

## کاربرد آنالیز طیفی بیزی در تحلیل سری‌های زمانی نورسنجی

سعیده لطیف<sup>۱</sup>، حسین صفری<sup>۲</sup> و اسداله صفایی<sup>۳</sup>

۱. موسسه آموزش عالی عبدالرحمن صوفی رازی، زنجان

۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

۳. دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۱/۲۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۱۱/۰۵)

### چکیده

مقاله حاضر به معرفی آنالیز طیفی بیزی به عنوان روشی قدرتمند و کارآمد جهت تحلیل طیفی سری‌های زمانی نورسنجی می‌پردازد. برای این منظور، آنالیز طیفی بیزی برای سری زمانی نورسنجی  $XZ\ Dra$  که به صورت غیر یکنواخت همراه با گاف‌های بزرگ است، در نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی شده و طیف توانی حاصل از این آنالیز با طیف توانی به دست آمده از نرم‌افزار  $Period\ 04$  که جهت تحلیل آماری سری‌های زمانی نجومی طراحی گردیده و از داده‌های مصنوعی برای یکنواخت کردن آنها بهره می‌برد، مقایسه شده است. اگر چه در طیف توانی حاصل از این نرم‌افزار قله طیفی اصلی که بیانگر بسامد اصلی نوسانات ستاره متغیر  $XZ\ Dra$  در (روز<sup>-۱</sup>)  $f = 2,09864$  است به خوبی شناسایی شده، اما قله‌های طیفی کاذب نیز دیده می‌شوند. همچنین در این نرم‌افزار نحوه تولید داده مصنوعی به طور دقیق مشخص نشده است. در طیف توانی حاصل از آنالیز بیزی این قله‌های کاذب حذف گردیده‌اند، ضمن آنکه قله طیفی مذکور حول بسامد مورد نظر دارای عرض کمتری بوده و دقیق‌تر است. لازم به ذکر است که در آنالیز طیفی بیزی جهت به دست آوردن طیف توانی مطلوب، احتیاج به یکنواخت کردن سری زمانی نیست؛ ضمن آنکه، پژوهشگر نیز در جریان روند دقیق محاسبات قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: آنالیز طیفی بیزی، تئوری بیز، نرم‌افزار  $Period\ 04$ ، طیف توانی، ستاره متغیر، منحنی نوری

### ۱. مقدمه

به طور معمول آن دسته از ستاره‌هایی را که تغییرات قدر مرئی آنها در بازه زمانی چند دهه یا کمتر، در حدود  $0/1$  قدر یا بیشتر باشد ستاره متغیر<sup>۱</sup> می‌نامند [۱]. پژوهش بر روی این ستاره‌ها بسیار حائز اهمیت است، زیرا به ما در کسب اطلاعاتی درباره

چگونگی شکل‌گیری، مراحل زندگی و تحولات داخلی و خارجی ستاره‌ها کمک شایانی می‌کند، ضمن آنکه از محیط اطراف ستاره‌ها و تأثیرات متقابل آنها بر هم، ما را آگاه می‌سازد [۲]. نورسنجی<sup>۲</sup> از این ستاره‌ها و تحلیل منحنی نوری آنها از جمله پژوهش‌هایی است که در حوزه تحقیقات ستاره‌های متغیر

۲. Photometry

۱. Variable star

مربوط به این ستاره توسط سایدل<sup>۸</sup> و همکارانش [۷] منتشر شد. این داده‌ها همراه با سایر اندازه‌گیری‌های منتشر شده از ستاره متغیر XZ Dra این امکان را فراهم کرد تا در سال ۲۰۰۲ جارکسیک<sup>۹</sup> و همکارانش [۸] رفتار فوتومتریک این ستاره را در یک بازه زمانی ۷۰ ساله مورد مطالعه و بررسی قرار دهند. آنها از نرم‌افزارهای MUFRA<sup>۱۰</sup> و Mathematica جهت تحلیل منحنی نوری این ستاره استفاده کردند. بر اساس نتایجی که آنها اعلام کردند این ستاره دارای دوره تناوب (روز)  $P \approx 0.476495$  و دوره تناوب بلازکو (روز)  $P_B \approx 76$  است [۸].

## ۲. بخش رصدی

### ۲.۱. سری زمانی XZ Dra

سری زمانی مورد تحلیل در این پژوهش حاصل نورسنجی از ستاره متغیر XZ Dra است که برای مدت ۱۲ شب متوالی در رصدخانه دانشگاه کاشان واقع در ارتفاعات نیاسر به طول جغرافیایی ۹' ۵۱° شرقی و عرض جغرافیایی ۵۸' ۳۳° شمالی انجام پذیرفته است. ستاره متغیر XZ Dra با بعد ۱° ۴۲/۶۱s و ۱۹h ۰۹m و میل ۱۱' ۳۲/۱" ۵۱' ۶۴+ در صورت فلکی اژدها<sup>۱۱</sup> قرار دارد. این ستاره که دارای بیشینه قدر مرئی ۹/۵۹، کمینه قدر مرئی ۱۰/۶۵، دوره تناوب (روز) ۰/۴۷۶۴۹۷ و رده طیفی F۶-F۶ است، در فهرست هیپارکوس<sup>۱۳</sup> با شماره ۹۴۱۳۴ و در فهرست سائو<sup>۱۴</sup> با شماره ۱۸۱۸۳ شناخته می‌شود [۹]. حداقل ارتفاع این ستاره در آسمان رصدگر در بازه زمانی رصد ۲۹' ۲۴° و حداکثر ارتفاع آن ۳۷' ۴۴° است.

### ۲.۲. مراحل انجام رصد

به منظور نورسنجی از ستاره مورد نظر، از تلسکوپ ۱۶ اینچ اشمیت-کاسگرین<sup>۱۵</sup> مدل LX۲۰۰GPS با استقرار سمت-

صورت می‌گیرد. اندازه‌گیری دقیق شدت نور دریافتی از این ستاره‌ها توسط ابزارهای نورسنجی مانند فوتومتر<sup>۱</sup> و CCD که به به تلسکوپ متصل می‌شوند انجام می‌پذیرد.

با تحلیل منحنی نوری این ستاره‌ها و بررسی دقیق طیف توانی آنها می‌توان به برخی از ویژگی‌های این ستاره‌ها از جمله وجود اثری به نام بلازکو<sup>۲</sup> در منحنی نوری آنها پی برد. این اثر که یکی از موضوع‌های جذاب در پژوهش ستاره‌های RR شلیاقی به شمار می‌آید، توجه بسیاری از ستاره‌شناسان را به خود جلب کرده است. منحنی نوری ستاره‌هایی که این اثر در آنها دیده شده است، در یک دوره منظم ۱۰ تا چند ۱۰۰ روزه نوساناتی را در دامنه یا فاز خود نشان می‌دهند که این نوسانات با نوسانات اولیه و شناخته شده ستاره متفاوت است. اولین بار در سال ۱۹۰۷ سرگی نیکولاویچ بلازکو<sup>۳</sup> در حین مطالعه تغییرات نوری ستاره متغیر RW Dra به وجود این اثر پی برد. تا به امروز نظریات زیادی درباره علت وجود این اثر مطرح گشته است اما با وجود گذشت سال‌ها از کشف آن هنوز ستاره‌شناسان نتوانسته‌اند دلایل قطعی در این باره بیابند. بر طبق مطالعات انجام شده حدود ۴۰ درصد از ستاره‌های RR شلیاقی از نوع بلازکو هستند [۳].

ستاره مورد بررسی در این مقاله، ستاره متغیر XZ Dra است که از متغیرهای تپشی RR شلیاقی زیر شاخه RRab به شمار می‌آید. این ستاره اولین بار در سال ۱۹۲۹ توسط شنلر<sup>۴</sup> [۴] کشف شد. پس از او بیر<sup>۵</sup> [۵] در سال ۱۹۳۴ رصدهایی را بر روی این ستاره صورت داد و دوره تناوب اصلی آن را به دست آورد. او همچنین اظهار داشت که نوسانات دیگری نیز در منحنی نوری این ستاره مشاهده کرده است. در سال ۱۹۴۱ بالیزز<sup>۶</sup> و دیتره<sup>۷</sup> [۶] وجود اثر بلازکو در منحنی نوری این ستاره را تأیید و دوره بلازکو آن را ۷۶ روز اعلام کردند. در سال ۲۰۰۱ مجموعه‌ای شامل رصدهای نورسنجی و برخی دیگر از اطلاعات

۸. Szeidl

۹. Jursik

۱۰. Right ascension

۱۱. Declination

۱۲. Draco

۱۳. Hipparcos catalog

۱۴. Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalog (SAO)

۱۵. Schmidt-Cassegrain

۱. Photometer

۲. Blazhko effect

۳. Sergey Nikolaevich Blazhko

۴. Schneller

۵. Beyer

۶. Balazs

۷. Detre

ستاره متغیر نورسنجی به عمل آوردیم.

### ۲.۳. نتایج حاصل از نورسنجی ستاره متغیر و مقایسه

با استفاده از نرم‌افزار متلب و داده‌های به دست آمده از رصد ستاره متغیر، مقایسه و آسمان پس‌زمینه، نمودار تغییرات شدت نور آنها بر حسب زمان رصد به دست آمد. با کم کردن تغییرات شدت نور آسمان پس‌زمینه از تغییرات شدت نور ستاره متغیر و مقایسه، منحنی نوری این ستاره‌ها حاصل شد (شکل‌های ۱ و ۲).

به منظور نمایش بهتر و واضح‌تر نحوه تغییرات نوری ستاره متغیر و مقایسه، به عنوان نمونه منحنی نوری شب یازدهم رصد برای این دو ستاره را به نمایش می‌گذاریم (شکل‌های ۳ و ۴).

انتظار می‌رود که منحنی نوری ستاره مقایسه یک خط راست در یک بسامد ثابت باشد، اما همان‌طور که ملاحظه می‌گردد منحنی نوری این ستاره یک خط منحنی است که تغییرات بسامدی از حدود ۲۰۰۰ هرتز در ساعات اولیه داده‌گیری تا حدود ۹۰۰ هرتز در ساعات پایانی آن را نمایش می‌دهد. در ستاره متغیر تغییرات نوری دوره‌ای است و عواملی مانند انبساط و انقباض لایه‌های سطحی ستاره سبب این تغییرات می‌شود. اما در ستاره مقایسه، عواملی به غیر از بروز تحولات درونی سبب تغییر در درخشندگی ستاره می‌گردند. تغییرات نوری ثبت شده برای ستاره مقایسه می‌تواند ناشی از عوامل زیر باشد:

تغییرات در کدورت جوی، تلاطم جوی، آلودگی نوری، دما، رطوبت و شرایط آب و هوایی در طول شب رصدی با توجه به تغییر زاویه سمت‌الرأسی ستاره، خطای ابزارهای رصدی که ناشی از تغییرات دمایی و شرایط آب و هوایی گنبد رصدخانه است، قرار نگرفتن ستاره در مرکز میدان دید فوتومتر، عبور ابرهای رقیق یا هواپیما از میدان دید تلسکوپ در حین نورسنجی.

نمودار اختلاف قدر ستاره متغیر و مقایسه نیز از طریق

محاسبه رابطه زیر حاصل شد (شکل ۵) [۱۱].

$$\Delta m = -2.5 \log \left( \frac{\text{ستاره متغیر} - \text{آسمان پس‌زمینه}}{\text{ستاره مقایسه} - \text{آسمان پس‌زمینه}} \right) \quad (1)$$

ارتفاعی<sup>۱</sup> و فوتومتر مدل SSP5 در صافی V جانسون<sup>۲</sup> بهره برده‌ایم. فوتومتر ابزاری اپتیکی برای اندازه‌گیری روشنایی ستاره‌هاست. نور ساطع شده از ستاره توسط تلسکوپ جمع‌آوری شده و در چشمی فوتومتر متصل به تلسکوپ کانونی می‌گردد. با چرخش آینه فلیپ<sup>۳</sup> دریچه چشمی فوتومتر بسته شده و دریافت نور از ستاره توسط فوتومتر متوقف می‌گردد. پرتوهای نور دریافت شده به سمت محفظه فتومولتی‌پلایر<sup>۴</sup> هدایت شده و پس از برخورد با آن به جریان الکتریکی تبدیل می‌شوند. این جریان توسط یک تقویت کننده با ضریب تقویت بالا، تقویت شده و به ولتاژ قابل اندازه‌گیری تبدیل می‌شود. سپس این ولتاژ به یک مبدل قیاسی به رقمی<sup>۵</sup> که توسط بسامد سیگنال خروجی خود توصیف می‌شود، خورانده شده و به بسامد تبدیل می‌گردد و در نهایت توسط یک کامپیوتر ثبت می‌شود. هر چه روشنایی ستاره بیشتر باشد عدد ثبت شده بزرگ‌تر خواهد بود. چنانچه از صافی‌های فوتومتر که تنها طول موج خاصی از نور ستاره را از خود عبور می‌دهند استفاده کنیم، می‌توانیم شدت نور ستاره در آن طول موج خاص را اندازه بگیریم [۱ و ۱۰].

برای بررسی بهتر نوسانات نوری ستاره متغیر، و مقایسه رفتار آن با ستاره‌ای که نوسانات نوری ندارد، ستاره ۴۲۲۵:۱۰۴۲ GSC را که شدت نور ثابتی دارد، قدر مرئی آن ۱۱٫۳، به قدر مرئی ستاره متغیر نزدیک است و محدوده مکانی آن با داشتن بعد ۱۹h ۰۹m ۱۶s و میل ۶۴° ۵۲' ۲۱" در محدوده مکانی ستاره متغیر قرار دارد را انتخاب کرده، و توسط تلسکوپ و فوتومتر معرفی شده همزمان با ستاره متغیر از این ستاره نیز با زمان نوردهی ۱۰ ثانیه نورسنجی صورت دادیم. در همان زمان آسمان پس‌زمینه نیز نورسنجی شد تا تأثیر شدت نور آسمان پس‌زمینه بر شدت نور ستاره متغیر و مقایسه لحاظ شود. به ازای هر بار نورسنجی از ستاره مقایسه<sup>۶</sup> و آسمان پس‌زمینه، ۳ بار از

۱. Alt-azimuth

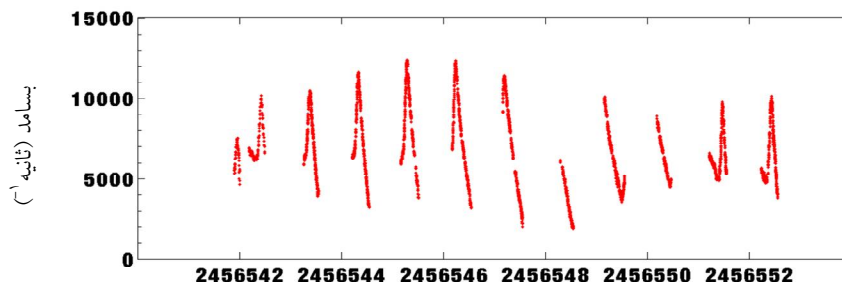
۲. Johnson filter

۳. Flip mirror

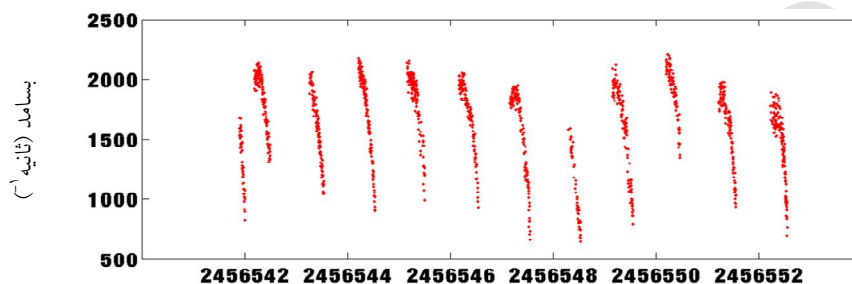
۴. Photomultiplier tube

۵. Analog-to-digital

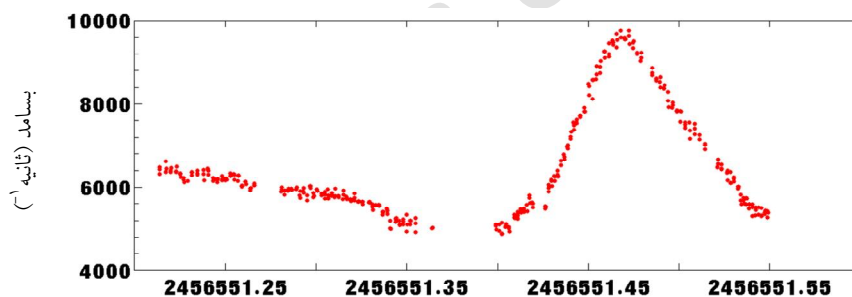
۶. Comparison star



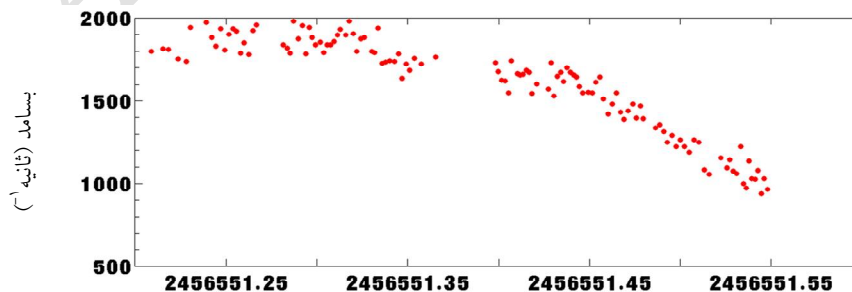
شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی نوری ستاره متغیر XZ Dra. زمان ژولیبانی



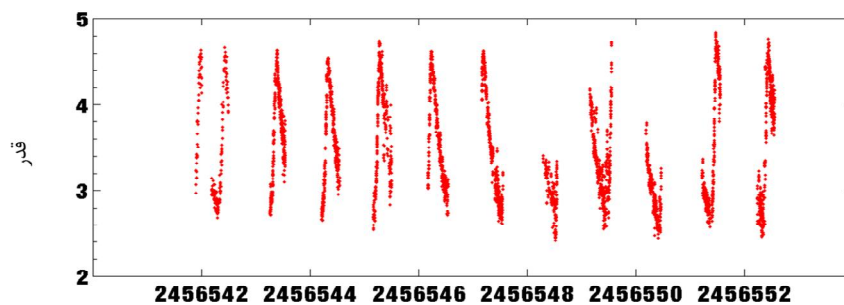
شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی نوری ستاره مقایسه GSC 4225:1042. زمان ژولیبانی



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی نوری شب یازدهم رصد برای ستاره متغیر XZ Dra. زمان ژولیبانی



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) منحنی نوری شب یازدهم رصد برای ستاره مقایسه GSC 4225:1042. زمان ژولیبانی



زمان ژولیبانی

شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار اختلاف قدر ستاره متغیر XZ Dra و ستاره مقایسه ۲۲۲۵:۱۰۴۲ GSC.

### ۳. تحلیل منحنی نوری

#### ۳.۱. آنالیز طیفی با استفاده از نرم‌افزار Period۰۴

پاتریک لنز<sup>۱</sup> و میشل برگر<sup>۲</sup> در سال ۲۰۰۵ نرم‌افزار Period۰۴ را جهت تجزیه و تحلیل آماری سری‌های زمانی نجومی طراحی کردند. در این پژوهش از نسخه ۱٫۲ این نرم‌افزار که در سال ۲۰۱۰ منتشر شده است بهره گرفته‌ایم [۱۲]. آنالیز طیفی در این نرم‌افزار بر اساس تبدیل فوریه گسسته صورت می‌گیرد [۱۳]. این تبدیل این امکان را فراهم می‌سازد که سری‌مان را از حوزه زمانی به حوزه بسامدی ببریم. برای سری زمانی مفروض  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  با تبدیل فوریه زیر:

$$X(w_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i w_k t_n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

طیف توانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(w_k) = |X(w_k)|^2. \quad (3)$$

سری زمانی نجومی معمولاً دارای داده‌هایی با فواصل غیر یکنواخت است که ناشی از ثبت غیر یکنواخت داده‌هاست. علاوه بر آن به دلیل عدم امکان رصد در طول روز، گاف‌های بزرگی نیز در این سری‌ها وجود دارد. این ویژگی‌ها سبب می‌شود تا آنالیز فوریه بر روی این سری‌های زمانی نتیجه مطلوبی همراه نداشته باشد. در نرم‌افزار Period۰۴ برای حل این مسئله از داده‌های مصنوعی استفاده می‌شود. بر اساس سری زمانی ورودی تابعی در نظر گرفته می‌شود که داده مصنوعی تولید می‌کند، به نحوی که سری زمانی غیر یکنواخت را به سری زمانی یکنواخت تبدیل می‌کند. شایان ذکر است که تهیه

کنندگان این نرم‌افزار از ذکر جزئیات این امر و روش مورد استفاده برای تولید داده مصنوعی خودداری کرده‌اند.

در طیف بسامدی و توانی یک سری زمانی، بسامد متعلق به بلندترین دامنه، بیانگر بسامد اصلی آن سری زمانی است (شکل‌های ۶ و ۷) که برای سری زمانی XZ Dra بلندترین دامنه<sup>۲</sup> (قدر)  $P = 0.756802068$  است که به بسامد (روز<sup>-۱</sup>)  $f = 2.09864$  تعلق دارد.

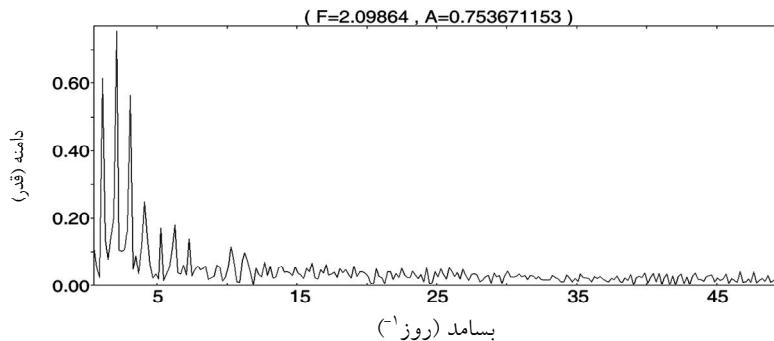
ملاحظه می‌گردد که در این طیف توانی قله‌های طیفی کاذب نیز دیده می‌شوند (شکل ۷).

Period۰۴ نرم‌افزاری با قابلیت‌های متعدد است. به عنوان مثال می‌توان سری زمانی ورودی را با تابعی سینوسی با روش کمترین مربعات<sup>۳</sup> [۱۴] برازش کرد. یک سری زمانی نجومی معمولاً با درصدی خطا همراه است که می‌تواند ناشی از عوامل گوناگونی مانند پایین بودن دقت رصد، ثبت یا ابزار رصدی باشد. در روش کمترین مربعات به دنبال بهترین تابع مدل جهت برازش مجموعه داده‌هایمان هستیم. مدلی که با داده‌ها سازگاری بیشتری داشته و در آن مجموع مربع باقی‌مانده‌ها کمینه شود. باقی‌مانده‌ها در واقع اختلاف بین داده حاصل از رصد و مقداری که از مدل به دست می‌آیند هستند و مجموع باقی‌مانده‌ها میزان خطای موجود در سری زمانی مان را نشان می‌دهند. در این نرم‌افزار برازش به شیوه کمترین مربعات با هدف بهبود دقت دامنه بسامد حاصل از تبدیل فوریه و یافتن مقادیر پارامترهای فاز، مجموع باقی‌مانده‌ها و نقطه صفر صورت می‌گیرد. در Period۰۴ تابع مدل برازش کننده<sup>۴</sup>  $N$  داده رصدی به صورت زوج مرتب  $[t_i, y(t_i)]$

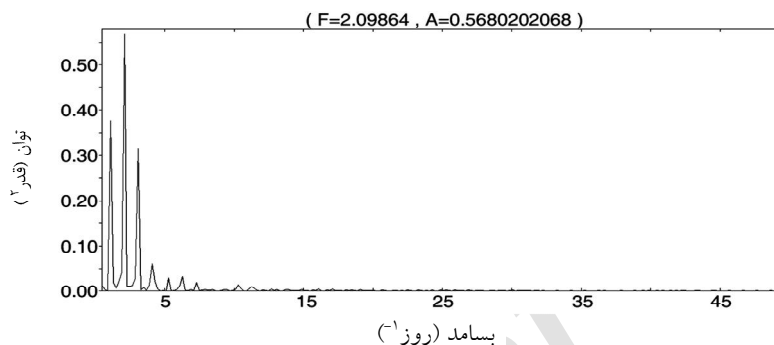
۳. Least squares fitting

۱. Patrick Lenz

۲. Michel Breger



شکل ۶. طیف بسامدی حاصل از نرم‌افزار Period۰۴ برای سری زمانی XZ Dra.



شکل ۷. طیف توانی حاصل از نرم‌افزار Period۰۴ برای سری زمانی XZ Dra

که شامل بسامد ۷ هستند به قرار زیر است:

$$f(t_i) = A \cos(\nu \pi \nu t_i) + B \sin(\nu \pi \nu t_i) + Z \quad (۴)$$

در این رابطه پارامترهای دامنه A و B و نقطه صفر مجهول Z هستند. مجموع مربع باقی‌مانده‌ها دارای رابطه زیر است:

$$S = \sum_{i=1}^N [y(t_i) - f(t_i)]^2 \quad (۵)$$

$$S = \sum_{i=1}^N [y(t_i) - A \cos(\nu \pi \nu t_i) - B \sin(\nu \pi \nu t_i) - Z]^2 \quad (۶)$$

جهت کمینه شدن تابع S، مشتقات پاره‌ای آن نسبت به

پارامترهای A، B و Z برابر صفر قرار می‌گیرند:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Z} = 0 \quad (۷)$$

به این ترتیب دستگاه معادلات زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{cases} A a_{11} + B a_{12} + Z a_{13} = C_1 \\ A a_{21} + B a_{22} + Z a_{23} = C_2 \\ Z = \frac{1}{N} [d - A a_{13} - A_2 a_{23}] \end{cases} \quad (۸)$$

$$\begin{cases} a_{11} = \sum_{i=1}^N \cos^2(\nu \pi \nu t_i) \\ a_{12} = \sum_{i=1}^N \cos(\nu \pi \nu t_i) \sin(\nu \pi \nu t_i) \\ a_{13} = \sum_{i=1}^N \cos(\nu \pi \nu t_i) \\ a_{21} = \sum_{i=1}^N \cos(\nu \pi \nu t_i) \sin(\nu \pi \nu t_i) \\ a_{22} = \sum_{i=1}^N \sin^2(\nu \pi \nu t_i) \\ a_{23} = \sum_{i=1}^N \sin(\nu \pi \nu t_i) \\ c_1 = \sum_{i=1}^N y(t_i) \cos(\nu \pi \nu t_i) \\ c_2 = \sum_{i=1}^N y(t_i) \sin(\nu \pi \nu t_i) \\ d = \sum_{i=1}^N y(t_i) \end{cases} \quad (۹)$$

جدول ۱. نتایج حاصل از برازش سری زمانی ستاره متغیر XZ Dra به شیوه کمترین مربعات.

(قدر) $Z$	$\varphi$	(قدر) $R$	(قدر) $C$	(روز <sup>-۱</sup> ) $\nu$
۳,۴۵۱۳۴۷۸۳	۰,۹۴۹۳۲۷	۰,۲۹۶۷۱۷۵۴۳	۰,۷۵۱۸۹۰۷۷۱	۲,۰۹۸۶۴

داده‌هاست که صرفاً بر اساس اطلاعات پیشین داده‌ها تعیین می‌شود. این بخش از رابطه در واقع یک ثابت تناسب است که جهت به‌هنجار کردن رابطه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۱۵].

در آنالیز حاضر فرضیه مورد نظر بسامد است و محاسبه چگالی طیفی توان با استفاده از چگالی احتمال پسین برای بسامد مطلوب ماست.

### ۳.۲.۲. محاسبه چگالی احتمال پسین برای بسامد

سری زمانی  $y(t_i)$  شامل  $N$  داده رصدی  $d_i$  را در اختیار داریم. متناسب با نوع توزیع داده‌ها، سری مفروض را با سیگنال هارمونیک ساکن  $f(t)$  همراه با نوفه<sup>۶</sup>  $e(t)$  که دارای واریانس  $\sigma^2$  است مدل کردیم:

$$d_i = y(t_i) = f(t_i) + e_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (14)$$

$$f(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t). \quad (15)$$

در این سری زمانی پارامترهای دامنه  $A_1$  و  $A_2$  و واریانس نوفه  $\sigma^2$ ، پارامترهای ناشناخته‌ای محسوب می‌شوند چرا که اطلاع پیشینی در مورد آنها نداریم. چنین پارامترهایی را پارامترهای مزاحم<sup>۷</sup> می‌نامند و باید از روابط حذف گردند.

جهت دست‌یابی به چگالی احتمال پسین برای بسامد، ابتدا چگالی احتمال پسین مشترک<sup>۸</sup> بسامد  $w$  و پارامترهای مزاحم  $\theta$  را تشکیل دادیم:

$$P(w, \theta | D, I) \propto P(w, \theta | I) \cdot P(D | w, \theta, I), \quad (16)$$

سپس از طریق محاسبه چگالی احتمال پسین حاشیه‌ای<sup>۹</sup> برای بسامد، پارامترهای مزاحم را از رابطه حذف کردیم:

$$P(w | D, I) = \int d\theta P(w, \theta | D, I), \quad (17)$$

از طریق حل دستگاه معادلات ذکر شده، پارامترهای  $A$ ،  $B$  و  $Z$  معلوم می‌شود. بدین ترتیب می‌توان سایر پارامترها را نیز به شرح زیر به دست آورد (جدول ۱):  
دامنه بهبود یافته برای بسامد  $\nu$ :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (10)$$

$$R = \sqrt{S}, \quad (11)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-B}{A}\right), \quad \varphi = \frac{\theta}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1. \quad (12)$$

### ۳.۲. آنالیز طیفی بیزی

#### ۳.۲.۱. تئوری بیز

این آنالیز بر مبنای تئوری بیز<sup>۱</sup> تدوین شده است. این تئوری که از یک قانون ساده در مورد احتمالات شرطی پیروی می‌کند دارای رابطه زیر است:

$$P(H | D, I) = \frac{P(H | I) \cdot P(D | H, I)}{P(D | I)}. \quad (13)$$

در این رابطه:

$H$  هر فرضیه‌ای است که آزمایش می‌شود،  $D$  داده‌های ما و  $I$  اطلاعات پیشین ماست.  $P(H | D, I)$  توزیع احتمال پسین<sup>۲</sup> برای فرضیه است که بر اساس داده‌ها و اطلاعات پیشین فرضیه تعیین می‌شود.  $P(H | I)$  توزیع احتمال پیشین<sup>۳</sup> برای فرضیه است که صرفاً بر اساس اطلاعات پیشین فرضیه تعیین می‌شود.  $P(D | H, I)$  توزیع احتمال مستقیم<sup>۴</sup> برای داده‌ها (تابع درست‌نمایی)<sup>۵</sup> است که بر اساس فرضیه و اطلاعات پیشین داده‌ها تعیین می‌شود.  $P(D | I)$  توزیع احتمال پیشین برای

۶. Noise

۷. Nuisance Parameters

۸. Joint

۹. Marginal

۱. Bayes

۲. Posterior

۳. Prior

۴. Direct

۵. Likelihood

چگالی احتمال پسین مشترک  $w, A_1, A_2, \sigma$  :

$$P(w, A_1, A_2, \sigma | D, I) \propto P(w, A_1, A_2, \sigma | I) \cdot P(D | w, A_1, A_2, \sigma, I), \quad (18)$$

در رابطه ذکر شده،  $P(D | w, A_1, A_2, \sigma, I)$  تابع درستنمایی است که مرسوم است آن را به صورت  $L(A_1, A_2, \sigma, w)$  نمایش دهند.

در مسئله ما توزیع‌های پیشین مستقل از هم هستند بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(w, A_1, A_2, \sigma | D, I) \propto P(w | I) \cdot P(A_1 | I) \cdot P(A_2 | I) \cdot P(\sigma | I) \cdot L(A_1, A_2, \sigma, w). \quad (19)$$

هنگامی که اطلاعات پیشینی در مورد پارامترهایمان نداشته باشیم، توزیع پیشینی به آنها اختصاص می‌دهیم که نشان دهنده عدم آگاهی ما در مورد آن پارامترها باشد. به این توزیع، توزیع پیشین یکنواخت<sup>۱</sup> یا تخت<sup>۲</sup> گفته می‌شود و مقدار آن متناسب با یک است:

$$\begin{cases} P(w | I) \propto 1, \\ P(A_1 | I) \propto 1, \\ P(A_2 | I) \propto 1, \end{cases} \quad (20)$$

بر طبق قرارداد در شرایطی که نوفه موجود در سری زمانی از تابع توزیع گوسی پیروی کند و در عین حال اطلاعات پیشینی هم در مورد واریانس نوفه نداشته باشیم، توزیع پیشین واریانس نوفه را متناسب با  $\frac{1}{\sigma}$  در نظر می‌گیریم که به آن توزیع پیشین جفریز<sup>۳</sup> می‌گویند:

$$P(\sigma | I) \propto \frac{1}{\sigma}, \quad (21)$$

با توجه به نکات ذکر شده رابطه (۱۹) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$P(w, A_1, A_2, \sigma | D, I) \propto \frac{1}{\sigma} L(A_1, A_2, \sigma, w). \quad (22)$$

تابع درستنمایی را بر اساس نوفه که تفاوت میان تابع مدل و داده‌هاست تعریف می‌کنند. به منظور ایجاد تابع درستنمایی، چگالی احتمال پیشین مستقیمی برای نوفه تعریف کردیم که بر اطلاعات پیشین در مورد نوفه استوار است. بر اساس قضیه حد

مرکزی هنگامی که متغیر موجود در یک آزمایش، مقادیر تصادفی و مستقل از هم داشته باشد و تعداد این مقادیر در آزمایش مربوطه زیاد باشد، آنگاه می‌توان این متغیر را با یک تابع توزیع گوسی توصیف کرد. بر همین اساس نوفه موجود در سری زمانی ما از تابع توزیع گوسی پیروی می‌کند:

$$P(e_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-e_i^2}{2\sigma^2}\right), \quad (23)$$

رابطه (۲۳) را برای مجموعه نوفه  $(e_1, e_2, \dots, e_N)$  بازنویسی کردیم:

$$P(e_1, e_2, \dots, e_N) = \prod_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-e_i^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \quad (24)$$

با جایگذاری عبارات  $e_i = d_i - f(t_i)$  و  $f(t_i) = A_1 \cos(wt_i) + A_2 \sin(wt_i)$  در رابطه (۲۴) تابع درستنمایی که تابعیتی از  $A_1, A_2, \sigma, w$  دارد را به دست آوردیم:

$$L(A_1, A_2, \sigma, w) \propto \sigma^{-N} \exp \left\{ \frac{-N}{2\sigma^2} \left[ \overline{d^2} - \frac{2}{N} [AR(w) + A_2 I(w)] + \frac{1}{2} [A_1^2 + A_2^2] \right] \right\}, \quad (25)$$

که  $\overline{d^2}$ ،  $R(w)$  و  $I(w)$  این چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \overline{d^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2, \\ R(w) = \sum_{i=1}^N d_i \cos(wt_i), \\ I(w) = \sum_{i=1}^N d_i \sin(wt_i). \end{cases} \quad (26)$$

برای دست‌یابی به  $L(w)$ ، ابتدا پارامترهای دامنه را از تابع درستنمایی حذف کردیم:

$$L(\sigma, w) = \iint dA_1 dA_2 L(A_1, A_2, \sigma, w), \quad (27)$$

$$L(\sigma, w) \propto \sigma^{-N+2} \exp \left\{ \frac{-N}{2\sigma^2} \left[ \overline{d^2} - \frac{2C(w)}{N} \right] \right\}, \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)  $C(w) = \frac{1}{N} [R^2(w) + I^2(w)]$  همان

پریودگرام<sup>۴</sup> فوریه  $C(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N d_j e^{-iwt_j} \right|^2$  است که طیف

توانی فوریه را نمایش می‌دهد و ما از طریق نظریه احتمالاتی بیز

۴. Periodogram

۱. Uniform  
۲. Flat  
۳. Jeffreys



فوریه  $C(w)$ ، بسامد اصلی نوسانات ستاره (روز<sup>-۱</sup>)  $f = ۲,۰۹۸۶۴$  به درستی تشخیص داده شده است اگر چه، قله‌های طیفی کاذب نیز در این طیف توانی به وضوح دیده می‌شوند (شکل ۸). در چگالی طیفی توان (شکل ۱۰) ضمن آنکه بسامد مورد نظر به خوبی شناسایی شده است، پردازش به گونه‌ای صورت گرفته که قله‌های طیفی کاذب نیز از آن حذف گردیده‌اند زیرا، چگالی احتمال پسین  $P(w|D, I)$  موجود در رابطه (۳۴) در این بسامد به بیشینه مقدار خود می‌رسد (شکل ۹). علاوه بر این به دلیل آنکه چگالی احتمال پسین مذکور توزیعی از نوع دلتا دارد، قله موجود در چگالی طیفی توان پهنای کمتری داشته و باریک‌تر است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این بخش به مقایسه نتایج حاصل از تحلیل طیفی سری نورسنجی XZ Dra توسط نرم‌افزار Period۰۴ و آنالیز طیفی بیزی می‌پردازیم. همان طور که ذکر شد در نرم‌افزار Period۰۴ از تبدیل فوریه گسسته برای دست‌یابی به طیف توانی بهره برده می‌شود. سری‌های زمانی نجومی معمولاً به صورت غیر یکنواخت همراه با گاف‌های بزرگ هستند و تبدیل فوریه بر روی چنین سری‌های زمانی نتیجه مطلوبی ارائه نمی‌دهد. در این نرم‌افزار جهت یکنواخت کردن سری زمانی از داده‌های مصنوعی استفاده می‌شود. اگر چه استفاده از داده‌های مصنوعی ممکن است در شناسایی درست بسامد اصلی موجود در سری زمانی اثر منفی بگذارد اما، با توجه به تشخیص دقیق بسامد (روز<sup>-۱</sup>)  $f = ۲,۰۹۸۶۴$  به عنوان بسامد اصلی نوسانات ستاره، می‌توان نتیجه گرفت که در این نرم‌افزار فرایند تولید داده مصنوعی به خوبی صورت گرفته است چرا که، بسامد مذکور با بسامد اعلام شده در مقاله معتبر [۸] که به بررسی رفتار فوتومتریک ستاره متغیر XZ Dra در بلند مدت می‌پردازد، و پایگاه اینترنتی [۹] متعلق به مجمع آمریکایی رصدکنندگان ستاره‌های متغیر<sup>۱</sup>، و سایر نتایج قبلی در این زمینه تطابق کامل دارد. با این حال ذکر دو نکته در مورد طیف توانی حاصل از

به آن دست یافتیم. بدین ترتیب توانستیم محدودیت آنالیز فوریه جهت تحلیل طیفی سری زمانی نجومی را پشت سر بگذاریم.

در گام بعدی پارامتر  $\sigma$  را از  $L(\sigma, w)$  حذف کردیم:

$$L(w) \propto \int d\sigma L(\sigma, w), \quad (۲۹)$$

بدین ترتیب چگالی احتمال پسین برای بسامد  $w$  به دست آمد [۱۵]:

$$P(w|D, I) \propto \frac{1}{\sigma} L(w), \quad (۳۰)$$

$$P(w|D, I) \propto \left[ 1 - \frac{\chi^2 C(w)}{Nd^2} \right]^{\frac{2-N}{2}}. \quad (۳۱)$$

#### ۳.۲.۳. محاسبه چگالی طیفی توان

چگالی طیفی توان، مقدار انتظاری انرژی حمل شده توسط سیگنال نه نوفه، در سراسر توزیع احتمال پسین مشترک برای همه پارامترها در بازه زمانی مشاهده سیگنال است. انرژی کل حمل شده توسط سیگنال برابر است با:

$$E = \int_{t_1}^{t_N} dt f^2(t) = \int_{t_1}^{t_N} dt [A_r \cos(wt) + A_r \sin(wt)]^2 \approx \frac{T}{\gamma} (A_r^2 + A_r^2). \quad (۳۲)$$

مقدار انتظاری این انرژی:

$$P(w) = \frac{T}{\gamma} \langle A_r^2 + A_r^2 \rangle, \quad (۳۳)$$

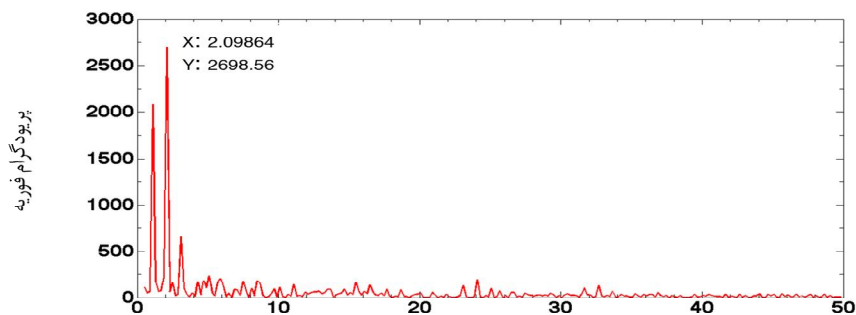
و در نهایت چگالی طیفی توان حاصل شد [۱۵]:

$$P(w) \propto \chi^2 C(w) P(w|D, I). \quad (۳۴)$$

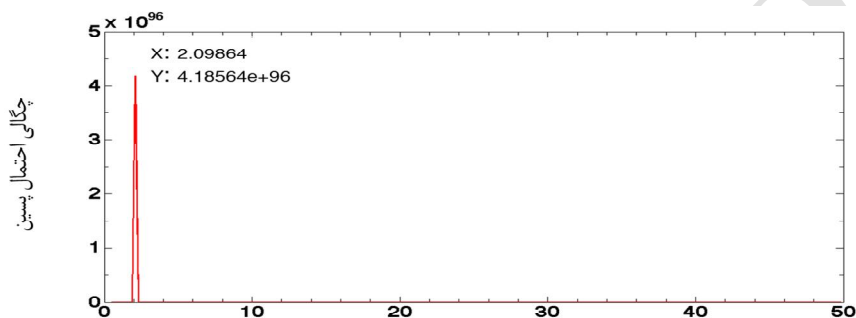
#### ۳.۲.۴. نمایش نحوه کارکرد آنالیز طیفی بیزی

به منظور سنجش آنالیز طیفی بیزی در ارائه طیف توانی، سری زمانی XZ Dra را توسط این آنالیز مورد بررسی قرار داده و طیف توانی آن را به دست آوردیم (شکل‌های ۸ و ۹ و ۱۰). ملاحظه می‌شود که، در آنالیز بیزی برای دست‌یابی به طیف توانی نیاز به یکنواخت بودن سری زمانی نیست و این آنالیز برای سری غیریکنواخت XZ Dra طیف توانی مناسبی ارائه کرده است (شکل ۱۰). در طیف توانی حاصل از پریودگرام

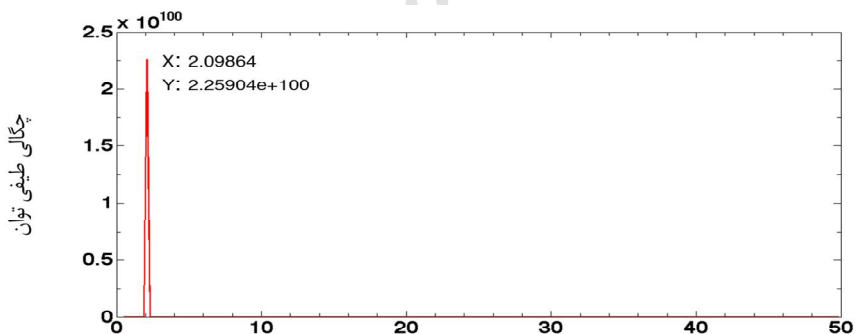
۱. American Association of Variable Star Observers (AAVSO)



شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پریودگرام فوریه برای سری زمانی XZ Dra . بسامد (روز<sup>-۱</sup>)



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) چگالی احتمال بسین بسامد برای سری زمانی XZ Dra . بسامد (روز<sup>-۱</sup>)



شکل ۱۰. (رنگی در نسخه الکترونیکی) چگالی طیفی توان برای سری زمانی XZ Dra . بسامد (روز<sup>-۱</sup>)

در آنالیز طیفی بیزی جهت ارائه طیف توانی مطلوب شرط یکنواخت بودن سری زمانی مطرح نیست. علاوه بر آن طیف توانی حاصل از این آنالیز از کیفیت بهتری نیز نسبت به طیف توانی آنالیز فوریه برخوردار است چرا که، در طیف توانی آن ضمن شناسایی درست بسامد اصلی ستاره، قله‌های طیفی کاذب نیز دیده نمی‌شوند. همچنین قله طیفی مذکور حول بسامد مورد

این نرم‌افزار لازم به نظر می‌رسد: ۱- در طیف توانی حاصل از این نرم‌افزار قله‌های طیفی کاذب نیز دیده می‌شوند. ۲- نحوه تولید داده مصنوعی برای یکنواخت کردن سری زمانی نجومی به طور دقیق مشخص نشده است. اما با توجه به قابلیت‌های دیگر این نرم‌افزار، می‌توان آن را نرم‌افزاری مناسب برای تحلیل آماری سری‌های زمانی نورسنجی به حساب آورد.

پژوهش، می‌توان آنالیز طیفی بیزی را روشی قدرتمند و کارآمد جهت تحلیل طیفی سری‌های زمانی نورسنجی معرفی کرد.

نظر دارای عرض کمتری بوده و دقیق‌تر است. ضمن آن که در این آنالیز پژوهشگر نیز در جریان روند دقیق محاسبات قرار می‌گیرد. در مجموع با توجه به نتایج به دست آمده از این

## مراجع

۱. ن ریاضی، «درآمدی بر اخترفیزیک نوین»، ع ف لقمان، انتشارات آوند اندیشه، شیراز (۱۳۸۴).
۲. The American Association of Variable Star Observers, "AAVSO Manual for Visual Observing of Variable Stars", (2013).
۳. M Skarka, A&A, **549** (2013) A101.
۴. H Schneller, Astron. Nachr., **235** (1929) 85.
۵. M Beyer, Astron. Nachr., 252 (1934) 85.
۶. J Bala'zs and L Detre, Astron. Nachr., **271** (1941) 231.
۷. B Szeidl, J Jurcsik., J M. Benko, and G A Bakos, Comm. Konkoly Obs., Budapest, **13** (2001) 101.
۸. J Jarcsik, J M Benko, and B Szeidl, A&A, 396 (2002) 539.
۹. www.aavso.org/vsx/index.php?view= detail .top & oid= 13723.
۱۰. OPTEC, Inc., "Technical Manual for Theory of Operation and Operating Procedures for SSP5 Model Photoelectric Photometer", (2006).
۱۱. E Budding and O Demircan, "Introduction Astronomical Photometry", Cambridge University Press, New York, (2007).
۱۲. P Lenz and M Breger, CoAst. **146** (2005) 53.
۱۳. J O Smith III, "Mathematics of Discrete Fourier Transform (DFT)", 2<sup>nd</sup> Ed., BookSurge Publishing, (2007).
۱۴. C Koen, "the Analysis of Indexed Astronomical Time Series-V. Fitting Sinusoids to High-Speed Photometry", MNRAS, **309** (1999) 769.
۱۵. G L Bretthorst, "Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation", Lecture Notes in Statistics 48, Springer-Verlag, (1988).

Archive 03