مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۷، شمارهٔ ۵، زمستان ۱۳۹۶

سیاه‌چاله‌های نظریهٔ گوس- بونه در حضور شاره کامل

ندا فرهنگ خواه

گروه فیزیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

پست الکترونیکی: farhangkhah@iaushiraz.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۵/۱۴ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۰۳/۰۹)

چکیده

در این مقاله جواب عام نظریهٔ گرانش گوس- بونه در حضور یک شارهٔ کامل با فشار ترمودینامیکی p و چگالی انرژی ρ در n بعد ارائه می‌شود. بر این اساس تانسور شارهٔ کامل را به عنوان تانسور انرژی- تکانه در نظر می‌گیریم و جواب‌های ایستا و تابشی برای معادلهٔ حالت خطی که به صورت $p = w\rho$ می‌باشد را به دست خواهیم آورد. جواب کلی به دست آمده شامل کلیه جواب‌هایی است که تاکنون درگرانش گوس- بونه ارائه شده است، از جمله جواب‌های ایستای مجانباً تخت باردار، مجانباً (آنتی)- دوسیته غیرباردار و جواب‌های مجانباً تخت و(آنتی)- دوسیته تابشی و همچنین چندین جواب ایستا و تابشی جدید برای مقادیر مختلف w می‌باشد. خصوصیت‌های این جواب‌ها را برای دو مقدارخاص $w = 0$ و $w = (n-2)^{-1}$ در حالت‌های ایستا وتابشی مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین خواهیم دید که این جواب‌ها که شرط‌های ضعیف و غالب انرژی را برآورده می‌کنند، با انتخاب مناسب پارامترها می‌توانند سیاه‌چاله‌هایی با یک یا دو افق حادثه و یا تکینگی بدون افق باشند.

واژه‌های کلیدی: گرانش گوس- بونه، تانسور انرژی- تکانه، معادلهٔ خطی حالت، تکینگی، شرط غالب و ضعیف انرژی

۱. مقدمه

در تمام نظریه‌هایی که پیش از قرن بیستم مطرح شدند فرض شده است که جهان ما یک فضا- زمان چهار بعدی می‌باشد. نورداشتروم [۱] و کالوزا و کلاین [۲] در اوایل قرن بیستم مدلی به منظور وحدت بخشیدن دو نظریه گرانش و الکترومغناطیس ارائه کردند. آنها نشان دادند که اتحاد این دو نظریه فقط زمانی امکان پذیر است که فضا- زمان به یک خمینه[۱] پنج بعدی گسترش یابد، به طوری که میدان‌ها به ابعاد بالاتر بستگی نداشته باشند. پس از آن نظریه‌های مختلفی که فضا- زمان را با بعد بیشتر از چهار پیش‌بینی می‌کنند مطرح شدند [۳]. از میان آنها می‌توان به نظریهٔ ریسمان و M- تئوری [۴] که بیشتر مورد توجه قرار گرفته است اشاره کرد. علاوه بر آن نظریهٔ جهان لایه‌ای نیز به ابعادی بیشتر از چهار احتیاج دارد.

بنابر آنچه گفته شد می‌توان فرض کرد که گرانش و ماده می‌توانند در جهانی با ابعاد بیشتر وجود داشته باشند. برای در نظر گرفتن میدان گرانشی در ابعاد بالاتر از نظریه‌های تعمیم یافته در گرانش بهره می‌بریم. همان طور که می‌دانیم دینامیک عالم ما درحد کلاسیک به وسیله معادلات میدان گرانشی بیان می‌شود که طرف راست آنها تانسور انرژی- تکانهٔ ماده بوده و

۱. Manifold

سمت چپ آنها بیانگر هندسه فضا- زمان است. معادلات گرانشی به فرم اولیه شان که توسط اینشتین مطرح شد، با تانسور انرژی- تکانهٔ مادهٔ معمولی به کیهانی با انبساط شتابدار نمی‌انجامند. از طرفی رصدهای اخیر نجوم نشان می‌دهد که جهان در حال انبساط با شتاب ثابت است. به این منظور می‌توان درمعادلات به دو طریق تغییر ایجاد کرد. اول اینکه در طرف راست معادله، تانسور انرژی- تکانهٔ مربوط به انرژی تاریک را اضافه کنیم. راه دوم تعمیم طرف چپ معادله می‌باشد. در صورتی که بخواهیم فرض‌های اینشتین را حفظ کنیم برای طرف چپ معادله به تانسور لاولاک خواهیم رسید که به توصیف انبساط شتابدار عالم می‌انجامد. در گرانش لاولاک از کنش عام‌تری نسبت به گرانش اینشتین استفاده می‌شود. یک راه برای به دست آوردن چنین کنشی کمک گرفتن از نظریهٔ ریسمان می‌باشد. اثر نظریهٔ ریسمان بر گرانش کلاسیک از طریق کنش مؤثر در حد انرژی پایین می‌باشد که می‌تواند گرانش کلاسیک را به خوبی توصیف کند [۵، ۶]. با وردش کنش لاولاک نسبت به متریک به تانسور لاولاک می‌رسیم. جملات اضافی تانسور لاولاک در چهار بعد صفر بوده و در نتیجه این تانسور در چهار بعد به تانسور اینشتین کاهش می‌یابد. این نتیجه با قضیه ای که در مقالات [۷- ۹] نشان داده شده است که تانسور اینشتین تنها تانسور متقارن پایستاری می‌باشد که شامل مشتقات درجه دو متریک است سازگاری دارد.

مطالعهٔ گرانش لاولاک می‌تواند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد. جواب ایستای بدون بار گرانش گوس- بونه در مرجع [۱۰] وجواب باردار آن در مرجع [۱۱] و خواص ترمودینامیکی این جواب‌ها در مرجع [۱۲] معرفی شده‌اند. همچنین جواب‌های چرخان باردار در مرجع [۱۳] وخواص ترمودینامیکی آنها در [۱۴] آمده است.جواب تابشی این نظریه و خواص آنها نیز در مراجع [۱۵، ۱۶] و منابع ذکر شده در آن آمده است. همچنین در مقاله [۱۷] جواب‌های دقیق گرانش گوس- بونه در حضور شارهٔ کاملی که دارای توزیع کروی می‌باشد به دست آمده و خصوصیات فیزیکی آن مورد مطالعه قرار گرفته است. خواننده برای مطالعه بیشتر بر جواب‌های به دست آمده در نظریهٔ گوس- بونه می‌تواند به منابع ذکر شده در [۱۸] مراجعه نماید. در این مقاله می‌خواهیم جواب‌های ایستا و تابشی در نظریه گوس- بونه را در حضور یک شارهٔ کامل به دست آورده و خواص جواب‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. از آنجا که جملات با انحنای بالاتر را که توسط نظریهٔ گرانش گوس- بونه معرفی می‌شوند در معادلات میدان به کار می‌گیریم، پیش‌بینی می‌کنیم که خواص متفاوتی برای جواب‌های به دست آمده مشاهده کنیم.

ترتیب مباحث این مقاله به صورت ذیل می‌باشد. در بخش بعد معادلات میدان در گرانش گوس- بونه را معرفی کرده و کلی ترین جواب گرانش گوس- بونه با تقارن کروی در حضور شارهٔ کامل نوع دو را به دست می‌آوریم. در بخش سوم جواب کلی ایستا را در حضور شارهٔ کامل برای معادله حالت خطی به دست آورده و خواص حالت‌های مختلف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش چهارم جواب‌های تابشی شارهٔ کامل را برای معادلهٔ حالت خطی معرفی می‌کنیم و در مورد خواص دینامیکی این جواب‌ها به منظور بررسی سرشت تکینگی فضا- زمان بحث خواهیم کرد و در انتها به ارائهٔ نتایج خواهیم پرداخت.

۲. جواب کلی در گرانش گاوس- بونه

کنش زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S=\int d^n x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa_n{}^2}(R+\alpha L_{GB})\right], \qquad (1)$$

که در آن α ضریب گاوس- بونه بوده و L لاگرانژی گاوس- بونه می‌باشد که برابر است با:

$$\mathrm{L_{GB}}=R^2-4R_{ab}R^{ab}+R_{abcd}R^{abcd}. \qquad (2)$$

با وردش این کنش نسبت به سنجه g_{ab} معادلات میدان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{G_{ab}}+\alpha' H_{ab}=\kappa_n^2 T_{ab}, \qquad (3)$$

که در این رابطه داریم:

$$H_{ab}=2(R_{acde}R_b^{cde}-2R_{afbc}R^{fc}-2R_{ac}R_b^c+RR_{ab}), \qquad (4)$$

سنجهٔ فضا- زمان با تقارن کروی در n- بعد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$ds^{۲} = -f(v,r)dv^{۲} + ۲drdv + r^{۲}\gamma_{ij}d\theta^{i}d\theta^{j} \ , \qquad (۵)$$

که در آن $۰ \le r < \infty$ مختصهٔ شعاعی، $-\infty < v < \infty$ مختصهٔ زمانی تقدمی[۱] و $\gamma_{ij}d\theta^{i}d\theta^{j}$ المان خطی یک کرهٔ واحد $(n-۲)$- بعدی می‌باشد. به منظور به دست آوردن جواب‌ها در حضور شارهٔ کامل، تانسور انرژی- تکانهٔ زیر را طبق تعریف هاوکینگ والیس [۱۹] در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \sigma(v,r)v_a v_b + \rho(v,r)(v_a w_b + w_a v_b) \\ &\quad + p(v,r)(v_a w_b + w_a v_b + g_{ab}), \end{aligned} \qquad (۶)$$

دراین رابطه $v_a = (۱,۰,۰,۰,...)$ و $w_b = (f/۲,-۱,۰,۰,...)$ دو بردار n بعدی مستقل خطی نول به سمت آینده هستند که برای آنها رابطه $v_a w_b = -۱$ برقرار است. این تانسور انرژی- تکانه به نحوی انتخاب شده که برای آن داشته باشیم: $T_{ab}v^a v^b = ۰$ و $T_{ab}w^a w^b = \sigma$، و به همین دلیل فقط در راستای یکی از جهت‌های نول شار انرژی خواهیم داشت. این تانسورانرژی- تکانه برای $p = \rho = ۰$ تبدیل به تانسوری می‌شود که متریک وایدیا را می‌دهد.

قابل ذکراست که تانسور انرژی تکانهٔ (۶) شرط ضعیف وغالب انرژی رادر صورت برقراری دو شرط $[\rho \ge ۰,\ \rho + p \ge ۰,\ \sigma > ۰]$ و $[\rho \ge ۰,\ -p \le \rho \le p,\ \sigma > ۰]$ ارضا می‌کند.

مؤلفه‌های $T_v{}^v$ و $T_v{}^r$ و $T_i{}^i$ معادلهٔ میدان (۳)، در دستگاهی که برای سادگی در آن α' را برابر با $\alpha/(n-۳)(n-۴)$ انتخاب می‌کنیم، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \rho(v,r) = -T_v^v &= -\frac{(n-۲)}{۲k_n^{۲}r^{۲}}\{[۱+\frac{۲\alpha}{r^{۲}}(۱-f)]rf' \\ &\quad -(۱-f)[(n-۳)+\frac{(n-۵)\alpha}{r^{۲}}(۱-f)]\}, \end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\sigma(v,r) = T_v^r = -\frac{(n-۲)\dot{f}}{۲k_n^{۲}r^{۳}}[\frac{r^{۲}+۲\alpha(۱-f)}{r^{۳}}], \qquad (۸)$$

$$p(r) = T_i^i - \frac{۱}{(n-۲)r^{n-۳}}\frac{d}{dr}(r^{n-۲}\rho(r)). \qquad (۹)$$

برای حل معادلات، میدان تابع انرژی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon(v,r) = \frac{۲k_n^{۲}}{(n-۲)}\int_r \rho(v,r)r^{n-۲}dr. \qquad (۱۰)$$

که با جایگذاری ρ(v,r) از رابطهٔ (۷) دراین رابطه و انتگرال‌گیری، رابطهٔ (۱۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varepsilon(v,r) = r^{n-۳}[۱-f] + \alpha r^{n-۵}[۱-f]^{۲}. \qquad (۱۱)$$

مولفه های معادلهٔ میدان (۳) مستقل نمی‌باشند. در واقع می‌توان گفت که توابع ρ(v,r) و σ(v,r) برای متریک (۵) توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\sigma(v,r) = T_v^r = \frac{(n-۲)}{۲k_n^{۲}r^{n-۲}}\dot{\varepsilon}\ . \qquad (۱۲)$$

برای به دست آوردن تابع f(r) به صورت صریح معادلهٔ (۱۱) را بر حسب f(r) حل می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$f(v,r) = ۱ + \frac{r^{۲}}{۲\alpha}\{۱ \mp (\sqrt{۱+\frac{۴\alpha\varepsilon(v,r)}{r^{n-۱}}})\}\ , \qquad (۱۳)$$

این جواب، کلی ترین جواب با تقارن کروی در گرانش گوس- بونه در حضور شارهٔ کامل نوع دو می‌باشد که در آن رابطهٔ بین توابع ρ و p و σ با روابط (۹) و (۱۲) داده می‌شود. این جواب تمام جواب‌های به دست آمده در گرانش گوس- بونه و همچنین چندین جواب جدید را در بر دارد که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

۳. جواب‌های ایستا برای معادلهٔ خطی حالت

در فصل جواب‌های ایستای نظریه گوس- بونه را در حضور شارهٔ کامل نوع یک به دست می آوریم. در این حالت σ، چگالی انرژی تابش نول وایدیا، صفر می‌باشد. با استفاده از معادلهٔ خطی حالت p=wρ رابطهٔ (۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dr}(r^{n-۲}\rho(r)) + (n-۲)r^{n-۳}w\rho(r) = ۰\ , \qquad (۱۴)$$

که از حل این معادله داریم:

$$\rho(r) = \frac{\lambda^{۲}}{r^{(w+۱)(n-۲)}}, \qquad (۱۵)$$

در این رابطه ثابت انتگرال‌گیری را $\lambda^{۲}$ انتخاب کردیم که شروط انرژی ضعیف و غالب برقرار باشند. از معادلهٔ (۱۰) داریم:

---

۱. Advanced time

$$\varepsilon(r) = m - \frac{\lambda^2}{[w(n-2)-1]r^{w(n-2)-1}} \qquad w(n-2)\neq 1$$
$$= m + \lambda^2 \ln r \ , \qquad w(n-2)=1 \qquad (16)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$f(r') = 1 + \frac{r'^2}{2\alpha}\{1 \mp (1 + \frac{4\alpha}{r'^{n-1}} (m - \frac{\lambda^2}{[w(n-2)-1]r'^{w(n-2)-1}})^{1/2}\} \ . \qquad (17)$$

با نگاهی دقیق به رابطهٔ بالا در می‌یابیم که جملهٔ زیر رادیکال به ازای $r' < r_0$ منفی و بنابراین تابع $f(r')$ برای این مقادیر موهومی می‌شود که r_0 ریشهٔ معادلهٔ ذیل می‌باشد:

$$[w(n-2)-1]r_0^{(n-2)(w+1)} + 4\alpha\varepsilon[w(n-2)-1]r_0^{w(n-2)-1} - 4\alpha\lambda^2 = 0, \qquad (18)$$

برای اجتناب از موهومی شدن تابع $f(r')$ که باعث گسترده شدن فضا- زمان به ناحیه‌ای ممنوع می‌شود، مؤلفهٔ شعاعی r' را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$r^2 = r'^2 - r_0^2 \qquad (19)$$

با این تبدیل متریک رابطهٔ (۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}\frac{r^2}{r^2+r_0^2}dr^2 + (r^2+r_0^2)d\Omega_{n-2}^2 \ . \qquad (20)$$

در رابطهٔ (۱۷) جواب با علامت منفی برای رادیکال را شاخهٔ منفی و جواب با علامت مثبت را شاخهٔ مثبت می‌نامیم. جواب شاخهٔ منفی در حد $\alpha \to 0$ به جواب معادلهٔ اینشتین می انجامد ولی برای شاخه مثبت هیچ گونه جواب متناظری در گرانش اینشتین وجود ندارد.

محاسبهٔ اسکالر کریشمان $R_{abcd}R^{abcd}$ نشان می‌دهد که این مقدار در $r=0\,(r'=r_0)$ واگرا و برای $r\neq 0$ متناهی می‌باشد و در $r\to\infty$ به سمت صفر می‌رود. بنابراین فضا- زمان دارای یک تکینگی ذاتی در $r=0$ است. در ادامه به منظور بررسی جواب‌ها چندین حالت خاص را در نظر می‌گیریم.

برای $w=1$، با انتخاب $q^2=\lambda^2/(n-3)$ رابطهٔ (۱۳) به

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha}\{1\mp[1+\frac{4\alpha}{r^{n-1}}(\frac{m}{r^{n-1}}+\frac{q^2}{r^{2(n-2)}})]^{\frac{1}{2}}\} \ , \qquad (21)$$

تبدیل خواهد شد که جواب ایستای باردارمجانباً تخت گرانش گوس- بونه می‌باشد و در مقالهٔ [۱۱] با در نظر گرفتن تانسور انرژی- تکانه میدان الکترومغناطیسی ماکسول به دست آمده است. این جواب شرط ضعیف و غالب انرژی را برآورده می‌کند.

برای $w=-1$ با انتخاب $\lambda^2=(n-1)\Lambda$ تابع $f(r)$ به صورت

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha}\{1\mp[1+\frac{4\alpha}{r^{n-1}}(\frac{m}{r^{n-1}}+\Lambda)]^{\frac{1}{2}}\} \ , \qquad (22)$$

خواهد بود که با انتخاب مقدار مثبت برای Λ به منظور برقراری شروط ضعیف و غالب انرژی، این رابطه جواب مجانباً دوسیته گرانش گوس- بونه می‌باشد.

۳،۱. جواب ایستا برای حالت $w=0$

در این صورت معادلهٔ حالت غبار می‌باشد که جوابی جدید برای نظریهٔ گرانش به دست می‌دهد. تابع $f(r)$ جواب معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$r^{n-3}[1-f] + \alpha r^{n-5}[1-f]^2 = \lambda^2 r + m \ , \qquad (23)$$

که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha}\{1\mp[1+4\alpha(\frac{m}{r^{n-1}}+\frac{\lambda^2}{r^{n-2}})]^{\frac{1}{2}}\} \ . \qquad (24)$$

به منظوربررسی ساختار کلی این جواب به بررسی تکینگی‌های فضا- زمان می‌پردازیم. به راحتی می‌توان نشان داد که کمیت نرده‌ای کریشمان در $r=0$ واگرا است، در $r\neq 0$ محدود است و در $r\to\infty$ به سمت صفر می‌رود. بنابراین سنجهٔ (۵) دارای یک تکینگی ذاتی در $r=0$ است. همچنین شایان ذکر است که اسکالر ریچی در همه جا به جز در $r=0$ محدود می‌باشد و در $r\to\infty$ به سمت صفر می‌رود. برای جستجوی افق رویداد باید ریشه‌های $g^{rr}=f(r)=0$ را به دست آوریم.

$$r_+^{n-3} + \alpha r_+^{n-5} - \lambda^2 r_+ - m = 0 \ , \qquad (25)$$

باید توجه داشت که با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترهای m و λ معادلهٔ فوق دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت می‌باشد که برای آن $f(r_{ext})=f'(r_{ext})=0$ برقرار می‌باشد. با استفاده از رابطهٔ (۲۳) داریم:

$$(n-3)r_{ext}^{n-4} + (n-5)\alpha r_{ext}^{n-6} - \lambda^2{}_{ext} = 0 \ , \qquad (26)$$

که با حذف r_{ext} بین رابطهٔ فوق و رابطهٔ (۲۵) برای $r_+ = r_{ext}$ می‌توان رابطهٔ بین m_{ext} و λ_{ext} را به دست آورد. به عنوان مثال با انجام محاسبات برای $n=5$ رابطهٔ بین این دو به صورت زیر خواهد بود:

$$m = -\frac{\lambda_{ext}^{2}}{4} + \alpha , \qquad (27)$$

حال می‌توان نتیجه گرفت که جواب (۲۴) نمایانگر یک سیاه‌چالهٔ حدی برای $\lambda=\lambda_{ext}$ سیاه‌چاله‌ای با دو افق حادثه برای $\lambda>\lambda_{ext}$ و تکینگی بدون افق برای $\lambda<\lambda_{ext}$ می‌باشد. همچنین می‌توان دما را از طریق تعریف گرانش سطح به دست آورد که برابر است با:

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{(n-3)r_+^{n-4} + \alpha(n-5)r_+^{n-6} - \lambda^{2}}{r_+^{n-3} + 2\alpha r_+^{n-5}} , \qquad (28)$$

آنتروپی اکثر سیاه‌چاله‌ها از قانون سطح به دست می‌آید که بیان می‌کند آنتروپی سیاه‌چاله برابر با یک چهارم مساحت افق رویداد می‌باشد [۲۰]. این قانون برای تمام سیاه‌چاله‌های نظریه اینشتین درست برقرار است [۲۱]. اما به طور کلی در گرانش مشتقات بالاتر، قانون مساحت برای آنتروپی برقرار نمی‌باشد [۲۲]. در نظریهٔ گرانش لاولاک آنتروپی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{2\pi}{k_n^{2}} \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} p\alpha'_k \int d^{n-2}x\sqrt{\tilde{g}}\,\tilde{\mathcal{L}}_{p-1} . \qquad (29)$$

در این رابطه انتگرال گیری بر روی یک ابر سطح فضاگونه $(n-2)$- بعدی انجام می‌گیرد، $\tilde{g}_{ab}$ متریک القایی بر روی این سطح و $\tilde{\mathcal{L}}_p$ لاگرانژی p امین مرتبهٔ لاولاک می‌باشد. در نتیجه برای گرانش گوس- بونه آنتروپی به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{4}\int d^{n-2}x\sqrt{\tilde{g}}\,(1+2\alpha\tilde{R}), \qquad (30)$$

آنتروپی برای جواب (۲۴) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{4}V_{n-2}r_+^{n-2}\left(1+\frac{2(n-2)\alpha}{(n-4)r_+^{2}}\right). \qquad (31)$$

۲.۳. جواب ایستا برای حالت $w=(n-2)^{-1}$

همان طور که دیدیم جواب متریک به دست آمده در رابطهٔ (۱۶) برای حالت $w=(n-2)^{-1}$ متفاوت شد که این جواب نیز همانند جواب حالت $w=0$ جوابی جدید می‌باشد که عبارت است از:

$$f(r) = 1+\frac{r^{2}}{2\alpha}\left\{1\mp\left[1+\frac{4\alpha}{r^{n-1}}(m+\lambda^{2}\ln r)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} , \qquad (32)$$

در این جواب برای r های به اندازهٔ کافی کوچک عبارت زیر رادیکال می‌تواند منفی باشد. همان طور که گفته شد تغییر مختصاتی جدید باید انجام داد که r_0 ریشهٔ معادلهٔ ذیل می‌باشد:

$$r_0^{n-1} + 4\alpha\lambda^{2}\ln r_0 + 4\alpha\varepsilon = 0. \qquad (33)$$

لازم به ذکر است جوابی که به دست می‌آید بیانگر فضا- زمانی مجانباً تخت با تکینگی ذاتی در $r=0$ می‌باشد وافق (های) این فضا- زمان (در صورت وجود) ریشه (های) معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$r_+^{n-3} + \alpha r_+^{n-5} - m - \lambda^{2}\ln r_+ = 0 , \qquad (34)$$

برای $n=5$ رابطهٔ بین λ_{ext} و m_{ext} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{ext} = \alpha - \lambda_{ext}^{2}\left(\ln\frac{\lambda_{ext}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) , \qquad (35)$$

جواب (۳۲) برای $m>m_{ext}$ نشان دهندهٔ یک سیاه‌چاله ایستا با دو افق رویداد، برای $m=m_{ext}$ سیاه‌چاله‌ای با یک افق و برای $m<m_{ext}$ یک تکینگی بدون افق می‌باشد.

۴. جواب‌های تابشی برای معادلهٔ خطی حالت

برای جواب‌های تابشی تابع انرژی به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon(v,r) = \begin{cases} m(v) - \dfrac{\lambda^{2}(v)}{[w(n-2)-1]r^{w(n-2)-1}}, & w(n-2)\neq 1 \\ m(v) + \lambda^{2}(v)\ln r, & w(n-2)=1 \end{cases} \qquad (36)$$

در صورتی که $w=-1$ باشد این رابطه جواب مجانباً آنتی دو سیته وایدیا می‌باشد.

برای $w=1$ با انتخاب $q(v)^{2} = \lambda(v)^{2}/(n-3)$ به جوابی جدید تبدیل می‌شود که عبارت است از:

$$f(r) = 1+\frac{r^{2}}{2\alpha}\left\{1\mp\left[1+4\alpha\left(\frac{m(v)}{r^{n-1}}+\frac{q^{2}(v)}{r^{2(n-2)}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \qquad (37)$$

با جایگذاری می‌توان دید که σ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{(n-2)V_{n-2}}{2k_n^{2}}\left(\frac{\dot{m}}{r^{n-2}} - \frac{2q\dot{q}}{r^{2n-5}}\right) , \qquad (38)$$

این رابطه جواب معادلهٔ گوس- بونه با در نظر گرفتن تانسور انرژی- تکانه زیر می‌باشد:

$$T_{ab}=F_{ac}F_b^c-\frac{1}{4}g_{ab}F^2+\sigma v_a v_b. \qquad (۳۹)$$

که در این رابطه $F_{ab}=\partial_a A_b-\partial_b A_a$ تانسور انرژی- تکانهٔ میدان الکترومغناطیسی و $A_a=q(v)/r^{(n-2)}\delta_a^t$ پتانسیل برداری می‌باشد.

سرشت تکینگی یعنی بدون افق یا افق دار بودن تکینگی از طریق بررسی وجود یا عدم وجود ژئودزیک‌های نول شعاعی خارج شونده از تکینگی امکان پذیر می‌باشد. سرشت تکینگی جواب باردار شبیه جواب بدون بار می‌باشد که در [۱۶] بررسی شده است و بنابراین در اینجا فقط به مقایسه توان تکینگی جواب‌های باردار و بدون بار می پردازیم. برای یک جواب شرط انحنای قوی [۲۳] یا همگرایی حدی [۲۴] درصورت مثبت بودن $\tau^2\Phi$ یا $\tau\Phi$ برقرار می‌باشد، که τ پارامتر مسیر و Φ برابر با $\Phi=R_{ab}k^a k^b$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که برای متریک (۵)، Φ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Phi=-\frac{2(n-2)\dot{f}}{rf^2}(k^r)^2, \qquad (۴۰)$$

و ژئودزیک‌های نول شعاعی از معادلهٔ دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{dk^r}{d\tau}=\frac{2\dot{f}}{f^2}(k^r)^2. \qquad (۴۱)$$

با انتخاب $m(v)=m_0\theta(v)v^{n-3}$ و $q^2(v)=q_0^2\theta(v)v^{2(n-3)}$، که m_0 و q_0 دو ثابت دلخواه می‌باشند و $\theta(v)$ تابع پله‌ای است که برای $v>0$ یک وبرای $v<0$ صفر می‌باشد، برای $n=5$ داریم:

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^2\Phi=\lim_{\tau\to 0}\tau\Phi=\lim_{\tau\to 0}r=0\,, \qquad (۴۲)$$

بنابراین هیچکدام از دو شرط انحنای قوی و همگرایی حدی برقرار نمی‌باشد در صورتی که جواب بدون بار شرط همگرایی حدی را ارضا می‌کند و می‌توان به این نتیجه رسید که بار توان تکینگی را کاهش می‌دهد. برای $n>5$ داریم:

$$\lim_{r\to 0}f=1\,,\quad \lim_{r\to 0}\dot{f}=-\frac{(n-1)q_0^2}{\sqrt{\alpha}} \qquad (۴۳)$$

در این صورت در نزدیکی $r=v=0$ معادله (۴۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{dk^r}{d\tau}\approx-\left(\frac{(n-1)q_0^2}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\,, \qquad (۴۴)$$

که جواب این معادلهٔ دیفرانسیل $r\approx\left(-\frac{(n-1)q_0^2}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-1}\ln(\tau+1)$ می‌باشد و می‌توان نشان داد که فقط شرط همگرایی حدی برقرارمی‌باشد. در انتها لازم به ذکر است توان تکینگی جواب تابشی برای $w=0$ دقیقاً شبیه حالتی است که λ برابر با صفر باشد.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله جواب‌های ایستای نظریهٔ گرانش گوس- بونه را در حضوریک شارهٔ کامل بررسی کردیم. معادلهٔ حالت را به صورت $p=w\rho$ در نظر گرفته و با حل معادلات میدان جواب کلی این نظریه را ارائه کردیم. این جواب برای $w=1$ به جواب ایستای مجانباً تخت باردار و برای حالت $w=-1$ به جواب بدون بار مجانباً (آنتی) دو سیته تبدیل می‌شود. برای $w=0$ جواب یک سیاه‌چاله مجانباً تخت است که با انتخاب پارامترها می‌تواند بیانگر سیاه‌چاله‌ای با دو و یا یک افق حادثه و یا تکینگی بدون افق باشد. همچنین جواب‌های تابشی را برای مقادیر مختلف w به دست آوردیم و توان تکینگی آنها را با جواب‌های به دست آمده در نظریهٔ گوس- بونه مقایسه کردیم ودیدیم برای جواب باردار توان تکینگی کمتر از جواب بدون بار می‌باشد و بنابراین بار توان تکینگی را کاهش می‌دهد. ما در این مقاله جواب‌ها را برای معادلهٔ خطی حالت و به ازای مقادیر خاصی از w به دست آوردیم اما می‌توان مقادیر دیگری از w یا معادله‌های دیگر حالت را نیز در نظر گرفت.

مراجع

1. G Nordstrom, *Z. Phys*. **15** (1914) 504
2. T Kaluza, Preuss. Akad. Wiss, Berlin, *Math. Phys*. K **1** (1921) 966, Klein *Z. Phys*. 37 895; *Nature* **118** (1926) 516.
3. J Hewett, M Spiropulu, Ann. *Rev. Nucl. Part. Sci*. **52** (2002) 397.
4. J Polchinski, "*String Theory*", University Press, Cambridge, England, (1998).
5. M B Greens, J H Schwarz, and E Witten, "*Superstring Theory*", Cambridge University Press, Cambridge, England, (1987).
6. D Lust, S Theusen, "*Lectures on String Theory*", Springer, Berlin, (1989).
7. H Vermeil, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen (1917) 334.
8. H Weyl, "*Raum. Zeit. Materie*", 4th ed., Springer, Berlin (1921).
9. E Cartan, *J. Math. Pures Appl*.**1** (1922) 141.
10. D G Boulware and S Deser, *Phys. Rev. Lett*. **55** (1985) 2656, J T Wheeler, *Nucl. Phys* .B **268** (1986) 737, Y M Cho and I P Neupane, *Phys. Rev*. D **66** (2002) 024044, Y Brihaye and E Radu, *Phys. Lett*. B **661** (2008) 167, S Nojiri, S D Odintsov, and S Ogushi, *Phys. Rev*. D **65** (2001) 023521, Y Brihaye and E Radu, *J. High Energy Phys*. **09** (2008) 006, M H Dehghani and R B Mann, *Phys. Rev*. D **72** (2005) 124006.
11. T Torii, H Maeda, *Phys. Rev*. D **72** (2005) 064007.
12. Yun Soo Myung, Yong-Wan Kim , Young-Jai Park, *Eur. Phys .J*.C **58** (2008) 337346.
13. M H Dehghani, *Phys .Rev*. D **67** (2003) 064017.
14. M H Dehghani, G H Bordbar, M Shamirzaie, *Phys. Rev* .D **74** (2006) 064023.
15. T Kobayashi, *Gen. Rel. Grav*. **37** (2005) 1869.
16. H Maeda, *Phys. Rev*. D **73** (2006) 104004.
17. S Hansraj, B Chilambwe, S D Maharaj, *Eur. Phys. J*. C **75** (2015) 277.
18. S H Hendi, S Panahiyan, *Phys. Rev*. D **90** (2014) 124008, A Sheykhi, B Wang, *Phys. Lett*. B **678** (2009) 434, A Kolly, A Frey, G Kunstatter, *Phys. Rev. Lett*. **114** (2015) 071102, S Nojiri, S D Odintsov and M Sami, *Phys. Rev*. D **74** (2006) 046004.
19. S W Hawking and G F R Ellis, "*The Large Scale Structure of Space-Time*", Cambridge University Press (1973).
20. J D Beckenstein, *Phys. Rev*. D **7** (1973) 2333, S W Hawking, Nature (London) **248**, (1974) 30, G W Gibbons, SW Hawking, *Phys. Rev*. D **15** (1977) 2738.
21. C J Hunter, *Phys. Rev*. D **59**, (1999) 024009, S W Hawking, C J Hunter and D N Page, ibid. **59** (1999) 044033, R B Mann, ibid. **60** (1999) 104047, **61** (2000) 084013.
22. M Lu, M B Wise, *Phys. Rev*. D **47**, R 3095 (1993), M Visser, ibid. **48**, (1993) 583.
23. F J Tipler, *Phys. Lett*. A **64** (1977) 8, F J Tipler, C J S Clarke, G F R Ellis, in: A. Held (Ed.), "*General Relativity and Gravitation*", Plenum, New York, (1980).
24. A Krolak, *J. Math. Phys*. (N.Y.) **28** (1987) 138.