...، نمونه‌هایی از ایجاد پدیده موج ضربه‌ای در مهندسی هوا و فضا می‌باشند. همچنین می‌توان به لایه‌های ایجاد شده توسط انفجارهای ابرنواختری، برخورد ابرهای میان ستاره‌ای، حرکت سریع جت‌های ایجاد شده در اطراف ستاره‌های تازه متولد شده و ...، به عنوان نمونه‌هایی از تولید ضربه در محیط میان ستاره‌ای نام برد.

ناحیه ضربه دیده را می‌توان به طور تقریبی به صورت یک لایه با کرانه‌های ناپیوسته در نظر گرفته و معادلات بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی را برای آن نوشت [۱ و ۲]. این تقریب

هرگاه در یک لایه از شاره تراکم پذیر، چگالی و دما به گونه‌ای افزایش یابند که سرعت حرارتی ذرات آن خیلی بیشتر از اندازه سرعت صوت در محیط اطراف گردد، کرانه‌های لایه شروع به حرکت کرده و پدیده موج ضربه‌ای بوجود می‌آید. این پدیده، در مهندسی هوا و فضا و همچنین در فرایندهای تحولی گازهای میان ستاره‌ای، به وفور مشاهده می‌گردد. مثلاً وقتی یک پیستون در یک لوله گاز به سرعت به حرکت در می‌آید، وقتی یک پرتابه یا یک هواپیما با سرعت فراصوتی در جو زمین حرکت می‌کند، وقتی یک بمب منجر شده و هوای اطراف را با سرعت

مقیاس دینامیکی می‌تواند بسیار بیشتر از چهارصد سال بوده و لذا اثر غیرایده‌آل بودن گاز مهم گردد.

معادله حالت گاز غیرایده‌آل، با بسط توانی فشار p بر حسب چگالی ρ بیان می‌گردد [۱۷]. اولین جمله در بسط توانی، مربوط به فرض گاز ایده‌آل بوده و جمله دوم، بیان‌کننده برهم‌کنش بین هر دو ذره از ذرات درون گاز است. در این مقاله، تقریب غیرایده‌آل بودن را تا جمله دوم بسط، در نظر گرفته و معادله حالت ناحیه ضربه دیده را به صورت $p = (k_B / \mu m_p) \rho T (1 + b\rho) \equiv K \rho T (1 + b\rho)$ نظر می‌گیریم که در آن μm_p میانگین جرم ذرات (m_p جرم پروتون و μ میانگین وزنی ذرات) بوده و اندازه b نشان‌دهنده اهمیت غیرایده‌آل بودن گاز است. آنانند [۱۸] در سال ۲۰۱۲، روابط مربوط به امواج ضربه‌ای تخت یک‌بعدی، با ملاحظه غیرایده‌آل بودن گاز را مورد مطالعه قرار داد. او با در نظر گرفتن غیرایده‌آل بودن گاز در هر دو محیط پیش‌ضربه و پس‌ضربه، نتیجه گرفت که حتی با وجود اعداد ماخ کمتر از یک نیز می‌توان وجود موج ضربه‌ای در گازهای غیرایده‌آل را انتظار داشت. ناث [۱۹] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از روش خود مشابه، امواج ضربه‌ای کروی هم‌دمای غیرایده‌آل، تحت تأثیر نیروی گرانش را بررسی کرد. او همچنین اخیراً در سال ۲۰۱۶، تأثیر تابش و رسانش حرارتی را نیز، علاوه بر غیرایده‌آل بودن گاز، در نظر گرفت [۲۰].

در کارهای قبلی، تأثیر سرمايش گاز ناحیه ضربه دیده در نظر گرفته نشده بود. اگر سرمايش گاز سریع اتفاق بیافتد، می‌تواند موجب چگال‌تر شدن گاز و در نتیجه، مهم‌تر شدن اثرات غیرایده‌آلی گاز در ناحیه پس‌ضربه گردد. از آنجایی که در برخی از فرایندهای ضربه‌ای موجود در محیط‌های میان ستاره‌ای (مانند برخورد مواد در قرص‌های پیش ستاره‌ای چگال که منجر به شکل‌گیری پیش سیارات می‌گردند)، فرایند سرمايش سریع می‌تواند اتفاق بیافتد [۲۱] و همچنین از آنجایی که شاید بشر در آینده‌ای نزدیک موفق به استفاده از ترکیب گازهای مناسبی شود که بتواند سرمايش سریع را در گاز پس‌ضربه آزمایشگاهی تولید کند، بررسی نظری این موضوع دارای اهمیت می‌باشد. بدین منظور، در این مقاله

که در آن از ضخامت کرانه‌های لایه چشم پوشی می‌شود، به تقریب رانکین- هوگونیت معروف است. نتایج مطالعات نظری و آزمایشگاهی بسیار زیادی بر روی امواج ضربه‌ای تخت، استوانه‌ای و کروی، با فرض معادله حالت گاز ایده‌آل، منتشر شده است. مثلاً می‌توان به کارهای اولیه گودرلای [۳] در سال ۱۹۴۲، ون‌نیومان [۴] در سال ۱۹۴۷، تیلور [۵] در سال ۱۹۵۰ و سدوو [۶] در سال ۱۹۵۹، برای امواج ضربه‌ای بسیار قوی اشاره کرد. برای امواج ضربه‌ای با قدرت میانی نیز می‌توان به کارهای اولیه انجام شده توسط ساکورایی [۷] در سال ۱۹۶۴، فریمن [۸] در سال ۱۹۶۸ و بیچ و لی [۹] در سال ۱۹۷۰ ارجاع داد. در مورد امواج ضربه‌ای ضعیف نیز ویتمام [۱۰] در سال ۱۹۶۰، نتایج بسیار جالبی را ارائه نمود که به طور ایده‌آل می‌تواند این جریان‌های ضربه‌ای را توضیح دهند. از کارهای اخیر نیز می‌توان به نتایج سانجیوا [۱۱]، گاوریلوک و ساورل [۱۲]، باتی و همکاران [۱۳]، کجلاندر و همکاران [۱۴]، نژاداصغر [۱۵] و امانوئل [۱۶] اشاره کرد که شرایط ایجاد و انتشار امواج ضربه‌ای، با فرض گاز ایده‌آل همگن و غیرهمگن، در محیط‌های مختلف را مورد مطالعه قرار دادند.

اگر سرمايش گاز پس‌ضربه سریع اتفاق بیافتد (نسبت به مقیاس زمانی تحول دینامیکی)، چگالی گاز در ناحیه ضربه دیده می‌تواند بسیار زیاد شود به گونه‌ای که اثرات غیرایده‌آل بودن گاز مهم گردد. پدیده سرمايش سریع گاز پس‌ضربه، بستگی به آهنگ سرمايش ترکیب اجزای گاز دارد. در آزمایشگاه‌ها، بشر باید به فناوری لازم برای تهیه نوع خاصی از ترکیب گازی برسد تا بتواند از این پدیده استفاده نموده و به چگالی‌های بالا برسد. اما، در محیط‌های میان ستاره‌ای، چون مقیاس زمانی تحول‌های دینامیکی به کندی انجام می‌شود، وجود سرمايش سریع دور از انتظار نیست. مثلاً، نژاداصغر [۱۵] با شبیه‌سازی نشان داد که با وجود ترکیب گازهای میان ستاره‌ای، مقیاس زمانی سرد شدن یک موج ضربه‌ای، در حدود چهارصد سال است. در بسیار از فرایندهای تحولی میان ستاره‌ای، مانند تلنبار شدن مواد فروریزان بر روی قرص پیش ستاره‌ای یا برخورد مواد حاصل از انفجار ابرنواخترها با محیط گازی اطراف آن،

نشان دهیم، در مدت زمان t_{dur} ، مقدار انرژی در واحد جرم، یعنی $Q \approx (n_p \Lambda / \mu_p m_p) t_{dur}$ می‌تواند از محیط ضربه دیده خارج شود. از طرفی، مقیاس زمانی سرمایه‌ش گاز پس‌ضربه را می‌توان به صورت $t_{cool} \approx k_B T_p / (n_p \Lambda)$ تقریب زد. بدین ترتیب، با حذف کردن آهنگ سرمایه‌ش و چگالی عددی، $n_p \Lambda$ داریم:

$$\frac{Q}{c^2} \approx \frac{K_p T_p}{K_p T_p} \frac{t_{dur}}{t_{cool}} \equiv T \lambda, \quad (4)$$

که در آن $\lambda \equiv t_{dur} / t_{cool}$ بیان‌کننده اهمیت مقیاس زمان سرمایه‌ش ($\lambda \rightarrow 0$ برای بی‌دررو و $\lambda \rightarrow \infty$ برای سرمایه‌ش بسیار سریع)، $T \equiv K_p T_p / K_p T_p$ نسبت دمای گاز پس‌ضربه به دمای محیط پیش‌ضربه بوده و $c \equiv \sqrt{K_p T_p}$ سرعت صوت در محیط پیش‌ضربه است.

برای تعیین چگالی و دمای گاز پس‌ضربه بر حسب کمیت‌های پیش‌ضربه، دو توده گاز که با سرعت v_1 نسبت به ناظر آزمایشگاه، به طور رو در رو به هم برخورد می‌کنند را در نظر می‌گیریم. از نظر این ناظر، گاز پس‌ضربه در حالت سکون خواهد بود و در اثر انباشته شدن مواد در ناحیه ضربه دیده، دو جبهه موج به وجود آمده و با سرعت v_2 از دو طرف دور می‌گردند. بنابراین، از نظر ناظر واقع بر روی جبهه موج، مواد گاز پیش‌ضربه، با سرعت $v_1 = v_0 + v_2$ به جبهه موج وارد شده و با سرعت v_2 از آن خارج می‌شوند. با تعریف عدد ماخ در محیط پیش‌ضربه به صورت $M_0 = v_0 / c$ ، معادلات (۱) تا (۴) منجر به دو معادله زیر می‌شوند:

$$T = \frac{1}{R(1+\eta R)} + \frac{M_0^2}{(R-1)(1+\eta R)}, \quad (5)$$

$$T = \frac{\gamma_1 - 1}{1 + (\gamma_1 - 1)(1 + \eta R)} \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{R + 1}{R - 1} \frac{M_0^2}{2} - \lambda T \right], \quad (6)$$

که در آن $R \equiv \rho_2 / \rho_1$ نسبت چگالی گاز پس‌ضربه به چگالی محیط پیش‌ضربه بوده و $\eta \equiv b \rho_1$ پارامتر غیر ایده‌آل بودن گاز پس‌ضربه است. با حذف کردن T بین دو معادله (۵) و (۶)، داریم:

$$A_3 R^3 + A_2 R^2 + A_1 R + A_0 = 0, \quad (7)$$

که ضرایب آن عبارتند از:

به بررسی تأثیر مقیاس زمان سرمایه‌ش و غیرایده‌آل بودن گاز، بر امواج ضربه‌ای می‌پردازیم. در بخش ۲، به معادلات حاکم بر امواج ضربه‌ای گاز غیرایده‌آل و سرمایه‌شی، با تقریب رانکین-هوگونیت، پرداخته و در بخش ۳ نتایج، همراه با بحث و نتیجه‌گیری، ارائه خواهند شد.

۲. امواج ضربه‌ای غیرایده‌آل سرمایه‌شی

برای سادگی، فرض می‌کنیم که ضربه به صورت تخت یک‌بعدی و پایا بوده و شتاب‌کننده آن ناچیز باشد. با تقریب رانکین-هوگونیت، کمیت‌های پس‌ضربه در پشت جبهه موج را به کمیت‌های پیش‌ضربه مربوط می‌کنیم. از نظر ناظر واقع بر روی جبهه موج، اگر گاز در ناحیه پیش‌ضربه، با سرعت v_1 به جبهه موج نزدیک شده و با سرعت کمتر v_2 در ناحیه پس‌ضربه، از جبهه موج دور شود، پایستگی جرم، اندازه حرکت و انرژی، با تقریب رانکین-هوگونیت، در عبور از جبهه موج عبارتند از

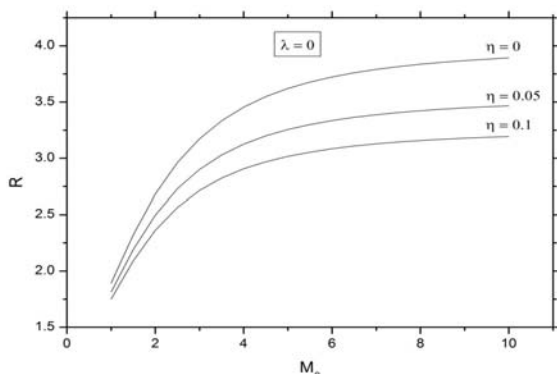
$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (1)$$

$$\rho_1 v_1^2 + K_1 \rho_1 T_1 = \rho_2 v_2^2 + K_2 \rho_2 T_2 (1 + b \rho_2), \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} K_1 T_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{1 + (\gamma_2 - 1)(1 + b \rho_2)}{\gamma_2 - 1} K_2 T_2 + Q, \quad (3)$$

که در آن γ_1 و γ_2 نسبت ظرفیت گرمای ویژه در دو محیط پیش‌ضربه و پس‌ضربه بوده و Q انرژی خارج شده از ناحیه پس‌ضربه، در واحد جرم، می‌باشد. معادلات حالت، برای گاز پیش‌ضربه، به صورت ایده‌آل $\rho_1 T_1 \equiv K_1 \rho_1 T_1$ و $\rho_2 = (k_B / \mu_p m_p) \rho_2 T_2 \equiv K_2 \rho_2 T_2 (1 + b \rho_2)$ انتخاب شده است.

اگر فرض کنیم که فرایند ضربه، نسبت به سرمایه‌ش گاز خیلی سریع باشد، می‌توان از Q در معادله (۳) صرف نظر کرد (فرض موج ضربه‌ای بی‌دررو). اما در واقع، این فرض کاملاً صحیح نبوده و گاز پس‌ضربه می‌تواند فرصت داشته باشد تا کمی سرد شود. اگر آهنگ سرمایه‌ش بر واحد حجم $(\text{erg cm}^3 \text{ s}^{-1})$ گاز پس‌ضربه با چگالی عددی n_p را با Λ



شکل ۱. نسبت چگالی محیط پسا ضربه به چگالی گاز پیش ضربه، بر حسب عدد ماخ، برای موج ضربه‌ای بی دررو ($\lambda = 0$)، در حالت گاز پسا ضربه ایده آل ($\eta = 0$) و غیرایده آل ($\eta \neq 0$). گازها به صورت تک اتمی با $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{5}{3}$ هستند.

محیط پیش ضربه، برای موج ضربه‌ای بی دررو $\lambda = 0$ حاصل از گازهای تک اتمی $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{5}{3}$ ، در شکل ۱ نشان داده شده است. همان طور که انتظار داشتیم، در حالت ایده آل ($\eta = 0$) و در حد ضربه‌های بسیار قوی $M_0 \rightarrow \infty$ ، چگالی گاز پسا ضربه می‌تواند حداکثر تا چهار برابر چگالی گاز پیش ضربه افزایش یابد. اما مشاهده می‌گردد که در نظر گرفتن غیرایده آل بودن گاز پسا ضربه، می‌تواند این نسبت را کاهش دهد. علت این کاهش به این خاطر است که در نظر گرفتن غیرایده آل بودن گاز پسا ضربه، یعنی در نظر گرفتن افزایش فشار آن نسبت به حالت ایده آل، این افزایش فشار، موجب رانش بیشتر جبهه موج در محیط پیش ضربه شده که متعاقباً موجب گستردگی لایه پسا ضربه و کاهش چگالی آن نسبت به حالت ایده آل می‌گردد.

نسبت چگالی گاز پسا ضربه به چگالی محیط پیش ضربه، برای موج ضربه‌ای سرمایشی، با دو مقدار مختلف ضریب مقیاس زمان سرمایش $\lambda = 1$ (سرمایش آرام) و $\lambda = 10$

(سرمایش سریع) حاصل از گازهای تک اتمی $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{5}{3}$ ، در شکل ۲ نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌گردد، در نظر گرفتن سرمایش گاز پسا ضربه می‌تواند موجب چگال‌تر شدن آن گردد. علت آن نیز بدین خاطر است که در حالت بی‌دررو، گرمای موجود در محیط پسا ضربه، از

$$A_0 \equiv \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} + \lambda,$$

$$A_1 \equiv - \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} + \left(\frac{\gamma_2 + 1}{2(\gamma_2 - 1)} + \lambda \right) M_0^2 + \lambda - \eta \right],$$

$$A_2 \equiv \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{M_0^2}{2} \right) (1 - \eta) - \eta,$$

$$A_3 \equiv \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{M_0^2}{2} \right) \eta.$$

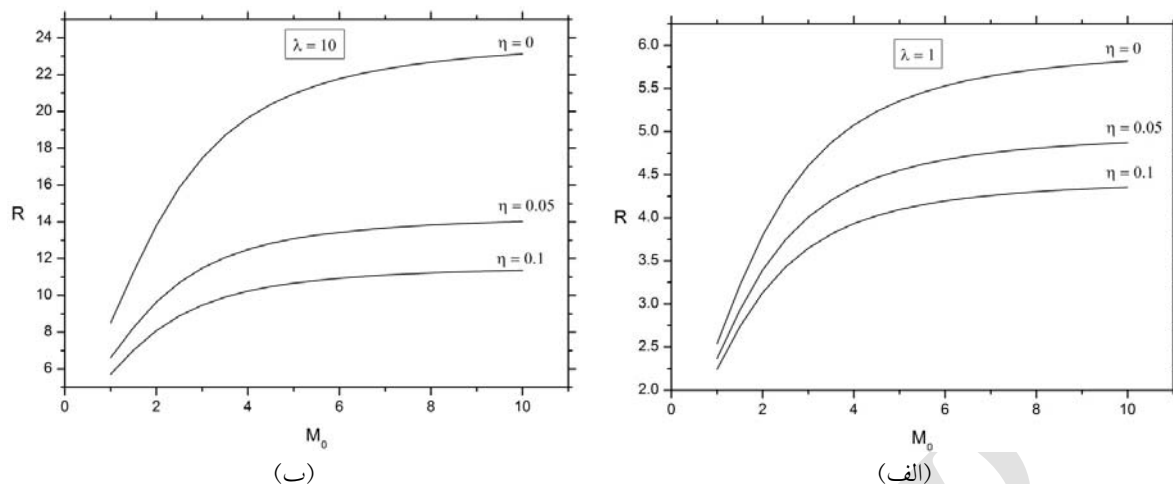
بدین ترتیب، با انتخاب نسبت ظرفیت گرمای ویژه در دو محیط پیش ضربه و پسا ضربه، به ازای مقادیر مختلف سه پارامتر ورودی، یعنی عدد ماخ M_0^2 ، غیرایده آل بودن گاز پسا ضربه η و اهمیت نسبی مقیاس زمان سرمایش λ ، می‌توان معادله درجه سوم (۷) را حل کرد تا نسبت چگالی گاز پسا ضربه به گاز پیش ضربه R ، را به دست آورد. سپس با استفاده از معادلات (۵) یا (۶) می‌توان نسبت دمای T را نیز تعیین کرد. این نتایج، در بخش بعد ارائه شده و بر روی آنها بحث و نتیجه‌گیری خواهد شد. اما، در اینجا، برای مقایسه با نتایج دیگران، می‌توان به موج ضربه‌ای بی‌دررو ($\lambda = 0$) و ایده آل ($\eta = 0$) توجه کرد. در این حالت، معادله (۷) به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌گردد که در حالت حدی، برای موج ضربه‌ای بسیار قوی ($M_0 \rightarrow \infty$)، نسبت چگالی عبارت است از $R = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}$ و طبق

معادله (۵) یا (۶)، نسبت دما عبارت است $T = \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) M_0^2$.

فرض گاز تک اتمی ($\gamma_2 = \frac{5}{3}$) در ناحیه پسا ضربه، نتیجه این موج ضربه‌ای قوی می‌تواند موجب افزایش چگالی تا چهار برابر چگالی گاز پیش ضربه و بیشینه دمایی به اندازه $T_2^{\max} = 3.786 \mu_2 \times 10^5 v_{2v}^2$ درجه کلونین شود که در آن $v_{2v} \equiv v_{2v} / 10^3 \text{ km s}^{-1}$ است [۲۲].

۳. نتایج و بحث و نتیجه‌گیری

در این بخش، نتایج حل عددی معادله درجه سوم (۷) و نسبت دمای حاصل از معادله (۵) یا (۶) را به ازای مقادیر مختلف پارامترهای M_0 ، λ و η بیان کرده و بر روی آنها بحث و نتیجه‌گیری می‌کنیم. نسبت چگالی گاز پسا ضربه به چگالی



شکل ۲. نسبت چگالی محیط پس‌ضربه به چگالی گاز پیش‌ضربه، بر حسب عدد ماخ، برای موج ضربه‌ای سرمایشی با مقیاس زمان سرمایش (الف) آرام ($\lambda = 1$) و (ب) سریع ($\lambda = 10$)، در حالت گاز پس‌ضربه ایده‌آل ($\eta = 0$) و غیرایده‌آل ($\eta \neq 0$). گازها به صورت تک اتمی با $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{5}{3}$ هستند.

معادلات (۵) یا (۶) استخراج می‌شوند، وابستگی زیادی به پارامتر غیرایده‌آل بودن گاز نداشته و بر روی هم منطبق می‌گردند، نمودارهای T برحسب M_0 ترسیم نشده است. به طور خلاصه، نتایج این مقاله بیان می‌کنند که در نظر گرفتن سرمایش گاز پس‌ضربه، با مقیاس‌های زمانی کمتر، می‌تواند موجب چگال‌تر شدن محیط پس‌ضربه شده و در نظر گرفتن غیرایده‌آل بودن گاز، موجب رقیق‌تر شدن آن می‌گردد.

انقباض بیشتر گاز جلوگیری کرده و بنابراین اجازه نمی‌دهد که محیط پس‌ضربه از $\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}$ برابر، نسبت به محیط پیش‌ضربه، چگال‌تر گردد. اما وقتی گاز پس‌ضربه فرصت داشته باشد تا سرد شود، می‌تواند منقبض‌تر شده و رانش جبهه موج آرام‌تر گردد. در این حالت، با افزایش λ ، گاز پس‌ضربه می‌تواند چگال‌تر و چگال‌تر گردد.

البته، از آنجایی که در این محدوده انتخابی $0 \leq \eta \leq 0.1$ ، نسبت دمای محیط پس‌ضربه به دمای گاز پیش‌ضربه که از

مراجع

1. W J M Rankine, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **160** (1870) 277.
 2. H J Hugoniot, *Journal de l'École polytechnique. Polytech.* **58** (1889) 1.
 3. G Guderlay, *Luftfahrtforschung* **19** (1942) 302.
 4. J von Neumann, "Collected Works of J von Neumann", **VI**, 219, Oxford: Pergamon Press (1947).
 5. G I Taylor, *Proc. R. Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci.* **201** (1950) 175.
 6. L I Sedov, "Similarity And Dimensional Methods In Mechanics", Academic Press (1959).
 7. A Sakurai, "Basic Developments in Fluid Dynamics", 309, Academic Press (1964).
 8. R A Freeman, *J. Phys. D, Appl. Phys.* **2** (1968) 1697.
 9. G G Bech, and J H S Lee, *American Institute of*
- Aeronautics and Astronautics Journal.* **8** (1970) 271.
10. G B Whitham, "The Propagation of Spherical Blast", Report 358, Tokyo: Aeronautical Research Institute, University of Tokyo (1960).
11. K L Sanjiva, *Phys. Fluids A* **4** (1992) 2900.
12. S L Gavriluyk, and A Saurel, *J. Fluid Mech.* **19** (2007) 495.
13. R S Baty, F Farassat, and D H Tuckers, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 1.
14. M Kjellander, N Tillmark, and N Apazidis, *Phys. Fluids* **22** (2010) 116102.
15. M Nejad-Aghar, *Astron. Notes* **332** (2011) 631.
16. G Emanuel, *Shock Waves* **25** (2015) 11.
17. L D Landau, and E M Lifshitz, "Courses of Theoretical Physics, Statistical Physics", **5**, Oxford:

20. G Nath, *Astrophysics and Space Science* **361** (2016) 31.
21. M Nejad-Asghar *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **414** (2011) 470.
22. D Hollenbach, and C F McKee, *Astrophysical Journal Supplement Series* **41** (1979) 555.
- Pergamon Press (1958).
18. R K Anand, *Astrophysics and Space Science* **342** (2012) 377.
19. G Nath, *Advances in Space Research* **52** (2013) 1304.

Archive of SID