مجلة پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۸، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۷

تعمیم کوانتومی فرمول‌بندی آپلتون- هارتری

بهنام رجبی و احمد مهرآمیز

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین

پست الکترونیکی: mehramiz@sci.ikiu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۰۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰)

چکیده

در این کار، شکلی جدید و تعمیم‌یافته برای فرمول آپلتون- هارتری به دست آورده می‌شود. با استفاده از این فرمول، آثار ناشی از نیروی کوانتومی بر امواج الکترومغناطیسی در حالت‌های انتشار مایل، شبه‌موازی و شبه‌عمود در یک پلاسمای ناهمسانگرد بررسی می‌شود. در حالت کلی‌تری نسبت به پژوهش‌های پیشین، نشان داده می‌شود نیروی کوانتومی، پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ‌گرد، عادی و غیرعادی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بررسی نتایج در حالت‌های خاص نتایج پژوهش‌های پیشین را تأیید می‌کند و در حالت‌های حدی به روابط شناخته شده فیزیک پلاسمای کلاسیک می‌انجامد.

واژه‌های کلیدی: پلاسمای کوانتومی، نیروی کوانتومی، امواج الکترومغناطیسی

۱. مقدمه

در کمتراز دو دههٔ اخیر بسیاری از مباحث کلاسیکی مطرح در فیزیک پلاسما با لحاظ کردن جنبه‌های کوانتومی مورد بازبینی قرار گرفته است. بحث امواج و ناپایداری‌های پلاسما از جمله این مباحث است و ثابت شده است که در نظر گرفتن جنبه‌های کوانتومی برای ذرات تشکیل‌دهندهٔ پلاسما، باعث پدیدار شدن ویژگی‌های جدیدی برای بسیاری از محیط‌های پلاسمایی، امواج و ناپایداری‌های آنها می‌شود. در رابطه با انجام اصلاحات کوانتومی بر پاشندگی کلاسیکی امواج مختلف پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است [۱-۸]. برآورد تأثیرات نیروی کوانتومی برآمده از افت و خیز چگالی و همچنین اسپین ذرات از جمله این اصلاحات هستند. به عنوان مثال در مرجع [۹] پاشندگی امواج خطی در یک پلاسمای کوانتومی سرد و یکنواخت در قالب خاصی از دستگاه ویگنر پواسون مورد بررسی قرار گرفته است. در کار فوق نشان داده می‌شود که جنبه‌های کوانتومی بر پاشندگی برخی از امواج الکترومغناطیسی تأثیرگذار هستند و موج لانگمویر به دلیل اثرات کوانتومی، ویسلر مانند می‌شود. پژوهش گفته شده در بردارندهٔ نتایجی ارزنده است ولی در دو حالت خاص انجام شده است. از سوی دیگر، فرمول‌بندی آپلتون- هارتری روشی شناخته شده در بحث مطالعهٔ امواج پلاسمای سرد است. این فرمول‌بندی به شکلی منسجم مطالعهٔ طیف گسترده‌ای از امواج الکترونی پلاسمای کلاسیک را ممکن می‌سازد.

در این مقاله از معادلات دینامیکی حاکم بر پلاسما همراه با اصلاحات کوانتومی برای تحلیل رفتار الکترودینامیکی دستگاه استفاده می‌شود. شکلی تعمیم‌یافته و کوانتومی برای فرمول‌بندی آپلتون- هارتری به دست آورده می‌شود و با استفاده از آن پاشندگی امواج مختلف الکترومغناطیسی الکترونی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. به بیان دیگر، ضمن مطالعۀ حالت‌های مختلف فرمول‌بندی به دست آمده، تأثیر پتانسیل‌های کوانتومی بر پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ‌گرد (موج L)، عادی (موج O) و غیرعادی (موج X) در حالت‌های انتشار مایل، شبه‌موازی و شبه‌عمود نسبت به میدان مغناطیسی خارجی در محیط پلاسما بررسی می‌شود. سرانجام بررسی حالت‌های حدی، سازگاری نتایج به دست آمده با دیگر مقالات و همچنین متون کلاسیک را نشان خواهد داد.

۲. معادلات و تحلیل الکترودینامیکی

پلاسمای یکنواخت و ناهمسانگردی را در نظر می‌گیریم که شامل الکترون‌ها و یون‌ها است. یون‌ها ساکن در نظر گرفته می‌شوند و میدان مغناطیسی خارجی اعمالی بر پلاسما هم راستا با محور z $(B_0 \parallel \hat{z})$ فرض می‌شود. برای برآورد جنبه‌های الکترودینامیکی با ترکیب قانون فارادی و قانون آمپر و انجام تبدیل فوریه می‌توان به معادلۀ همگن حاکم بر میدان موج دست یافت [۱۰]

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\epsilon}.\boldsymbol{E}=0, \qquad (۱)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{n}$ معرف ضریب شکست است. در ادامه معادلۀ بالا به شکل ماتریسی $\tilde{D}.\boldsymbol{E}=0$ نوشته خواهد شد. معادلۀ دیگری که به آن نیازمندیم، معادلۀ اصلاح شده اویلر است

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times B_0\right)-\frac{\nabla p}{n}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right), \qquad (۲)$$

که در آن q بار ذره، $\boldsymbol{E}$ میدان الکتریکی، B_0 میدان مغناطیسی خارجی، m جرم ذره، $\boldsymbol{v}$ سرعت ذره، n چگالی عددی، $\hbar$ ثابت پلانک و p فشار گرمایی است. جملۀ آخر بیانگر نیروی کوانتومی بوهم است.

معادلۀ پیوستگی برای الکترون‌ها نیز به صورت زیر به کار برده می‌شود

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\nabla.\left(n_e\boldsymbol{v_e}\right)=0 \qquad (۳)$$

که در آن n_e چگالی اختلالی الکترون‌ها و $\boldsymbol{v_e}$ سرعت اختلالی الکترون‌ها است. فرض می‌شود بردار $\boldsymbol{n}$ در صفحه xz قرار دارد و با میدان مغناطیسی خارجی زاویۀ θ می‌سازد. به بیان دیگر

$$\boldsymbol{n}=(n\sin\theta,0,n\cos\theta) \qquad (۴)$$

است. عبارت اول رابطۀ (۱) را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-n^2\cos^2\theta & 0 & n^2\cos\theta\sin\theta\\ 0 & -n^2 & 0\\ n^2\cos\theta\sin\theta & 0 & -n^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix} \qquad (۵)$$

در ادامه تانسور دی‌الکتریک $\vec{\epsilon}$ محاسبه خواهد شد. بدین منظور با انجام خطی‌سازی و تبدیل فوریه بر روی مؤلفه‌های رابطۀ (۲) و نیز معادلۀ پیوستگی الکترون‌ها رابطۀ (۳)، چگالی جریان به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix}j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}=-n_0e\begin{pmatrix}\frac{eH(\omega G)}{im(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2)} & -\frac{e\omega_cH^2}{m(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2)} & 0\\ \frac{eH(\omega G)}{im(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2)} & \frac{e\omega_cH^2}{m(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{eH}{i\omega mG}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix} \qquad (۶)$$

که در آن ω_c فرکانس سیکلوترونی الکترون و n_0 چگالی تعادلی الکترون‌ها است و عبارت‌های G و H نیز به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$G=\omega^2 4m^2-\hbar^2k^4-4m^2k^2v_{Th}^2$$
$$H=\omega^2 4m^2 \qquad (۷)$$

جملات دوم و سوم در عبارت G، به ترتیب ناشی از اثر

پتانسیل کوانتومی بوهم و اثر گرمایی هستند. با استفاده از رابطهٔ (۶) و با توجه به این که $\boldsymbol{j}=\bar{\sigma}.\boldsymbol{E}$ است، تانسور رسانندگی محیط به شکل زیر به دست می‌آید

$$\bar{\sigma}=\begin{pmatrix} \dfrac{-\omega_p^2 H(\omega G)}{i\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)} & \dfrac{\omega_p^2\omega_c H^2}{\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)} & 0 \\ -\dfrac{\omega_p^2\omega_c H^2}{\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)} & \dfrac{-\omega_p^2 H(\omega G)}{i\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\omega_p^2 H}{i\omega G} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

که در آن ω_p فرکانس پلاسما است. با جایگزینی تانسور رسانندگی (۸) در رابطهٔ $\bar{\epsilon}=\bar{I}+\frac{i}{\epsilon_0\omega}\bar{\sigma}$، می‌توان تانسور دی‌الکتریک محیط را به صورت زیر به دست آورد

$$\bar{\epsilon}=\begin{pmatrix} S_q & iD_q & 0 \\ -iD_q & S_q & 0 \\ 0 & 0 & P_q \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

در اینجا نمادهای S_q، D_q و P_q فرم‌های تعمیم‌یافته با اصلاحات کوانتومی و گرمایی هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$S_q=1-\frac{\omega_p^2 HG}{\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)},$$
$$P_q=1-\frac{\omega_p^2 H}{\omega^2 G}, \qquad (10)$$
$$D_q=\frac{\omega_p^2\omega_c H^2}{\omega\left(\omega^2G^2-\omega_c^2H^2\right)},$$

هم‌ارزهای کلاسیکی نمادهای فوق (به صورت بدون زیرنویس) به صورت متعارف در متون کلاسیک پلاسما استفاده می‌شوند. با جایگذاری روابط (۹) و (۵) در رابطهٔ (۱) معادلهٔ ماتریسی زیر به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} S_q-n^2\cos^2\theta & iD_q & n^2\cos\theta\sin\theta \\ -iD_q & S_q-n^2 & 0 \\ n^2\cos\theta\sin\theta & 0 & P_q-n^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \qquad (11)$$

از حل این معادله عبارت زیر حاصل می‌شود

$$An^4-Bn^2+C=0 \qquad (12)$$

که در آن برای ساده‌نویسی از تعاریف زیر استفاده شده است

$$A=S_q\sin^2\theta+P_q\cos^2\theta$$
$$B=RL\sin^2\theta+S_qP_q\left(1+\cos^2\theta\right) \qquad (13)$$
$$C=P_q\left(S_q^2-D_q^2\right)=P_qRL$$

با حل معادلهٔ (۱۲) و استفاده از روابط (۱۰) پاسخ زیر حاصل می‌شود

$$n^2=1-\frac{2\dfrac{\omega_p^2 H}{\omega^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2 H}{\omega^2 G}\right)}{2G\left(1-\dfrac{\omega_p^2 H}{\omega^2 G}\right)-\dfrac{\omega_c^2H^2}{\omega^2 G}\sin^2\theta\pm\Delta}, \qquad (14)$$

که در آن Δ برابر است با

$$\Delta=\sqrt{\frac{\omega_c^4H^4}{\omega^4G^2}\sin^4\theta+4\frac{\omega_c^2H^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_p^2 H}{\omega^2 G}\right)^2\cos^2\theta} \qquad (15)$$

رابطهٔ (۱۴) شکل پیچیده و تعمیم‌یافته‌ای از پاشندگی امواج در حالت کلی را نشان می‌دهد. این معادله را می‌توان شکل اصلاح شده رابطهٔ پاشندگی آپلتون- هارتری نامید. نشان داده خواهد شد که عبارت فوق در حالت‌های ویژه و ساده‌تر به فرمول آپلتون- هارتری کلاسیک تبدیل می‌شود.

۳. بحث و بررسی

در این بخش رابطه پاشندگی (۱۴) مورد تحلیل بیشتری قرار داده می‌شود و براساس آن وضعیت انتشار و پاشندگی بسیاری از امواج مورد بحث مشخص می‌شود. بدین منظور دو مقدار تقریبی برای θ در نظر می‌گیریم و روابط پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ گرد، عادی و غیرعادی را برای حالت‌های انتشار شبه‌موازی و شبه‌عمود به دست می‌آوریم.

۳. ۱. حالت شبه موازی

به عنوان اولین حالت، پاشندگی امواج در حالت انتشار شبه‌موازی بررسی می‌شود.

امواج ویسلر و هلیکون: در حالت انتشار شبه‌موازی یعنی هنگامی که $\theta\simeq 0$ است، جملهٔ شامل $\cos\theta$ در رابطهٔ (۱۵)

غالب است. با لحاظ کردن این تقریب و در نظر گرفتن علامت مثبت در رابطهٔ (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1-\frac{\hbar^2k^4}{4m^2\omega^2}-\frac{k^2v_{Th}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_c}{\omega}\cos\theta}, \qquad (16)$$

عبارت به دست آمده با چشم پوشی از آثار گرمایی به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{Q-\frac{\omega_c}{\omega}\cos\theta}, \qquad (17)$$

که در آن $Q=G/H=1-\frac{\hbar^2k^4}{4m^2\omega^2}$ است. مقایسهٔ رابطهٔ (۱۷) با حالت کلاسیکی نشان خواهد داد که این معادله رابطهٔ پاشندگی امواج ویسلر در حالت انتشار شبه‌موازی (شبه‌راستگرد) و تحت تأثیر نیروی کوانتومی بوهم است. ویسلرها امواج الکترومغناطیسی قطبیده راست‌گردی هستند که در حالت انتشار موازی و شبه موازی مطرح می‌شوند. از سوی دیگر، هلیکون‌ها نیز حالت‌های ویژه‌ای از امواج ویسلر هستند که در حالت $\omega_c \ll \omega$ مطرح می‌شوند. بنابراین با اعمال حد فوق در رابطهٔ (۱۷) خواهیم داشت

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\frac{\hbar^2k^4}{4m^2}-\omega_c\omega\cos\theta}, \qquad (18)$$

این معادله را نیز می‌توان رابطهٔ پاشندگی کوانتومی موج هلیکون نامید.

امواج چپ گرد: گزینش علامت منفی در رابطهٔ (۱۴) به حالت دیگری از رابطهٔ اصلاح شده به شکل زیر می‌انجامد

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{Q+\frac{\omega_c}{\omega}\cos\theta}, \qquad (19)$$

این رابطه را می‌توان شکل تعمیم‌یافته امواج چپ گرد نامید.

۳. ۲. حالت شبه عمود

امواج عادی: در حالت انتشار شبه‌عمود یعنی هنگامی که $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ است جملهٔ شامل $\sin\theta$ در رابطهٔ (۱۵) غالب است. برای علامت مثبت در رابطهٔ (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=\frac{1-\frac{\omega_p^2H}{\omega^2G}}{1-\frac{\omega_p^2H}{\omega^2G}\cos^2\theta}, \qquad (20)$$

عبارت به دست آمده نشان‌دهندهٔ شکل اصلاح‌شدهٔ رابطهٔ پاشندگی امواج عادی در حالت انتشار شبه عمود است.

امواج غیرعادی: گزینش علامت منفی در رابطهٔ (۱۴) به معادلهٔ زیر می‌انجامد

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=\frac{\left(Q-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\sin^2\theta}{Q\left(Q-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\sin^2\theta}, \qquad (21)$$

این رابطه را نیز می‌توان معرف شکل اصلاح‌شدهٔ امواج غیرعادی در حالت انتشار شبه‌عمود نامید.

نتایج دو زیر بخش اخیر را می‌توان در حالت‌های ساده‌تر انتشار کاملاً موازی $(\theta=0)$ و کاملاً عمود $(\theta=\frac{\pi}{2})$ نیز آزمود. پیامد بررسی این دو حالت اینست که امواج راست‌گرد، چپ‌گرد و عادی متأثر از آثار کوانتومی نمی‌شوند. نتیجه‌ای که با یافته‌های مرجع [۹] نیز سازگار است.

در حد کلاسیکی $\hbar \to 0$ مقدار Q در روابط (۱۸ تا ۲۱)، برابر یک خواهد شد و به ترتیب زیر به روابط پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون و چپ‌گرد شبه‌موازی، عادی و غیرعادی شبه عمود کلاسیکی می‌رسیم [۱۱-۱۳]

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_c}{\omega}\cos\theta}, \qquad (22)$$

$$\omega=\frac{\omega_c c^2k^2\cos\theta}{\omega_p^2}, \qquad (23)$$

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1+\frac{\omega_c}{\omega}\cos\theta}, \qquad (24)$$

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=\frac{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos^2\theta}, \qquad (۲۵)$$

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=\frac{\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\sin^2\theta}{\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\sin^2\theta}, \qquad (۲۶)$$

۳. ۳. روابط آپلتون- هارتری کلاسیک

در حد کلاسیکی $\hbar\to 0$ از روابط (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آید

$$n^2=1-\frac{2\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}{2\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\sin^2\theta\pm\Delta}, \qquad (۲۷)$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{\omega_c^4}{\omega^4}\sin^4\theta+4\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2\cos^2\theta}\ , \qquad (۲۸)$$

که نشان‌دهندهٔ فرمول آپلتون- هارتری کلاسیکی است. این معادله نتایج (۲۲) تا (۲۶) را تأیید می‌کند.

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از مجموعه معادلات سیال کوانتومی، شکلی تعمیم یافته برای فرمول‌بندی آپلتون- هارتری به دست آورده شد. روابط به دست آمده (معادلات (۱۴) و (۱۵)) شکلی پیچیده‌تر نسبت به حالت کلاسیک و مشتمل بر آثار برآمده از اعمال نیروی کوانتومی نشان می‌دهند. نظر به پیچیدگی روابط به دست آمده، به حالت‌های ویژه انتشار امواج شبه‌موازی، شبه‌عمود، موازی و عمود به طور جداگانه پرداخته شد و با حالت کلاسیک مقایسه گردید. در حالت انتشار شبه‌موازی نشان داده شد که آثار کوانتومی پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون و چپ گرد را تحت تأثیر قرار می‌دهند. همچنین بنابر نتیجه مربوط به انتشار در حالت شبه‌عمود، پاشندگی امواج عادی و غیرعادی نیز متأثر از جنبه‌های کوانتومی پلاسما است. در مقابل، بررسی حالت‌های خاص‌تر انتشار دقیقاً موازی و دقیقاً عمود امواج نشان داد که در این حالت به جز موج غیرعادی سایر امواج گفته شده وضعیت پاشندگی یکسانی با حالت کلاسیک دارند.

در پایان نیز نشان داده شد که فرمول‌بندی جدید با چشم‌پوشی از جنبه‌های کوانتومی به نظریهٔ آپلتون- هارتری کلاسیک تبدیل می‌شود.

مراجع

1. M Marklund, B Eliasson, and P K Shukla, *Physical Review* E **76**, 6 (2007) 067401.
2. P K Shukla, *Physics Letters* A **352**, 3 (2006) 242.
3. P K Shukla, *Physics Letters* A **369**, 4 (2007) 312.
4. B Shokri and A A Rukhadze, *Phys. Plasmas* **6** (1999) 4467.
5. M Shahmansouri and B Farokhi, *Journal of Science* **19** (2009) 71.
6. M Shahmansouri, *Journal of Research on Many-body Systems* **7** (2017) 13.
7. M R Rouhani, A Akbarian, and Z Mohammadi, *Iranian Journal of Physics Research* **16**, 3 (2016) 91.

۷. م ر روحانی، ا اکبریان و ز محمدی، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران* ۱۶، ۳ (۱۳۹۵) ۹۱.

8. A Mehramiz, J Mahmoodi, and S Sobhanian, *Physics of Plasmas* **17**, 8 (2010) 082110.
9. H Ren, Z Wu, and P K Chu, *Physics of Plasmas* **14**, 6 (2007) 062102.
10. D A Gurnett and A Bhattacharjee, "*Introduction to Plasma Physics with Space and Laboratory Applications*", Cambridge University Press (2005).
11. E V Appleton, *J. Inst. Elec. Engrs* **71** (1932) 642.
12. P Bellan, "*Fundamentals of Plasma Physics*", Cambridge University Press (2006).
13. F F Chen, "*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*", Switzerland, Springer International Publishing (2016).