

## سیاه شامه اینشتین - یانگ - میلز در فضای پاددوسیه و رسانندگی غیر آبل جریان مستقیم رنگ

شاهرخ پرویزی<sup>۱</sup> و مهدی صادقی<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک ذرات و میدانها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی، بروجرد

پست الکترونیکی: parvizi@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۰۲)

### چکیده

سیاه شامه اینشتین - یانگ - میلز در فضای پاددوسیه با میدان پیمانه‌ای  $SU(2)$  معرفی شده و با استفاده از تناظر نظریه میدان - گرانش، رسانندگی غیر آبل جریان مستقیم رنگ محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: رسانندگی رنگ، هولوگرافی، نظریه پاسخ خطی، سیاه شامه

### ۱. مقدمه

معرفی شد و بیان می‌کند که نظریه ابر یانگ - میلز  $N=4$   $SU(N)$ ، با نظریه ریسمان نوع IIB در فضای  $AdS_5 \times S^5$  متناظر است. در اینجا  $AdS_5$  فضای پاددوسیه پنج بعدی و  $S^5$  کره پنج بعدی است که شعاع‌های مساوی دارند. این تناظر در واقع از مطالعه دوگانی بین ریسمان‌های بسته و باز و با حدگیری‌های خاصی به دست می‌آید. اولین حد این است که شعاع انحنا فضای پاددوسیه نسبت به طول ریسمان  $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$  بزرگ باشد. در این حد می‌توان از اثرات مدهای جرم‌دار ریسمانی چشم‌پوشی کرد و تنها مد صفر را در نظر گرفت که مد گرانشی است. در سمت نظریه میدان که در یک

تناظر نظریه میدان - گرانش، دو نظریه را که پارچوب‌های ریاضی و فیزیکی مختلفی دارند، به هم مربوط می‌کند که در آن گرانش در  $n+1$  بعد و نظریه میدان کوانتومی در  $n$  بعد قرار دارد [۱، ۲، ۳ و ۴]. ارتباط این دو نظریه به ظاهر متفاوت، دوگانی نامیده می‌شود که در آن تابع مولد نظریه میدان کوانتومی برابر با کنش نظریه گرانشی در حد خاصی است و در نتیجه مشاهده‌پذیرهای نظریه میدان بر حسب نظریه گرانشی قابل توصیف یا محاسبه است. اولین بار این تناظر، در سال ۱۹۹۷ میلادی توسط مالداسنا

کوآرک آزاد وجود ندارد اما در دماهای بالا که در آزمایشگاه‌های ذرات قابل دسترسی است، تغییر فاز اتفاق می‌افتد و ماده به صورت پلاسمای گلئون- کوآرک ظاهر می‌شود. این فازی است که در تناظر گرانش- پیمانانه مورد مطالعه ماست.

در حد طول موج بلند، نظریه میدان رفتاری مانند یک شاره دارد، بنابراین تناظر مورد نظر در این حد، تناظر شاره- گرانش است. هر سیال با ضرایب تراورد شناخته می‌شود [۵ و ۶]. این ضرایب، ویژگی‌های میکروسکوپی شاره زیربنایی نظریه میدان را در برهم‌کنش‌های قوی، شناسایی می‌کند. بنابراین دوگانگی شاره- گرانش ابزار مناسبی برای محاسبه این ضرایب است. پایستگی انرژی- تکانه و جریان در هیدرودینامیک نسبیتی به صورت زیر است:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (1)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + p g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

که در آن،  $\rho$  چگالی،  $p$  فشار و  $u$  سرعت است. در اینجا شاره نسبیتی به معنای این نیست که شاره با سرعت نور حرکت کند بلکه به معنای این است که تقارن لورنتس در شاره نسبیتی حفظ می‌شود. اگر پتانسیل شیمیایی در سیستم وجود داشته باشد به این معناست که بقای جریان برقرار است.

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0, \quad (3)$$

$$J^{\mu} = \rho u^{\mu}, \quad (4)$$

یک پارامتر بسط  $\varepsilon = \ell_{mfp} / L$  معرفی می‌کنیم که  $\ell_{mfp}$  و  $L$  مسافت آزاد میانگین و طول مشخصه سیستم یا مقیاس افت‌وخیزهای میدان است. برای برقراری نظریه هیدرودینامیک باید مقیاس تغییرات میدان نسبت به مسافت آزاد میانگین خیلی بزرگ باشد. هنگامی که شاره در مرز فضای پاددوسیه وجود داشته باشد با یک نظریه حاوی سیاه‌چاله بزرگ در فضای پاددوسیه تناظر می‌شود. اگر  $\varepsilon$  کوچک‌تر از یک باشد در این صورت تانسور انرژی- تکانه را بر حسب  $\varepsilon$  بسط می‌دهیم. این بسط در واقع معادل با کوچک گرفتن مشتقات میدان‌هاست. بنابراین بسط را تا مشتق مرتبه اول در نظر می‌گیریم و از مشتقات بالاتر میدان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم [۷].

بعد کمتر در مرز فضای پاددوسیه تعریف می‌شود، این حد به معنای قوی بودن ثابت جفت‌شدگی توفت<sup>۱</sup> است که به صورت  $\lambda = g_s N = g_{YM} N$  تعریف می‌شود و در آن  $g_s$  و  $g_{YM}$  به ترتیب جفت‌شدگی‌های ریسمان و نظریه یانگ میلز هستند که هر دو باید کوچک باشند. بنابراین، در این تناظر از یک سو نظریه گرانشی در حد کلاسیک ( $g_s \rightarrow 0$ ) و از سوی دیگر نظریه یانگ میلز در حد  $N \gg 1$  و ثابت توفت قوی  $\lambda \gg 1$  با یکدیگر دوگان هستند.

در حال حاضر، مثال بالا به صورت عام‌تر دوگانگی گرانش- پیمانانه تعمیم یافته است که در آن گرانش به طور عمده در فضای پاددوسیه یا فضاهایی که مجانبی پاددوسیه هستند و نظریه پیمانانه‌ای در مرز آن تعریف می‌شود. در این حالت، همچنان نظریه میدان در جفت‌شدگی قوی تناظر نظریه گرانش کلاسیک است. با توجه به این که حل تحلیلی و اختلالی برای نظریه‌های پیمانانه‌ای جفت شده قوی پاسخگو نیست، یکی از بهترین راه‌های ممکن برای حل این نظریه‌ها، استفاده از تناظر گرانش- پیمانانه است. با استفاده از این تناظر می‌توان اطلاعات نظریه جفت شده قوی را از نظریه گرانش کلاسیک در یک بعد بالاتر به دست آورد. در این مقاله رفتار میدان یانگ- میلز بررسی می‌شود که تعمیم میدان ماکسول است. هر دو نظریه پیمانانه‌ای هستند با این تفاوت که نظریه ماکسول گروه تقارنی آبلی  $U(1)$  و نظریه یانگ- میلز گروه تقارنی غیر آبلی دارد. تفاوت در گروه پیمانانه‌ای آبلی و غیر آبلی منجر به تفاوت‌های مهمی در پیامدهای فیزیکی دو نظریه می‌شود. مهم‌ترین تفاوت در رفتار ثابت جفت‌شدگی دو نظریه است. در الکترومغناطیس در انرژی‌های پایین، ثابت جفت‌شدگی افزایش می‌یابد در حالی که در نظریه یانگ- میلز برعکس است و با افزایش انرژی، ثابت جفت‌شدگی کاهش می‌یابد. بدین ترتیب، نیروی الکترومغناطیسی نیرویی بلند برد است و در خارج از هسته هم اثر می‌گذارد اما میدان یانگ- میلز فقط در داخل هسته عمل می‌کند. تفاوت دیگر در محبوس‌شدگی است که به این معناست که در دماهای پایین، نظریه یانگ- میلز در فاز محبوس است و

۱. 'tHooft

به جای بار الکتریکی، رنگ نامیده می شود. در اینجا نیز این بار رنگ و رسانندگی آن، رسانندگی رنگ نامیده می شود، البته گروه تقارنی در اینجا  $SU(2)$  است.

واضح است که در حالتی که تقارن دورانی وجود داشته باشد، رسانندگی از نظر فضایی نرده ای می شود و می توان شاخص های  $i$  و  $z$  را حذف کرد. همچنین مشابه نظریه آبلی می توانیم میدان ها را متناوب با بستگی زمانی  $e^{i\omega t}$  با بسامد  $\omega$  و یا مستقیم متناظر با حد  $\omega \rightarrow 0$  در نظر بگیریم. در این مقاله هدف محاسبه رسانندگی مستقیم رنگ است.

برای محاسبه رسانندگی از طریق تناظر شماره-گرانش، باید در نظریه گرانشی، میدان های برداری متناظر را وارد کرد. اضافه کردن میدان ماکسول به گرانش، از لحاظ تاریخی با متریک راینر-نوردستورم شروع شد که سیاه چاله ای است در حضور میدان های گرانشی و ماکسول و بار الکترو مغناطیسی و جرم دارد. پس از آن با توسعه به ابعاد بالاتر، به عنوان سیاه چاله های اینشتین-ماکسول شناخته شده است. همچنین تعمیم به میدان های غیر آبلی نیز به عنوان سیاه چاله اینشتین-یانگ-میلز در ابعاد مختلف انجام شده است. این سیاه چاله ها می توانند دارای بارهای الکتریکی و یا مغناطیسی باشند.

در مطالعه سیاه چاله ها با میدان های ماکسول (آبلی) حد زیر برای رسانندگی به دست می آید [۱۰]:

$$\sigma \geq \frac{1}{e^2} = 1, \quad (9)$$

اینجا در واحدهایی کار می شود که  $e = 1$  است. نامساوی فوق برای سیاه چاله های بدون بار اشباع می شود:  $\sigma = 1$ . البته لازم به ذکر است که در برخی مدل های خاص با میدان های زمینه اضافی یا در گرانش جرم دار، این حد نقض می شود [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. حال در این کار، ما قصد داریم رسانندگی رنگ را با روش هولوگرافی از یک نظریه گرانشی اینشتین-یانگ-میلز به دست بیاوریم و تحقیق کنیم که آیا نامساوی فوق برای حالت غیر آبلی هم برقرار است یا خیر. نظریه میدان را در سه بعد (دو بعد فضایی و یک زمانی) با گروه غیر آبلی  $SU(2)$  در نظر می گیریم. بنابراین نظریه گرانشی در فضا زمان چهار بعدی

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} \left[ \eta(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\alpha\beta} \nabla_\mu u \right], \quad (5)$$

که در آن  $\rho$  چگالی،  $p$  فشار،  $u$  چاربردار سرعت،  $g$  متریک و شاخص ها مختصات فضا زمانی را نشان می دهند. همچنین

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu, \quad (6)$$

عملگر تصویر در جهت سرعت است. به همین ترتیب جریان پایستار را می توان به صورت زیر نوشت:

$$J^\mu = \rho u^\mu - \sigma T \partial_\nu \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (7)$$

در روابط (۵) و (۷) کمیات  $\eta$ ،  $\zeta$  و  $\sigma$  به ترتیب چسبندگی برشی، حجمی و رسانندگی بار هستند و این ضرایب باید از نظریه میکروسکوپی تعیین شوند [۷ و ۸].

رسانندگی در نظریه ماکسول از قانون اهم به دست می آید که ضریب نسبت جریان به میدان الکتریکی است. در نظریه غیر آبلی، رسانندگی را می توان از طریق قانون اهم غیر آبلی به صورت زیر به تانسور رسانندگی رنگ تعمیم داد [۹]:

$$\sigma_{ab}^{ij}(x, y) = \frac{\delta J_a^i(x)}{\delta E_j^b(y)}, \quad (8)$$

که در آن  $E$  میدان الکتریکی غیر آبلی است که بر حسب تانسور شدت میدان که در (۱۱) تعریف شده است، به صورت  $E_j^b = F_{jz}^b$  به دست می آید که در آن  $z$  جهت فضایی میدان و  $b$  شاخص داخلی گروه پیمانه ای است که در مقاله حاضر گروه  $SU(2)$  در نظر گرفته می شود. همچنین  $J_a^i$  جریان پایستار غیر آبلی در جهت فضایی  $i$  و شاخص داخلی  $a$  است. حضور مختصات  $x$  و  $y$  در رابطه فوق نشان می دهد که رابطه بین  $J$  و  $E$  اگرچه خطی است اما ممکن است موضعی نباشد؛ یعنی ممکن است  $J$  به صورت انتگرالی از  $E$  باشد. به لحاظ فیزیکی این به این مفهوم است که تغییرات میدان الکتریکی در نقطه  $x$  ممکن است جریان را در نقطه ای دیگر مانند  $y$  تغییر دهد. بدین معنا رسانندگی در رابطه بالا غیر موضعی است.

رسانندگی  $\sigma_{ab}$  از این نظر رسانندگی رنگ نامیده می شود که متعلق به یک نظریه غیر آبلی است. آن طور که در نظریه کرومودینامیک با گروه پیمانه ای  $SU(3)$  متداول است بار ذرات

و الکتریکی غیر آبلی است. در عبارت (۱۷)،  $q$  نشان دهنده بار الکتریکی و ۱ نماینده بار مغناطیسی است. بنابراین این سیاه‌چاله دایونیک به حساب می‌آید.

برای این سیاه‌چاله، دمای هاوکینگ برابر است با:

$$T = \frac{f'(r_h)}{4\pi} \quad (18)$$

که  $f(r_h) = 0$  شعاع افق است،

برای به دست آوردن ضرایب ترابرد از جمله رسانندگی رنگ، لازم است که از یک سیاه شامه استفاده کنیم. بنابراین در (۱۴) زاویه  $\theta$  را کوچک در نظر می‌گیریم، در نتیجه مختصات  $(\theta, \phi)$  به مانند مختصات قطبی در یک صفحه تخت می‌شوند و به حل زیر می‌رسیم:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad (19)$$

$$A = \frac{i}{2} \left( \left( a - \frac{q}{r} \right) dt \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

که برای به دست آوردن آن فرض کردیم  $\cos\theta \cong 1$  و بنابراین میدان مغناطیسی را تقریباً صفر فرض کردیم. حل (۱۹) یک سیاه شامه دو بعدی در جهت‌های  $x$  و  $y$  همراه با میدان‌های یانگ-میلز است. توجه کنید که میدان (۲۰) در معادله یانگ-میلز با متریک زمینه (۱۹) صدق می‌کند.

### ۳. رسانندگی جریان مستقیم رنگ

برای محاسبه رسانندگی الکتریکی جریان مستقیم رنگ از نظریه پاسخ خطی استفاده می‌کنیم که باید نظریه میدان پیمان‌هایی را به صورت زیر مختل کنیم [۱۵-۲۱]:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \tilde{A}_\mu, \quad (21)$$

کنش را تا مرتبه دوم بر حسب  $\tilde{A}_\mu$  بسط می‌دهیم و جریان‌های  $J_a^\mu$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$S \rightarrow S + \int d^4x A_\mu^a J_a^\mu, \quad (22)$$

تابع گرین تأخیری از تناظر گرانش-پیمان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G^{\mu\nu}(\omega) = \langle J^\mu(\omega) J^\nu(-\omega) \rangle = \frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{A}_\mu \delta \tilde{A}_\nu}, \quad (23)$$

تعریف می‌شود.

### ۲. سیاه شامه اینشتین-یانگ-میلز

کنش اینشتین-یانگ-میلز را در فضای پاددوسیه در چهار بعد، در نظر بگیرید:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (10)$$

که در آن  $g$  دترمینان متریک،  $G$  ثابت نیوتن،  $R$  نرده‌ای ریچی،  $\Lambda$  ثابت کیهان‌شناسی و  $F_{\mu\nu}$  تانسور شدت میدان یانگ-میلز است  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ , (۱۱) که در آن  $A_\mu$  چاربردار پتانسیل است که در نمایش الحاقی گروه  $SU(2)$  قرار دارد.

با وردش از کنش نسبت به  $g_{\mu\nu}$  و  $A_\nu$  معادلات حرکت اینشتین و یانگ-میلز را به دست می‌آوریم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (12)$$

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \quad (13)$$

که در معادله اخیر،  $\nabla_\mu$  نشان دهنده مشتق همورد است. این معادلات جواب‌های متنوعی دارند. ما جواب رایزنر-نوردستروم پاد دوسیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۴]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (14)$$

که جواب بدیهی (رابطه (۳.۲) در [۱۴]) نام گرفته است و در آن  $r$  مختصه شعاعی فضای پاددوسیه و زوایای  $\theta$  و  $\phi$  زوایای کروی پاددوسیه هستند. تابع  $f$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (15)$$

و میدان یانگ-میلز  $SU(2)$  به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۴]:

$$A = \frac{i}{2} \left( \left( a - \frac{q}{r} \right) dt - \cos\theta d\phi \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

که در آن  $M$ ،  $Q$ ،  $q$  و  $a$  ثابت هستند و

$$Q^2 = 1 + q^2. \quad (17)$$

از (۱۶) مشخص است که این حل شامل میدان‌های مغناطیسی

$$\tilde{A}_x^{(1)} = \tilde{A}_\infty^{(1)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^\gamma} f \right)^{z_1} (1 + i\omega h_1(r) + \dots), \quad (32)$$

$$\tilde{A}_x^{(2)} = \tilde{A}_\infty^{(2)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^\gamma} f \right)^{z_2} (1 + i\omega h_2(r) + \dots), \quad (33)$$

$$\tilde{A}_x^{(3)} = \tilde{A}_\infty^{(3)} \left( \frac{-r}{\Lambda r^\gamma} f \right)^{z_3} (1 + z_3 h_3(r) + \dots), \quad (34)$$

که در آن ضرایب  $\tilde{A}_\infty^{(a)}$  مقدار میدانها در مرز هستند و پارامترهای  $z_a$  را از (۳۰) و (۳۱) با علامتهای منفی انتخاب می‌کنیم. در حد  $\omega$  کوچک معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \pi r r_h T f \left[ h_1' \left( (rf' - \gamma f)(q - a, r_h) + \gamma i \pi r r_h T r f' \right) + \gamma i \pi r r_h T f h_1'' \right] \\ & + i h_1 \left[ (\gamma r f f' - r^\gamma f'^\gamma - \gamma f^\gamma)(q - a, r_h)^\gamma - \gamma \pi^\gamma r_h^\gamma T^\gamma (q - a, r)^\gamma \right. \\ & \left. - \gamma i \pi r r_h T f (r^\gamma f'' - \gamma r f' + \gamma f)(q - a, r_h) \right] = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

$$-\gamma \left( \frac{f}{r} \right)' + f'' + (f h_1')' = 0. \quad (36)$$

معادله  $h_2$  دقیقاً با معادله  $h_1$  یکسان است. معادله (۳۶) حل دقیقی برای  $h_3$  دارد:

$$h_3 = -\log \left( \frac{f}{C_3 r^\gamma} \right) + C_3 \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (37)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_3$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با شرط  $h_3 \rightarrow 0$  در مرز خواهیم داشت  $C_3 = -\frac{\Lambda}{\gamma}$  و برای این که  $h_3$  در روی افق تکین نباشد، مقدار  $C_1$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$C_1 = \gamma \pi T. \quad (38)$$

با جایگذاری جوابها در (۲۵) و دوبار مشتق‌گیری نسبت به مقدار مرزی  $\tilde{A}_\infty^{(3)}$ ، تابع گرین اقلیدسی به صورت زیر در می‌آید:

$$G_{xx}^{(33)}(\omega) = \left( \tilde{A}_x^{(3)} \right)^* f(r) \partial_r \tilde{A}_x^{(3)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{i \omega C_1}{\gamma \pi T}, \quad (39)$$

رسانندگی با استفاده از فرمول کوپو (۲۴) و با توجه به (۳۸) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{(33)} = 1. \quad (40)$$

برای حل معادله (۳۵)، از بسط در نزدیکی مرز  $r \rightarrow \infty$  استفاده می‌کنیم:

$$h_1(r) \approx h_{10} + \frac{h_{11}}{r} + \frac{h_{12}}{r^2} + \dots, \quad (41)$$

که در آن  $\omega$  بسامد میدان است. ما می‌توانیم رسانندگی جریان رنگ را با استفاده از فرمول گرین-کوپو به دست آوریم

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{ij}(\omega) = & -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \langle J_a^i(\omega) J_b^j(-\omega) \rangle = \\ & -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{A}_i^a \delta \tilde{A}_j^b}, \quad (24) \end{aligned}$$

حد  $\omega \rightarrow 0$  مربوط به این است که رسانندگی جریان مستقیم مدنظر است که در آن بسامد را صفر می‌گیریم. در رابطه فوق، شاخص‌های  $a$  و  $b$  مربوط به گروه  $SU(2)$  و شاخص‌های  $i$  و  $j$  جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند. با توجه به تقارن دورانی در صفحه  $xy$  انتظار می‌رود رسانندگی کمیتی نرده‌ای باشد  $\sigma_{ab}^{ij} = \sigma_{ab} \delta^{ij}$ .

حال میدانها را به صورت  $\tilde{A}_x = \tilde{A}_x(r) e^{i\alpha x}$  در نظر می‌گیریم. در حد هیدرودینامیک، کافی است میدانهای  $\tilde{A}$  را در حد  $\omega$  خیلی کوچک به دست آوریم. برای این منظور ابتدا رابطه (۲۱) را در کنش قرار می‌دهیم و تا مرتبه دوم  $\tilde{A}$  نگاه می‌داریم.

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & \int d^4 x \frac{\gamma}{r^\gamma f} \left[ -r^\gamma f^\gamma \left( (\partial_r \tilde{A}_x^{(1)})^\gamma + (\partial_r \tilde{A}_x^{(2)})^\gamma + (\partial_r \tilde{A}_x^{(3)})^\gamma \right) \right. \\ & \left. + \left( (\tilde{A}_x^{(1)})^\gamma + (\tilde{A}_x^{(2)})^\gamma \right) \left( r^\gamma \omega^\gamma + (ra_0 - q)^\gamma \right) + r^\gamma \omega^\gamma \left( \tilde{A}_x^{(3)} \right)^\gamma \right], \quad (25) \end{aligned}$$

با وردش گرفتن از این کنش به معادلات زیر می‌رسیم:

$$r^\gamma f \left( f \tilde{A}_x^{(1)'} \right)' + \left( r^\gamma \omega^\gamma + (ra_0 - q)^\gamma \right) \tilde{A}_x^{(1)} = 0, \quad (26)$$

$$r^\gamma f \left( f \tilde{A}_x^{(2)'} \right)' + \left( r^\gamma \omega^\gamma + (ra_0 - q)^\gamma \right) \tilde{A}_x^{(2)} = 0, \quad (27)$$

$$f \left( f \tilde{A}_x^{(3)'} \right)' + \omega^\gamma \tilde{A}_x^{(3)} = 0, \quad (28)$$

ابتدا حل معادلات را در نزدیکی افق به دست می‌آوریم. برای این منظور از بسط نزدیک افق  $f \sim \gamma \pi T (r - r_h)$  و

$$\tilde{A}_x^{(a)} \sim (r - r_h)^{z_a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (29)$$

استفاده می‌کنیم و در نتیجه:

$$z_1 = z_2 = \pm i \frac{\sqrt{(a_0 - q / r_h)^\gamma + \omega^\gamma}}{\gamma \pi T}, \quad (30)$$

$$z_3 = \pm i \frac{\omega}{\gamma \pi T}, \quad (31)$$

حال جواب در کل دامنه  $\Gamma$  را، بسطی از  $\omega$  به صورت زیر فرض می‌کنیم:

محاسبه رسانندگی از فرمول گرین-کوبو (۲۴) که به حالت غیر آبلای تعمیم یافته است، استفاده کردیم. نتیجه به دست آمده برای  $\sigma_{xx}^{(ab)}$  برحسب شاخص های  $SU(2)$  قطری است. برای  $\sigma_{xx}^{(۳۳)}$  نتیجه یک به دست آمد اما برای  $a, b = 1, 2$  رسانندگی رنگ صفر می شود. بدین ترتیب رسانندگی به دست آمده در فضای  $SU(2)$  در جهت میدان زمینه (۲۰) است. به عبارتی قانون اهم غیر آبلای کاملاً قطری می شود یعنی رسانندگی  $\sigma$  چه از نظر شاخص های فضایی و چه از نظر شاخص های گروه پیمانه ای، یک کمیت نرده ای است.

از طرفی نامساوی (۹) که حدی برای رسانندگی آبلای است در این مدل غیر آبلای اشباع می شود. از این نظر، مقایسه مدل ما با محاسبات مرجع [۱۰] قابل توجه است. در آن مرجع نشان داده شده است که در یک سیاه چاله ماکسول-اینشتین بدون بار هنگامی که میدان زمینه صفر است و میدان اختلالی یک میدان ثابت الکتریکی است، حد (۹) اشباع می شود. در مدل ما نیز شرایط مشابهی برقرار است. میدان زمینه (۲۰) در مرز  $r \rightarrow \infty$  به سمت مقداری ثابت می رود که معادل میدان صفر است. تفاوت در غیر آبلای بودن میدان است که با توجه به قطری شدن روابط از نظر شاخص های گروه  $SU(2)$  می توان نتیجه گرفت که در این محاسبه، تنها یک زیرگروه  $U(1)$  تأثیرگذار بوده است و همان نتیجه اشباع نامساوی (۹) به دست آمده است. بنابراین با توجه به این که این نتیجه از مدل و روشی کاملاً متفاوت به دست آمده، نتیجه ای غیر بدیهی و در عین حال سازگار با مرجع [۱۰] است.

با جایگذاری در (۳۵)

$$h_{11} = -\frac{h_{10}}{16\pi\Lambda^2 r_h T (\pi r_h T (\Lambda M - a \cdot q) + i \Lambda M (a, r_h - q))} \times [3a_0^2 \Lambda^2 r_h^2 + 36\pi^2 a_0^2 r_h^2 T^2 (\Lambda - a_0^2) + 36i\pi a_0^2 \Lambda r_h T (a_0 r_h - q) + \Lambda i \pi \Lambda^2 Q^2 r_h T (q - a_0 r_h) + \Lambda^2 (3q(q - 2a_0 r_h) + \pi^2 r_h^2 T^2 (\Lambda q^2 + 20))] \quad (42)$$

به طریقی مشابه با  $\sigma_{xx}^{(۳۳)}$ ، برای  $\sigma_{xx}^{(۱۱)}$  و  $\sigma_{xx}^{(۲۲)}$  داریم:

$$\sigma_{xx}^{(۱۱)} = \sigma_{xx}^{(۲۲)} = -\frac{\Lambda}{3} (h_{11} + h_{11}^*), \quad (43)$$

اما با توجه به شرط مرزی  $\lim_{r \rightarrow \infty} h_{11} = 0$  در نزدیکی مرز  $h_{10} = 0$  به دست می آید که در نتیجه  $h_{11} = 0$  می شود و

$$\sigma_{xx}^{(۱۱)} = \sigma_{xx}^{(۲۲)} = 0, \quad (44)$$

بدین ترتیب رسانندگی رنگ  $\sigma_{xx}^{(ab)}$  برحسب شاخص های  $SU(2)$  قطری است و تنها در جهت سه، مقدار غیر صفر دارد. این جهت همان جهت میدان زمینه در (۲۰) است. به عبارت دیگر، قانون اهم کاملاً به صورت قطری در می آید:

$$\sigma_{aa} = \frac{\delta J_a^x}{\delta E_a^x}, \quad (45)$$

که در آن  $a = 3$  از طرفی رابطه (۴۰) نامساوی (۹) را اشباع می کند.

#### ۴. نتیجه گیری

ما برای یک مدل غیر آبلای یانگ-میلز با گروه پیمانه ای  $SU(2)$  در  $2+1$  بعد، رسانندگی رنگ را با استفاده از تناظر گرانش/نظریه پیمانه ای به دست آوردیم. دوگان گرانشی را یک نظریه اینشتین با سیاه شامه رایزنر-نوردستروم در  $3+1$  بعد در نظر گرفتیم که جواب های آن در [۱۴] معرفی شده اند. برای

#### مراجع

- Rangamani, *JHEP* **045** (2008) 0802.
- M Rangamani, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224003.
- J Bhattacharya, S Bhattacharyya, S Minwalla, and A Yarom, *JHEP*, **147** (2014) 1405.
- P Kovtun, *J. Phys.* **A45** (2012) 473001.
- D F Litim and C Manuel, *Nucl. Phys. B* **562** (1999) 237.
- J M Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
- O Aharony, S S Gubser, J M Maldacena, H Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183.
- J Casalderrey-Solana, H Liu, D Mateos, K Rajagopal and U A Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," arXiv:1101.0618.
- D Mateos, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) S713.
- S Bhattacharyya, V E Hubeny, S Minwalla, and M

- (2009) 113.
17. D T Son and A O Starinets, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** (2007) 95.
18. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 081601.
19. G Policastro, D T Son, and A O Starinets, *JHEP* **043** (2002) 0209.
20. A Donos and J P Gauntlett, *JHEP* **081** (2014) 1411.
21. S A Hartnoll, C P Herzog and G T Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601.
10. S Grozdanov, A Lucas, S Sachdev, and K Schalm, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 22 (2015) 221601.
11. M Baggioli and O Pujolas, *JHEP* **040** (2017) 1701.
12. B Goutéraux, E Kiritsis and W J Li, *JHEP* **122** (2016) 1604.
13. K Bitaghsir Fadafan, *Phys. Lett. B* **762** (2016) 399.
14. B L Shepherd and E Winstanley, *Phys. Rev. D* **93**, **6** (2016) 064064.
15. N Banerjee and S Dutta, arXiv:1112.5345 [hep-th].
16. D T Son, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **192-193**