

## بررسی تأثیر نیروی برهم‌کنش قوی در توزیع ترازهای انرژی هسته‌ای ایزوتوپ‌های کلسیم و تیتانیوم: بر مبنای آشوب کوانتومی

سهراب بهنیا و واحد رزازی

گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

پست الکترونیکی: s.behnia@sci.uut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۰۷/۲۰)

### چکیده

هسته اتمی به عنوان یک دستگاه پیچیده بس‌ذره‌ای تشکیل شده از دونوع فرمیون (نوترون و پروتون) است که به طور خیلی قوی در برهم‌کنش باهم هستند. خواص آماری مجموعه ترازهای انرژی هسته اتمی به خوبی با معیار جدیدی تحت عنوان نظریه ماتریس‌های تصادفی توضیح داده می‌شود. بررسی تأثیر نیروی برهم‌کنش بین فرمیون‌ها بر روی رفتار هسته با این تحلیل امکان‌پذیر است. افت و خیز ترازهای انرژی دستگاه‌های کوانتومی بسته به تقارن‌های هامیلتونی در یکی از آنسامبل‌های متعامد (GOE)، یکانی (GUE) و هم‌تافته گاوسی (GSE) قرار می‌گیرد. در ناحیه انتگرال‌پذیر نیز دستگاه در آنسامبل پواسونی قرار خواهد گرفت. با داشتن ویژه مقادیر هامیلتونی دستگاه، می‌توان به تحلیل آماری ترازهای انرژی با استفاده از ماتریس‌های تصادفی پرداخت. مقاله حاضر با به کارگیری مدل لایه‌ای هسته‌ای به کمک نظریه آشوب کوانتومی به بررسی تأثیر نیروی بین فرمیون‌ها در رفتار ایزوتوپ‌های  $Ca^{38}$  و  $Ti^{48}$  می‌پردازد. تفاوت این هسته‌ها در نوع ذرات واقع در ترازهای ظرفیت است. بررسی رفتار ترازهای انرژی آنها نشان داد که به دلیل نیروی برهم‌کنش قوی بین پروتون و نوترون رفتار دستگاه در  $Ti^{48}$  نزدیک به GOE خواهد بود در حالی که رفتار دستگاه در  $Ca^{38}$  کمی دور از این رفتار خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: ساختار لایه‌ای هسته‌ای، نیروی هسته‌ای قوی، نظریه ماتریس‌های تصادفی، نظریه آشوب کوانتومی

### ۱. مقدمه

کوانتومی را اشغال کرده‌اند. تفاوت پروتون‌ها و نوترون‌ها در ساختار کواریکشان است که باعث تفاوت در ایزواسپین و نیروی برهم‌کنش بین آنها بوده است [۳ و ۴] برای بررسی تأثیر آنها در رفتار هسته نیاز به تحلیل آماری طیف‌های هسته‌ای است. تحلیل آماری به طور گسترده‌ای نیاز به مدل‌های نظری دارد تا بررسی بر روی ترازهای متوالی با اعداد کوانتومی

هسته یک دستگاه کوانتومی بس‌ذره‌ای است که تحلیل طیف ترازهای انرژی اطلاعات مناسبی را در خصوص ساختار این دستگاه با در نظر گرفتن تأثیر نیروی برهم‌کنش قوی بین فرمیون‌های درون هسته فراهم می‌آورد [۱ و ۲]. همانند الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها نیز در هسته اتم ترازهای

$$H = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl, JT} V_{ij,kl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l, \quad (1)$$

جمله اول هامیلتونی میدان متوسط حاصل از حرکت تک ذره ای و جمله دوم برهم کنش دوزره ای است. انرژی ذره منفرد،  $\varepsilon_i$  عملگرهای خلق، نابودی و شاخص های  $i, j, k, l$  اعداد کوانتومی هر ذره هستند.  $V_{ij,kl}$  عناصر ماتریسی برهم کنش دوزره ای ذرات واقع در لایه های ظرفیت است:

$$V_{ij,kl} = \langle ij, JT | \hat{V}(1,2) | kl, JT \rangle, \quad (2)$$

برای تعیین ویژه مقادیر این هامیلتونی حل معادله شرودینگر زیر، که برای  $A$  نوکلئون در نظر گرفته شده، لازم است:

$$H | \Psi \rangle = E | \Psi \rangle, \quad (3)$$

که  $\Psi$  تابع موج حاصل از  $A$  ذره است.

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_A) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_A(x_1) & \varphi_A(x_2) & \dots & \varphi_A(x_A) \end{pmatrix} \quad (4)$$

حل معادله (۳) به دلیل بالا بودن ابعاد ماتریس وابسته (حدود  $10^{10}$ ) بسیار دشوار است. برای حل این معادله از روش لانکسوز استفاده می کنیم. با به دست آوردن عناصر ماتریسی  $\langle \varphi_\alpha | H | \varphi_\beta \rangle$  و با قطری کردن عناصر این ماتریس به شکل زیر، ماتریس ویژه مقادیر به دست می آید [۷]:

$$H = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 | H | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | H | \varphi_2 \rangle & \dots & \dots \\ \langle \varphi_2 | H | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | H | \varphi_2 \rangle & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_n | H | \varphi_m \rangle & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{قطری سازی}} \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & E_3 & \\ & & & E_4 \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \quad (5)$$

الکتریکی ( $E_1$ ) امکان پذیر است. نتایج نظریه محاسبه شده برای هر ایزوتوپ با نتایج تجربی قابل تطابق است که یکی از قابلیت های بالای کد NuShellX است [۸ و ۹]. با محاسبه ویژه

مشخص صورت گیرد. فایده مهم آن این است که شخص می تواند با تغییر ضرایب هامیلتونی دستگاه درک بهتری از خواص آماری آن به دست آورد. این بررسی با انتخاب مدل هسته ای لایه ای انجام می گیرد که می تواند برای مطالعه رابطه بین نیروی برهم کنش بین فرمیون های هسته در ترازهای انرژی، مدل مناسبی باشد [۵ و ۶]. حل هامیلتونی حاکم بر مدل لایه ای هسته با محدودیت های زیادی همراه است که از جمله این محدودیت ها بزرگ بودن بیش از حد فضای هیلبرت است که انتخاب تابع موج و ویژه مقادیر را غیرممکن می کند. در این مقاله از روش لانکسوز [۷] برای محاسبه ویژه مقادیر انرژی استفاده می کنیم. این کار به دلیل بالا بودن ابعاد ماتریسی توسط کد Nushellx که توسط آلکس براون نوشته شده [۸ و ۹] انجام می گیرد.

با به کار گیری نظریه ماتریس های تصادفی در آشوب کوانتومی و توجه به توزیع آماری ترازهای انرژی به بررسی تأثیر نیروی بین فرمیون ها در رفتار ایزوتوپ های کلسیم و تیتانیوم پرداخته می شود. برای همه ایزوتوپ ها  $Ca^{40}$  به عنوان هسته مرکزی به کار برده شده است. ویژه مقادیر در حالت پایه  $J=0^+$  برای هر دو ایزوتوپ محاسبه می شود.

## ۲. هامیلتونی مدل لایه ای هسته ای

هامیلتونی حاکم بر مدل لایه ای هسته ای با تقریب دوم کوانتومی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱۰ و ۱۱]:

برای تشکیل چنین ماتریس بزرگی در این مقاله از کدهای محاسباتی NuShellX@ MSU استفاده شده است. توسط این کد محاسبه انتقال ممان مغناطیسی دو قطبی ( $M1$ ) و دو قطبی

می‌شود. این تفاسیر متناظر با اندرکنش قوی بین حالت‌ها و وجود دافعه ترازهای بین آنها است. وجود این دافعه باعث می‌شود که ترازهای انرژی در فواصل نسبتاً ثابتی از یکدیگر توزیع شوند. به بیان دیگر این توزیع ترازهای یک توزیع نامنظم است و آمار ترازها در یک چنین وضعیتی از آمار ویگنر پیروی می‌کند. وضعیتی که حالت‌ها، انرژی نزدیک هم دارند از لحاظ فضایی دور از هم بوده و با همدیگر اندرکنشی ندارند و در نتیجه دافعه ترازهای نیز نشان نمی‌دهند از این رو همبستگی بین ترازهای رخ نخواهد داد و این ترازها می‌توانند به صورت تصادفی توزیع شوند، همدیگر را قطع کنند و هیچ محدودیتی در نحوه توزیع آنها نسبت به یکدیگر وجود نخواهد داشت. این عدم همبستگی بین ترازها منجر به توزیع تصادفی آنها می‌شود و در نتیجه آمار ترازها از توزیع پواسونی تبعیت می‌کند [۱۷-۱۹].

تابع توزیع  $P_{\beta}(s, \omega)$  برای فاصله‌های نزدیک ترازهای انرژی است. برای تحلیل بهتر نتایج از تابع  $\sum^2(L)$  در فواصل بلند نیز استفاده می‌کنیم (روابط در پیوست) [۲۰ و ۲۱].

#### ۴. نتایج و بحث

برای بررسی تأثیر نیروی برهم‌کنش قوی بر ساختار هسته‌ای، دو نوع ایزوتوپ  $Ca^{28}$  و  $Ti^{48}$  را با توجه به نوع ذرات لایه ظرفیت انتخاب می‌کنیم، که در هر دو ایزوتوپ جهت تعیین ویژه مقادیر انرژی از کد NuShellX استفاده نموده‌ایم. هسته مرکزی برای همه آنها  $Ca^{20}$  در نظر گرفته شده است با این تفاوت که لایه ظرفیت  $(p_{1/2}, f_{5/2}, p_{3/2}, Pf(f_{7/2}))$  در کلسیم فقط شامل نوترون و در تیتانیوم شامل نوترون و پروتون است. در ابتدا ترازهای انرژی هر کدام از ایزوتوپ‌ها توسط کد NuShellX با انتخاب ماتریس برهم‌کنش مناسب به گونه‌ای محاسبه می‌شود که منطبق بر ترازهای انرژی تجربی شود. شکل ۱ ترازهای محاسبه شده برای هر ایزوتوپ را نشان می‌دهد که نتایج تطبیق خوبی با داده‌های تجربی دارد [۱۱].

سپس ویژه مقادیر انرژی هر کدام از ایزوتوپ‌ها در حالت پایه  $J=0^+$  محاسبه شده است. با استفاده از نظریه آشوب

مقادیر به بررسی تأثیر نیروی برهم‌کنش فرمیون‌ها بر توزیع آماری ترازهای انرژی این ایزوتوپ‌ها به کمک نظریه آشوب کوانتومی پرداخته‌ایم.

#### ۳. آشوب کوانتومی

برای بررسی ساختار هسته‌ای نیاز به تحلیل ترازهای انرژی دستگاه داریم. از آنجا که حل معادله شرودینگر برای چنین دستگاهی غیرممکن است، ماتریس‌های تصادفی<sup>۱</sup> یکی از ابزارهای مهم برای چنین تحلیلی است که توسط ویگنر معرفی شد [۱۲].

تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور  $P(s)$  که  $S$  فاصله بین ترازهای انرژی مجاور است یک روش معمول برای مطالعه خواص آماری ترازهای انرژی است [۱۳].

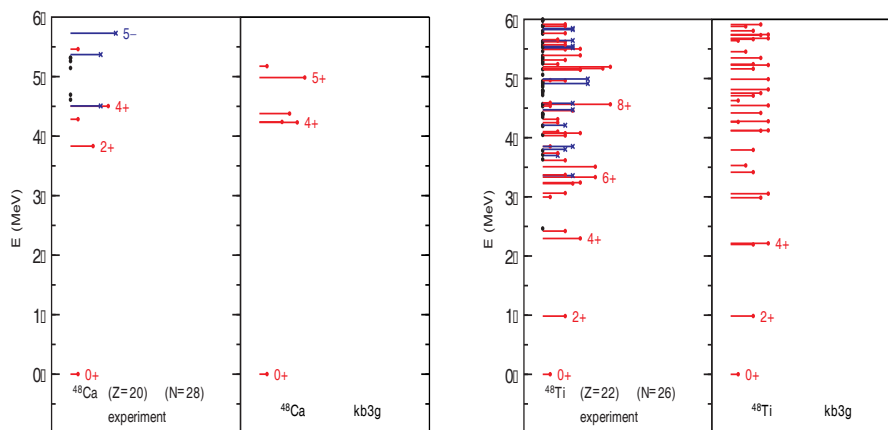
طبق نتایج به دست آمده اگر یک دستگاه کوانتومی در ناحیه انتگرال‌پذیر (که رفتار کلاسیکی آن غیرآشوبناک است) قرار داشته باشد در آنسامبل پواسونی قرار می‌گیرد [۱۲-۱۴].

افت و خیز ترازهای انرژی دستگاه‌های کوانتومی (که معادل کلاسیکی آنها رفتار آشوبناک دارد) را می‌توان بسته به تقارن‌های هامیلتونی در یکی از آنسامبل‌های متعامد (GOE)، (GUE) و هم تافته (GSE) گاوسی در ماتریس‌های تصادفی دسته‌بندی کرد. از این رو تمایز بین رفتار دستگاه‌های کوانتومی با معادل کلاسیکی آشوبناک یا غیرآشوبناک با استفاده از افت و خیز ترازهای انرژی میسر است. اخیراً، معیار جدیدی تحت عنوان توزیع نسبت فاصله ترازهای متوالی  $P_{\beta}(s, \omega)$  برای تشخیص بین نظم و آشوب در ترازهای انرژی در دستگاه‌هایی که رفتار بینابینی دارند معرفی شده است که تابع توزیع برودی نامیده می‌شود و  $\omega$  ضریب برودی<sup>۲</sup> است که برای حالت پواسونی  $\omega=0$  و در حالت آشوبناک  $\omega=1$  است [۱۴، ۱۵، ۱۶].

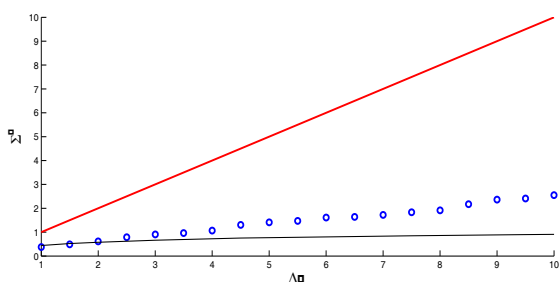
برخلاف دستگاه‌های انتگرال‌پذیر، در دستگاه‌های غیرانتگرال‌پذیر، ترازهای انرژی همبستگی قوی با یکدیگر دارند و این همبستگی مانع نزدیک شدن بیش از حد ترازهای انرژی

۱. Random matrix theory

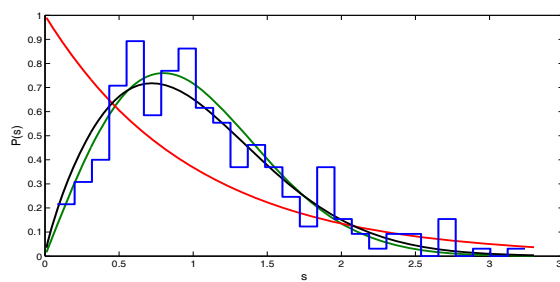
۲. Brody parameter



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) ترازهای انرژی تئوری و تجربی ایزوتوپ‌های کلسیم و تیتانیوم، محاسبه شده با کد محاسباتی NuShellX. ترازهای انرژی نمایش داده شده در سمت چپ هر شکل نتایج تجربی و سمت راست نتایج نظری محاسبه شده است.



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع انرژی در فاصله بلند  $Ca^{48}$  قرمز: توزیع پواسونی، سیاه: توزیع گاوسی آبی: تابع توزیع ترازهای انرژی در فاصله بلند  $Ca^{48}$ .



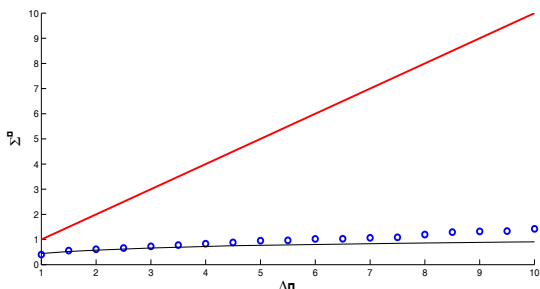
شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع ترازهای انرژی ایزوتوپ  $Ca^{48}$  منحنی قرمز: توزیع پواسونی، منحنی سبز: توزیع گاوسی، منحنی سیاه: تابع توزیع برودی، منحنی آبی: تابع توزیع ترازهای انرژی کلسیم در  $J=0^+$

تقارن را بهم بزند. خارج شدن از حالت متقارن سبب تغییر شکل هسته می‌شود [۵].

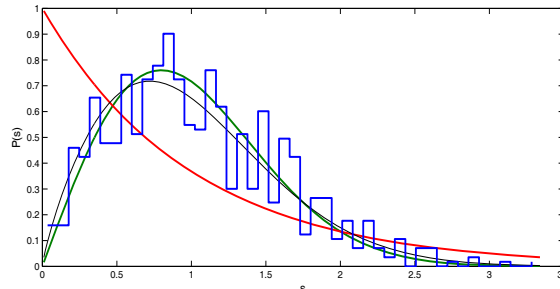
در ایزوتوپ کلسیم این تأثیر تا حدی به چشم می‌خورد ولی خیلی قوی نیست. همان طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود تابع توزیع برودی ترازهای انرژی رفتاری کمی متمایل به رفتار منظم دارد بخصوص این رفتار در فواصل بلند شکل ۳ این تمایل را بیشتر مشخص می‌کند.

در شکل‌های ۴ و ۵ این محاسبات برای ایزوتوپ تیتانیوم انجام یافته و کمیت برودی  $\omega$  برای تیتانیوم، ۰/۹۱ محاسبه شده است. ایزوتوپ تیتانیوم در تراز ظرفیت خود ۲ پروتون و ۶ نوترون دارد. در مقایسه با  $Ca^{48}$ ، جایگزین شدن ۲ نوترون با ۲ پروتون رفتار دستگاه را بیشتر به سمت آشوبناک بودن سوق

کوانتومی تحلیل ساختاری این ایزوتوپ‌ها با تأثیر نیروی برهم‌کنش بین پروتون‌ها و نوترون‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور پس از تصحیح ترازهای انرژی، تابع توزیع انرژی برای حالت‌های نزدیک‌ترین فاصله  $P_{\beta}(s, \omega)$  و طولانی‌ترین فاصله  $\sum^2(L)$  محاسبه شده است. شکل‌های ۲ و ۳ محاسبات را برای ایزوتوپ کلسیم، در حالت پایه  $J=0^+$  نشان می‌دهد. با تصویر کردن مناسب نتایج بر توزیع برودی، کمیت  $\omega$  برای کلسیم، ۰/۸۱ محاسبه شده است. در  $Ca^{48}$ ، تراز ظرفیت دارای ۸ نوترون است و به نظر می‌رسد نیروی بین نوترون‌ها خیلی قوی نیست. این تأثیر در جمله دوم هامیلتونی معادله (۱) وارد شده است. جمله اول در هامیلتونی که مربوط به حرکت تک‌ذره‌ای در میدان متوسط است، متقارن بوده ولی جمله دوم می‌تواند این



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع انرژی در فاصله بلند ایزوتوپ  $Ti^{48}$  قرمز: توزیع پواسونی، سیاه: توزیع گاوسی آبی: تابع توزیع ترازهای انرژی در فاصله بلند.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع ترازهای انرژی ایزوتوپ  $Ti^{48}$  منحنی قرمز: توزیع پواسونی، منحنی سبز: توزیع گاوسی، منحنی سیاه: تابع توزیع برودی، منحنی آبی: تابع توزیع ترازهای انرژی تیتانیوم در  $J=0^+$

### پیوست الف

#### تابع توزیع چگالی

تابع توزیع چگالی  $P(S)$  که در آن  $S$  فاصله بین ترازهای انرژی بوده و از رابطه زیر پیروی می‌کند

$$p(s) \propto S^\beta, \quad (1)$$

$$S_n = E_{n-1} - E_n, \quad (2)$$

برای توزیع‌های پواسونی (انتگرال پذیر) مطابق رابطه زیر است:

$$\beta = 0, \text{ پواسونی} \quad (3)$$

$$p(s) = \exp(-s),$$

و برای توزیع‌های ویگنری (انتگرال ناپذیر) در آنسامبل‌های متفاوت از روابط زیر پیروی می‌کند:

$$\beta = 1, \text{ GOE} \quad (4)$$

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right),$$

$$\beta = 2, \text{ GUE} \quad (5)$$

$$p(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right),$$

$$\beta = 3, \text{ GSE} \quad (6)$$

$$p(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^3 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right),$$

ولی بیشتر دستگاه‌های واقعی نه کاملاً انتگرال‌پذیر و نه کاملاً آشوبناک هستند برای تعریف تابع توزیع چگالی از تابع برودی استفاده می‌کنیم:

$$P(s, \omega) = \alpha(\omega+1)s^\omega \exp(-\alpha s^{\omega+1}), \quad (7)$$

$$\alpha = \left( \Gamma\left[\frac{\omega+2}{\omega+1}\right] \right)^{\omega+1},$$

داده است. این رفتار می‌تواند ناشی از قوی‌تر بودن نیروی برهم‌کنش بین پروتون-نوترون نسبت به این نیرو در نوترون-نوترون باشد. این برهم‌کنش قوی در جمله دوم هامیلتونی دستگاه معادله (۱)، سبب از بین رفتن حالت تقارنی هسته و سوق بیشتر آن به رفتار آشوبی است. شکل ۴ تابع توزیع برودی را بسیار نزدیک به رفتار گاوسی نشان می‌دهد که شکل ۵ نمودار از یک رفتار آشوبی است.

#### ۵. جمع‌بندی

مقایسه نتایج نشان می‌دهد که رفتار  $Ti^{48}$  در مقایسه با  $Ca^{48}$  به توزیع گاوسی نزدیک‌تر است. این رفتار می‌تواند ناشی از قوی‌تر بودن برهم‌کنش بین نوترون-پروتون در ایزوتوپ تیتانیوم نسبت به نیروی بین نوترون-نوترون در کلسیم باشد. در واقع نیروی ضعیف بین نوترون‌ها در کلسیم به طور کامل تقارن میدان متوسط حاصل از حرکت تک‌ذره را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد ولی در ایزوتوپ مجاور آن نیروی قوی بین نوترون-پروتون باعث دور شدن رفتار دستگاه از حالت منظم و تغییر شکل هسته شده و توزیع ترازهای انرژی رفتار گاوسی از خود نشان می‌دهند. مقایسه تابع  $\sum^2(L)$  در شکل‌های ۳ و ۵ به خوبی این تفاوت رفتاری را آشکار می‌کند. تابع توزیع نزدیک‌ترین فاصله در ایزوتوپ  $Ti^{48}$  بسیار نزدیک به توزیع گاوسی است ولی این نمودار در  $Ca^{48}$  از این توزیع فاصله گرفته است.

تعداد زیادی فاصله است که مطابق رابطه زیر است

$$\Sigma^2(L) = \langle \eta^2(L, \varepsilon_S) \rangle - \langle \eta(L, \varepsilon_S) \rangle^2, \quad (8)$$

که  $\eta(L, \varepsilon_S)$  تعداد ترازها در فاصله بین  $\eta_S$  و  $\eta_S + L$  را بر روی ترازهای انرژی تصحیح شده می‌شمارد. برای حالت پواسونی  $\Sigma^2(L) = L$  می‌باشد.

که  $\Gamma$  تابعی از  $\omega$ ، ضریب برودی، است و برای توزیع پواسونی  $\omega=0$  و برای توزیع ویگنری  $\omega=1$  است.

### تابع آزمون فاصله بلند

تابع توزیع چگالی P(S) برای تحلیل اطلاعات تعداد محدودی فاصله متوسط انجام می‌گیرد اما تابع آزمون فاصله بلند برای

### مراجع

1. D P Watts, *Nature Physics* **12**, 2 (2016) 116.
2. W Satuła and W Nazarewicz. *Physica Scripta* **91**, 2 (2016) 023013.
3. N Takigawa and K Washiyama, “*Fundamentals of Nuclear Physics*”, Springer Japan (2017) 65.
4. S Borsanyi *et al.*, *Science* **347** 6229 (2015) 1452.
5. J M G Gómez *et al.*, *Physics Reports* **499**, 4 (2011) 103.
6. ل رفعت متولی، هم‌میری حکیم آباد و ع حسینیان ازغدی، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **18**، ۱ (۱۳۹۷) ۳۹.
6. L Rafat-Motavalli, S H Miri-Hakimabad, and E Hoseinian-Azghadi, *Iranian Journal of Physics Research* **18**, 1 (2018) 39.
7. N Shimizu *et al.*, *Physics Letters B* **753** (2016) 13.
8. B A Brown and W D M Rae, *Nuclear Data Sheets* **120** (2014) 115.
9. B A Brown. *Progress in Particle and Nuclear Physics* **47**, 2 (2001) 517.
10. E Caurier *et al.*, *Reviews of Modern Physics* **77**, 2 (2005) 427.
11. N Shimizu *et al.*, *Physica Scripta* **92**, 6 (2017) 063001.
12. F Haake, “*Quantum Signatures of Chaos*”, Springer (2010).
13. L D'Alessio *et al.*, *Advances in Physics* **65**, 3 (2016) 239.
14. R A Molina *et al.*, *Physical Review E* **93**, 2 (2016) 022414.
15. D G Green *et al.*, *Physical Review A* **93**, 2 (2016) 022703.
16. L Muñoz *et al.*, *Physical Review C* **95**, 1 (2017) 014317.
17. M Aßmann *et al.*, *Nature Materials* **15**, 7 (2016) 741.
18. A V Viatkina, M G Kozlov, and V V Flambaum, *Physical Review A* **95**, 2 (2017) 022503.
19. F Borgonovi *et al.*, *Physics Reports* **626** (2016) 1.
20. R Riser, V A Osipov, and E Kanzieper. *Physical Review Letters* **118**, 20 (2017) 204101.
21. A Frisch *et al.*, *Nature* **507**, 7493 (2014) 475.