پیشگویی بیزی برای داده‌های فضایی فازی

محسن محمدزاده،* فاطمه حسینی
گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
* مسئول مکاتبات- آدرس الکترونیکی: *mohsen_m@modares.ac.ir*
(دریافت: ۸۴/۱/۱۵ ؛ پذیرش: ۸۴/۷/۱۰)

چکیده

یکی از موضوعات مهم در آنالیز فضایی فازی، پیشگویی یک مقدار نامعلوم در موقعیت‌های مشخص براساس بردار مشاهدات فضایی فازی است. با فرض معلوم بودن پارامترهای میانگین و کواریانس، پیشگوی بهینه و میانگین مجذور خطای پیشگو با استفاده از روشهای کریگینگ قابل تعیین است، اما وقتی پارامترهای مدل نامعلوم هستند، معمولاً برآوردهای آنها بعنوان مقادیر واقعی در پیشگوی بهینه جایگذاری می‌شوند، که در اینصورت بهینگی پیشگو مورد تردید قرار می‌گیرد. از طرفی تعیین این پیشگو و میانگین مجذور خطای آن عموماً دشوار است. لذا در این مقاله برای رفع مشکل مذکور، با استفاده از رهیافت بیزی کریگینگ فازی را برای پیشگویی مشاهدات فضایی فازی به کریگینگ فازی تعمیم داده، سپس کارایی آن در یک مثال کاربردی با روشهای دیگر پیشگویی فضایی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: داده های فضایی، مشاهدات فازی، کریگینگ فازی، رهیافت فازی بیزی

مقدمه

روشهای آماری عموماً بر اساس استقلال مشاهدات بنا شده اند، اما در عمل با مسائل کاربردی زیادی مانند هواشناسی، زمین شناسی، همه گیرشناسی و ... مواجه می‌شویم که مشاهدات به نوعی به یکدیگر وابسته‌اند. داده‌هایی که در فضای مورد مطالعه بر حسب موقعیت و مکان قرار گرفتن به یکدیگر وابسته باشند داده‌های فضایی نامیده می‌شوند. چنانچه اینگونه داده ها مبهم (Vague Data) نیز باشند، آنها را می‌توان بعنوان داده‌های فضایی فازی (Fuzzy Spatial Data) در نظر گرفت. عدم استقلال و فازی بودن داده های فضایی فازی، تجزیه و تحلیل آماری آنها را به روشهای معمول بی اعتبار می‌سازد. لذا لازم است روشهای آمار فضایی که در آنها ساختار همبستگی فضایی داده‌ها لحاظ می‌شود، برای داده‌های فضایی فازی سازگار شوند. به همین منظور شاخه آمار فضایی فازی در آمار فضایی برای تحلیل اینگونه مشاهدات شکل گرفته و در حال توسعه و فراهم آوردن تکنیکهای مختلف می‌باشد. مسئلهٔ برآورد برای داده های فازی اولین بار توسط هیل و همکاران (Hill *et al.*, 1984) مورد مطالعه قرار گرفت. آنان با تعمیم فضای نمونه به فضای نمونهٔ فازی، روش ماکسیمم درستنمایی را به مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی نادقیق گسترش دادند. هیل و همکاران (Hill *et al.*, 1984) نیز رهیافت بیزی را در مسئلهٔ برآورد برای داده های فازی مورد مطالعه قرار دادند. در زمینهٔ فضایی فازی، دیاموند (Diamond, 1989) روش کریگینگ فازی را معرفی کرد. (Bardossy & Bogardi, 1990) کریگینگ با تغییر نگار فازی (Fuzzy Variogram) را بدست آوردند. پیوتروسکی و بارتل (Piotrowski *et al.* 1996) برای ناحیه بندی جغرافیایی ضخامت رسوبات یخچالی از روش کرگینگ فازی استفاده کردند.

در این مقاله مفاهیم آمار فضایی فازی و روشهای پیشگویی کریگینگ معمولی و کریگینگ فازی در بخش دو بیان، سپس با استفاده از رهیافت بیزی روشهای فضایی بیزی و فضایی فازی بیزی در بخش ۳ معرفی شده‌اند. در بخش ۴ نحوه بکارگیری روشهای ارائه شده در یک مثال کاربردی نمایش داده می‌شود و نتایج حاصله از روشهای مختلف بر اساس معیار میانگین توان دوم خطاها مورد مقایسه عددی قرار گرفته‌اند.

پیشگویی فضایی فازی

در آمارفضایی معمولاً میدان تصادفی (Random Field)، $\{Z(t),\ t\in D\}$ برای مدل بندی داده‌های فضایی بکار گرفته می‌شود، که در آن مجموعهٔ اندیس گذار D زیر مجموعه‌ای از فضای اقلیدسی $d\geq 1$ بعدی R^d است. میانگین و تابع کواریانس یا همتغییرنگار (Covariogram) میدان تصادفی به ترتیب بصورت:

$$E(Z(t))=\mu(t)\qquad t\in D$$

$$\sigma(t_1,t_2)=Cov(Z(t_1),Z(t_2))-E(Z(t_1))E(Z(t_2))\qquad t_1,t_2\in D$$

تعریف می‌شوند، که برای $t_1=t_2=t$، واریانس میدان تصادفی در مکان t حاصل می‌شود. برای واریانس اختلاف‌های $Z(t_1)$ و $Z(t_2)$ یعنی:

$$2\gamma(t_1-t_2)=Var(Z(t_1)-Z(t_2)) \qquad t_1,t_2\in D$$

نیز تغییرنگار (Variogram) نامیده می‌شود، که ساختار همبستگی فضایی داده‌ها را مشخص می‌کند. معمولاً با فرض آنکه میدان تصادفی $Z(\cdot)$ ایستای مرتبه دوم، یعنی میانگین میدان تصادفی ثابت و همتغییرنگار آن فقط تابعی از فاصلهٔ موقعیتها است، کریگینگ معمولی بعنوان بهترین پیشگوی خطی نااریب میدان تصادفی در هر موقعیت مشخص براساس بردار مشاهدات $Z=(Z(t_1),\ldots,Z(t_n))$ بکار برده می‌شود. کریگینگ با مینیمم کردن میانگین توان دوم خطای پیشگو، یعنی $\sigma_e^2(t_0)=E(Z(t_0)-\hat{Z}(t_0))^2$ بصورت $\hat{Z}(t_0)=\lambda' Z$ تعیین می‌شود، که ضرایب $\lambda=(\lambda_1\cdots\lambda_n)'$ از حل دستگاه معادلات:

$$\begin{cases}C\lambda=c+\mathrm{m}\\ \lambda'1=1\end{cases}$$

بصورت:

$$\hat{\lambda}'=(c+1\frac{1-1'C^{-1}c}{1'C^{-1}1})'C^{-1}$$

بدست می‌آید، که در آن $c=(\sigma(t_0-t_1)\cdots\sigma(t_0-t_n))$ و C یک ماتریس $n\times n$ با عناصر $c_{ij}=\sigma(t_i-t_j)$ و $1=(1,\ldots,1)'_{1\times n}$ بردار یکانی است. واریانس کریگینگ در موقعیت t_0 نیز بصورت $\sigma_k^2(t_0)=\sigma(0)-\lambda'c+m$ حاصل می‌شود، که در آن $m=\frac{1-1'C^{-1}c}{1'C^{-1}1}$ است. (Cressie, 1993).

چنانچه پیشگویی داده‌های فضایی فازی مورد نظر باشد، لازم است برای مدلبندی آنها یک میدان تصادفی فازی تعریف شود. برای این منظور ابتدا متغیر تصادفی فازی مثلثی بصورت:

$$Z(t)=(Z^-(t),Z^m(t),Z^+(t))_T \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود، که در آن اندیس T نشان دهنده مثلثی بودن متغیر تصادفی فازی است، و برای هر $t\in D$:

$$Z^-(t)=Z^m(t)-Z^l(t) \quad \text{و} \quad Z^+(t)=Z^m(t)+Z^r(t)$$

است. $Z^m(t)$ و $Z^r(t)$ و $Z^l(t)$ به ترتیب میانه (Modal) و پهنای چپ و راست هستند و $Z^+(t)$ و $Z^-(t)$ به ترتیب تکیه‌گاههای بالا و پایین متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود. به تبعیت از دیاموند (Diamond, 1989) فاصله بین دو متغیر تصادفی فازی مثلثی مانند $Z(t_1)$ و $Z(t_2)$ را می‌توان بصورت

$$D_2(Z(t_1),Z(t_2))^2=\sum_{\alpha\in J}(Z^\alpha(t_1)-Z^\alpha(t_2))^2$$

تعریف نمود، که در آن J مجموعه اندیسهای $\{-,m,+\}$ است. اکنون میدان تصادفی فازی را می‌توان بفرم $\{Z(t),t\in D\}$ در نظر گرفت، که مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی فازی بفرم ۱ است. میانگین و واریانس میدان تصادفی فازی بشرط وجود $ED_2(Z(t),0)^2$ (Diamond, 1989) بصورت عددهای فازی مثلثی:

$$E(Z(t))=(EZ^-(t),EZ^m(t),EZ^+(t))_T \qquad t\in D$$

$$Var(Z(t))=ED_2(Z(t),E(Z(t)))^2=\sum_{\alpha\in J}E[Z^\alpha(t)-E(Z^\alpha(t))]^2$$

تعریف می‌شوند. اگر میانگین میدان تصادفی فازی با میانه $Z^m(t)$ و تکیه گاه $[Z^+(t),Z^-(t)]$ ثابت و مستقل از t باشد و توابع کواریانس پایین $\sigma^-(h)$، میانه $\sigma^m(h)$ و بالای $\sigma^+(h)$ آن موجود و مستقل از t و فقط توابعی از فاصلهٔ $h=t_1-t_2$ باشند، بطوری‌که: $\sigma(h)=(\sigma^-(h),\sigma^m(h),\sigma^+(h))_T$ و $E(Z(t))=(\mu^-,\mu^m,\mu^+)_T=\mu$، که در آن برای هر $\alpha\in J$، $\sigma^\alpha(h)=E[Z^\alpha(t+h)Z^\alpha(t)]-(\mu^\alpha)^2,\ h\in R^d$ می‌باشد، آنگاه میدان فازی تصادفی ایستای مرتبه دوم نامیده می‌شود.

پیشگویی فضایی فازی $Z(t_0)$ براساس مقادیر فازی مثلثی $Z(t_1),\ldots,Z(t_n)$ مشاهده شده در موقعیتهای فضایی $t_1,\ldots,t_n$ کریگینگ فازی نامیده می‌شود و با در نظر گرفتن دو فرض زیر حاصل می‌شود:

الف- میدان تصادفی فازی، ایستای مرتبهٔ دوم است.

ب- پیشگوی $\hat{Z}(t_0)$ ناریب و تابعی خطی از مشاهدات فازی بفرم

$$\hat{Z}(t_0)=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\lambda_i Z(t_i)$$

است، که در آن $i=1,\ldots,n$، $\lambda_i\ge 0$ و عملگر $\oplus$ جمع فازی است که برای دو عدد فازی مثلثی $Z(t_1)=(Z^-(t_1),Z^m(t_1),Z^+(t_1))_T$ و $Z(t_2)=(Z^-(t_2),Z^m(t_2),Z^+(t_2))_T$ بفرم

$$Z(t_1)\oplus Z(t_2)=(Z^-(t_1)+Z^-(t_2),Z^m(t_1)+Z^m(t_2),Z^+(t_1)+Z^+(t_2))_T$$

تعریف می‌شود. کریگینگ فازی بصورت $\hat{Z}(t_0)=\hat{\lambda}'Z$ و از حل دستگاه

$$\begin{cases}C\lambda=c+m+l\\ \lambda'1=1\\ L'\lambda=0\\ L_i\ge 0,\quad \lambda_i\ge 0\end{cases}$$

بدست می‌آید، که در آن $L=(L_1,\ldots,L_n)'$ و $m=m.1$، C یک ماتریس $n\times n$ با عناصر $c_{ij}=\sum_{\alpha\in J}\sigma^\alpha(t_i-t_j)$ و $c=(\sum_{\alpha\in J}\sigma^\alpha(t_0-t_1),\ldots,\sum_{\alpha\in J}\sigma^\alpha(t_0-t_n))'$ است. واریانس کریگینگ فازی نیز بصورت $\sigma^2_{fuzzy}(t_0)=C_0-\lambda'c+m$ حاصل می شود، که در آن $C_0=\sum_{\alpha\in J}\sigma^\alpha(0)$ است.

پیشگویی فضایی بیزی فازی

کریگینگ معمولی با فرض گوسی بودن میدان و معلوم بودن پارامترهای مدل، شامل پارامترهای میانگین و کواریانس فضایی، برای پیشگویی مقدار نامعلوم یک میدان تصادفی در موقعیتهای مشخص

براساس بردار مشاهدات بکار می‌رود. هنگامی که پارامترهای مدل نامعلوم هستند، با تشکیل تابع درستنمایی و ماکسیمم نمودن آن، برآوردهای حداکثر درستنمایی این پارامترها تعیین و به عنوان مقادیر واقعی پارامترهای مدل در پیشگوی بهینه جایگذاری می‌شود. در این روش از آنجا که مقادیر واقعی پارامترهای نامعلوم هستند، بهینگی پیشگو مورد تردید و تعیین میانگین مجذور خطای آن دشوار می‌گردد. با توجه به این مسائل، رهیافت بیزی اولین بار در آمار فضایی توسط کیتانیدیس (Kitanidis 1986) پیشنهاد شد. هندکوک و استاین (Handcock & Stein 1993) نیز با اشاره به مشکلات استفاده از روشهای بیزی از جمله تعیین توزیع پیشین و محاسبه پیچیده توزیع پیشگوی بیزی، برای سادگی محاسبات از توزیعهای پیشین ناسره (Improper) استفاده کردند. ایکر و گلفند (Ecker & Gelfand 1997) برآورد بیزی پارامترهای تغییرنگار کروی (Spherical Variogram) را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. (محمدزاده و جعفری، ۱۳۸۳) نیز به بررسی پیشگوی فضایی بیزی برای میدان تصادفی گوسی وتبدیل یافته پرداختند.

فرض کنید $\{Z(t), t \in D \subset R^d\}$، $d \geq 1$ یک میدان تصادفی گوسی بصورت:

$$Z(t) = f'(t)\beta + \varepsilon \quad t \in D$$

باشد، که در آن $f(t) = (f_1(t), \dots, f_q(t))$ و $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ بردار ضرایب رگرسیونی است و ε بردار خطاها با میانگین صفر است. در رهیافت بیزی β یک بردار تصادفی از توزیع احتمالی با گشتاورهای $E(\beta) = \tilde{\beta}$ و $Cov(\beta) = \Sigma$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن Σ یک ماتریس $q \times q$ و $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_q)$ است. با توجه به این مفروضات، میانگین و کواریانس فضایی بترتیب بصورت

$$E(Z(t) \mid \beta) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j f_j(t)$$

$$Cov(Z(t), Z(s) \mid \beta) = \sigma_{Z|\beta}(t-s)$$

هستند. یک پیشگوی خطی برای میدان تصادفی درموقعیت دلخواه t_0 براساس مشاهدات $(Z(t_1), \dots, Z(t_n))$ بصورت

$$\hat{Z}(t_0) = \lambda' Z^* + \lambda_0$$

است، که در آن $Z^* = (Z(t_1) - \mu_Z(t_1), \dots, Z(t_n) - \mu_Z(t_n))$، $\mu_Z(t) = \sum_q \tilde{\beta}_q f^q(t)$، $\mu_Z(t_0) = \lambda_0$ و $\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ وزنهای ثابت مشخص هستند. با در نظر گرفتن بردار $c = (\sigma_{Z|\beta}(t_0 - t_1) \cdots \sigma_{Z|\beta}(t_0 - t_n))$ و C یک ماتریس $n \times n$ با عناصر $c_{ij} = \sigma_{Z|\beta}(t_i - t_j)$، f_0 یک بردار $q \times 1$ با عناصر $f_{0j} = f_j(t_0)$، $F_{n \times q}$ یک ماتریس با عناصر $f_{ij} = f_j(t_i)$، کریگینگ بیزی بصورت $\hat{Z}(t_0) = \hat{\lambda}' Z^* + \hat{\lambda}_0$ حاصل می‌شود (More, 1989)، که در آن $\hat{\lambda}' = (c + F\Sigma f_0)(C + F\Sigma F')^{-1}$ و $\hat{\lambda}_0 = f'(t_0)\tilde{\beta}$ هستند و مینیمم میانگین مربع خطای آن، بصورت $\sigma^2_{Bayes} = C_0 + f_0'\Sigma f_0 - \hat{\lambda}' c$ می‌باشد.

اکنون بعنوان کار اصلی این مقاله، کریگینگ بیزی را برای پیشگویی مشاهدات فضایی فازی تعمیم داده و آن را کریگینگ بیزی فازی می‌نامیم. برای این منظور فرض کنید میدان تصادفی فازی $\{Z(t), t \in D\}$، را بتوان بصورت:

$$Z^\alpha(t) = f^{\alpha'}(t)\beta^\alpha + \varepsilon^\alpha(t) \quad \alpha \in J, \;\; E(\varepsilon^\alpha(t)) = 0$$

تجزیه نمود، که در آن پهناهای بالا و پایین f و β به ترتیب بصورت:

$$f^-(t) = (f^{m'}, -f^{l'})', \; f^+(t) = (f^{m'}, f^{r'})'$$

$$\beta^-(t) = (\beta^{m'}, \beta^{l'})', \; \beta^+(t) = (\beta^{m'}, -\beta^{r'})'$$

تعیین می‌شوند. چنانچه برای هر $\alpha \in J$، β^α یک متغیر تصادفی با یک پیشین مشخص، با میانگین $\tilde{\beta}^\alpha$ و کواریانس Σ^α و مستقل از متغیر $Z(t)$ باشد، داریم

$$Cov(\beta_j^\alpha, \varepsilon^\alpha(t)) = 0, \; j = 1, \dots, r$$

با فرض استقلال پیشین ها برای مقادیر میانه و تکیه گاه عبارات:

$$\tilde{\beta}^- = E\beta^- = (\tilde{\beta}^{m'}, \tilde{\beta}^{l'})', \qquad \tilde{\beta}^+ = E\beta^+ = (\tilde{\beta}^{m'}, \tilde{\beta}^{r'})'$$

$$\tilde{\Sigma}^- = Cov\beta^- = \begin{pmatrix} \Sigma^m & 0 \\ 0 & \Sigma^l \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}^+ = Cov\beta^+ = \begin{pmatrix} \Sigma^m & 0 \\ 0 & \Sigma^r \end{pmatrix}$$

حاصل می‌شوند. یک پیشگوی خطی فازی بیزی برای $Z(t_0)$ در موقعیت دلخواه t_0 براساس بردار مشاهدات فازی بصورت

$$\hat{Z}(t_0) = \oplus_{i=1}^{n} \lambda_i Z(t_i) \oplus \Lambda_0$$

در نظر گرفته می‌شود، که میانگین مجذور خطای پیشگوی فازی بیزی:

$$ED_2(Z(t_0) - \hat{Z}(t_0))^2 = \sum_{\alpha \in J} [Var(Z^\alpha(t_0) - \hat{Z}^\alpha(t_0)) + E^2(Z^\alpha(t_0) - \hat{Z}^\alpha(t_0))] \qquad (۲)$$

را مینیمم می‌کند و برای هر $\alpha \in J$، با در نظر گرفتن $\tilde{C}_0^\alpha = C_0^\alpha + f_0^{\alpha'}\Sigma^\alpha f_0^\alpha$، $\tilde{c}_0^\alpha = C^\alpha + F^\alpha \Sigma^\alpha f_0^\alpha$ و $\tilde{C}^\alpha = (C^\alpha + F^\alpha \Sigma^\alpha F^{\alpha'})$ واریانس کریگینگ فازی بیزی بصورت:

$$Var(Z^\alpha(t_0) - \hat{Z}^\alpha(t_0)) = \tilde{C}_0^\alpha - 2\lambda' \tilde{c}_0^\alpha + \lambda' \tilde{C}^\alpha \lambda \qquad (۳)$$

خواهد شد و اگر f_0^α یک بردار $q \times 1$ با عناصر $f_{j0}^\alpha = f_j^\alpha(t_0)$ و $F_{n \times q}^\alpha$ ماتریسی با عناصر $f_{ij}^\alpha = f_j^\alpha(t_0)$ باشند، داریم

$$\begin{aligned} [E(Z^\alpha(t_0) - \hat{Z}^\alpha(t_0)]^2 &= [E(Z^\alpha(t_0) - E(\hat{Z}^\alpha(t_0))]^2 \\ &= [f_0^\alpha \tilde{\beta}^\alpha - \lambda' F^\alpha \tilde{\beta}^\alpha - \Lambda_0^\alpha]^2 \\ &= ((f_0^{\alpha'} - \lambda' F^\alpha)\tilde{\beta}^\alpha - \Lambda_0^\alpha)^2 \end{aligned} \qquad (۴)$$

و با جایگذاری روابط ۳ و ۴ در رابطهٔ ۲ و با در نظر گرفتن $\tilde{C}_0 = \sum_{\alpha \in J} \tilde{C}_0^\alpha$، $\tilde{c}_0 = \sum_{\alpha \in J} \tilde{c}_0^\alpha$ و $\tilde{C} = \sum_{\alpha \in J} \tilde{C}^\alpha$ لازم است تابع هدف

$$f = \tilde{C}_0 - 2\lambda' \tilde{c}_0 + \lambda' \tilde{C} \lambda + \sum_{\alpha \in J} ((f_0^{\alpha'} - \lambda' F^\alpha)\tilde{\beta}^\alpha - \Lambda_0^\alpha)^2$$
$$-2L\lambda + 2L_1\Lambda_0^- - 2(L_1 + L_2)\Lambda_0^m - 2L_2\Lambda_0^+$$

مینیمم شود، که در آن L و L_1 و L_2 ضرایب لاگرانژ هستند. اکنون با حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = \tilde{C}\lambda - \tilde{c}_0 - L - \sum_{\alpha \in J} F^{\alpha} \tilde{\beta}^{\alpha} (\tilde{\beta}^{\alpha} (f_0^{\alpha} - F^{\alpha'} \lambda) - \Lambda_0^{\alpha}) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \Lambda_0^-} = L_1 - (f_0^{-'} - \lambda' F^-) \tilde{\beta}^- + \Lambda_0^- = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \Lambda_0^+} = -L_2 - (f_0^{+'} - \lambda' F^+) \tilde{\beta}^+ + \Lambda_0^+ = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \Lambda_0^m} = -(L_1 + L_2) - (f_0^{m'} - \lambda' F^m) \tilde{\beta}^m + \Lambda_0^m = 0 \\ \lambda \ge 0, \Lambda_0^m - \Lambda_0^- \ge 0, \Lambda_0^+ - \Lambda_0^m \ge 0 \\ L'\lambda = 0, L_1(\Lambda_0^m - \Lambda_0^-) = 0, L_2(\Lambda_0^+ - \Lambda_0^m) = 0 \\ L_1, L_2 = 0 \\ L \ne 0 \end{cases} \tag{۵}$$

می‌توان برآورد λ_i و Λ_0^{α} ها را بدست آورد. در اینصورت مقدار مینیمم میانگین مربع خطای پیشگو بصورت $\sigma_{B.F}^2 = \tilde{C}_0 - \lambda' \tilde{c}_0$ حاصل می‌شود. حل دستگاه ۵ بسیار مشکل و غیرممکن است. اگر Λ_0^+ و Λ_0^m و Λ_0^- با پارامترهای ساده λ_0^+ و λ_0^m و λ_0^- عوض شوند، پیشگوی فضایی فازی بیزی بصورت

$$\hat{Z}(t_0) = [\lambda' Z^-(t_i) + \lambda_0^-, \lambda' Z^m(t_i) + \lambda_0^m, \lambda' Z^+(t_i) + \lambda_0^+]_T$$

حاصل می‌شود و عبارت دوم رابطه ۲ صفر می‌شود و دستگاه ۵ بفرم:

$$\begin{cases} \tilde{C}\lambda - \tilde{c}_0 - L = 0 \\ \lambda \ge 0 \\ L'\lambda = 0 \\ L \ge 0 \end{cases}$$

ساده خواهد شد، که شبیه همان دستگاهی است که در روش کریگینگ فازی بدست آورده شد، با این تفاوت که ماتریس $\tilde{C}$ و بردار $\tilde{c}_0$ شامل کواریانسهای پیشین هستند.

مثال کاربردی

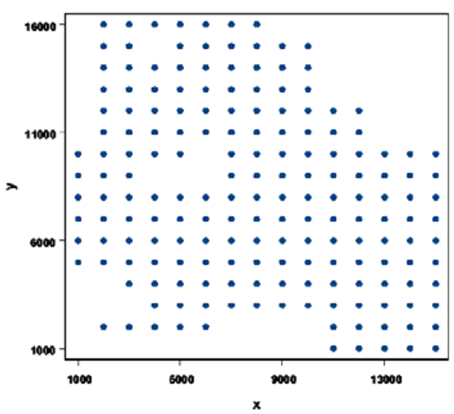
فریبرگ یک ناحیهٔ معدنی با کانه های سولفید سرب، روی و نقره در ساکسونی آلمان است. سه تیم زمین‌شناسی طی سالهای ۱۹۸۹ تا۱۹۹۱ به نمونه گیری از خاک ۵۵۳ سایت این منطقه پرداختند و عناصر کادمیوم، سرب، قلع، ارسنیک، مس و روی و نقره را مورد اندازه گیری قرار دادند. (Nielsen 1995). در این مثال میزان آلودگی خاک این ناحیه به کادمیوم براساس داده‌های جمع آوری شده در ۱۸۱ سایت با طول و عرض یکسان، که موقعیت آنها در شکل ۱ نمایش داده شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. میزان آلودگی کادمیوم در هر موقعیت توسط هر سه زمین شناس مذکور اندازه‌گیری و نتایج متفاوتی گزارش شده، که تفاوت آنها می‌تواند ناشی از خطاهای اندازه‌گیری باشد. لذا برای رفع ابهام موجود در داده‌ها در تحلیل آماری آنها از هر سه سری داده و رهیافت فازی استفاده خواهد شد. برای این منظور دو سری از داده‌ها را بعنوان پهنای چپ (Z^l) و پهنای راست (Z^r) و میانگین آنها را بعنوان میانه و $Z^+ = Z^m + Z^r$ و $Z^- = Z^m - Z^l$ را نیز پهنای بالا و پایین داده‌های فازی مثلثی در نظر می‌گیریم. سری سوم داده ها نیز را برای استنباط پارمترهای جامعه بکار خواهیم برد. شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب پهنای پایین و بالا و شکل ۴ میانه داده‌های فازی مثلثی را نمایش می‌دهند. برای برازش مدلی مناسب به تغییرنگار فازی داده‌ها، با استفاده از برآورد تجربی فازی آن که تعمیمی از برآورد تجربی تغییرنگار کرسی (Cressie 1993) است، بصورت

$$2\hat{\gamma}^{\alpha}(h) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z^{\alpha}(t_i + h) - Z^{\alpha}(t_i))^2 \quad \alpha \in \{-, m, +\}$$

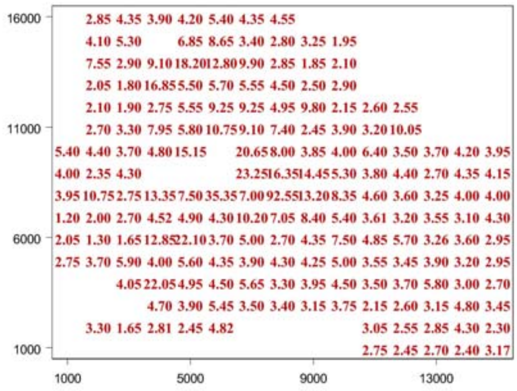
استفاده شده است، که در آن

$$N(h) = \{(t_i, t_j) : t_i - t_j = h, i, j = 1, \ldots, n\}$$

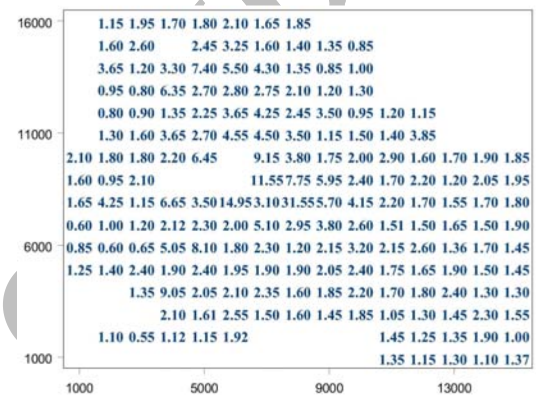
تعداد جفت کمیتهای متمایزی است که در فاصله h از یکدیگر قرار گرفته اند، برآورد تغییرنگار فازی و مدل کروی برازش شده به آن در شکل ۵ و برآورد پارامترهای آن نیز در جدول ۱ آورده شده است. کنون روش کریگینگ و کریگینگ بیزی برای پیشگویی مقادیر موقعیتهای فاقد مشاهده بر اساس مشاهدات میانه بکار گرفته می‌شود و با استفاده از مشاهدات فازی، به روشهای کریگینگ فازی و کریگینگ بیزی فازی نیز موقعیتهای فاقد مشاهدهٔ شبکه پیشگویی می‌شوند. برای بدست آوردن این پیشگوها از محیط برنامه نویسی نرم افزار S-plus استفاده شده است. شکلهای ۶، ۷ و ۸ به ترتیب رویه و کانتور پهناهای پایین، میانه ها و پهنای بالای کریگینگ بیزی فازی را نمایش می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود در نمودارهای رویه و همچنین در نمودارهای کانتور کریگینگ فازی بیزی یک قله بزرگ دیده می‌شود که نشانگر تمرکز کادمیوم در موقعیتهایی با طول جغرافیایی ۷۰۰۰ تا ۹۰۰۰ و عرض جغرافیایی ۸۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ است. بعلاوه چند قله دیگر نیز در شکلها مشاهده می‌شوند که بیانگر تمرکز کادمیوم در نواحی با طول جغرافیایی ۴۰۰۰ و عرض جغرافیایی ۱۰۰۰۰ است. برای مقایسهٔ چهار روش کریگینگ، کریگینگ بیزی، کریگینگ فازی و کریگینگ بیزی فازی پیشگویی براساس این چهار روش در ۶ موقعیت انجام شد که موقعیتها به همراه مقادیر پیشگویی و واریانس آنها در جداول ۲ و ۳ آورده شده‌اند. مقادیر میانگین مربع خطا چهار روش پیشگویی نیز محاسبه و در جدول ۴ ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود مقادیر MSE برای روش کریگینگ بیزی فازی کوچکتر از سایر روشهاست، که ناشی از استفاده این روش از تمام اطلاعات قابل استفاده پیرامون میزان آلودگی کادمیوم این ناحیه است، در صورتی که در روش کریگینگ معمولی فقط میانگین دو سری داده و در روش کریگینگ فازی دو سری از داده ها بکار گرفته شده است و سری سوم داده مورد استفاده قرار نگرفته است.



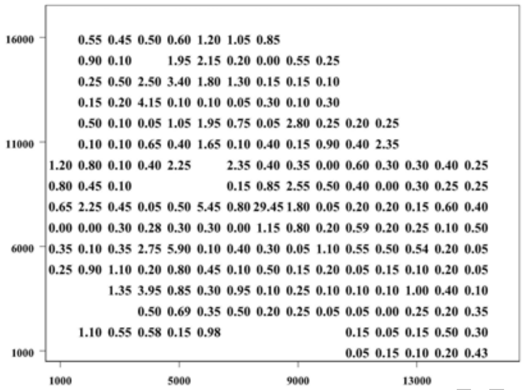
شکل ۱- نمودار شبکه.



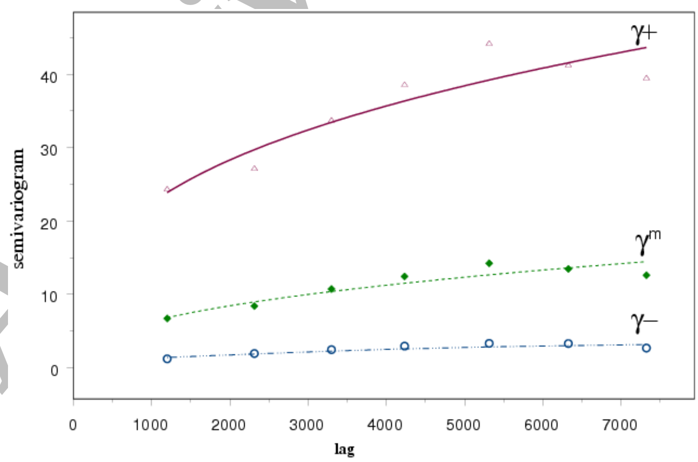
شکل ۲- مقادیر پهنای بالا.



شکل ۳- مقادیر پهنای پایین.



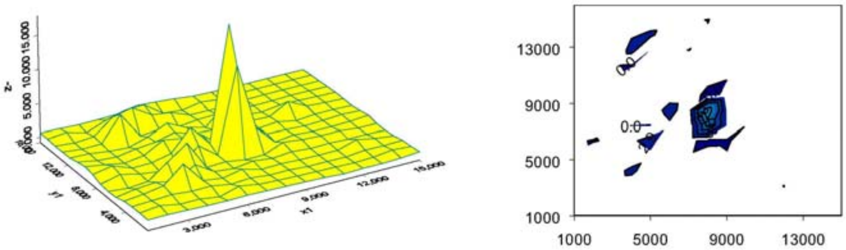
شکل۴- مقادیر میانه.



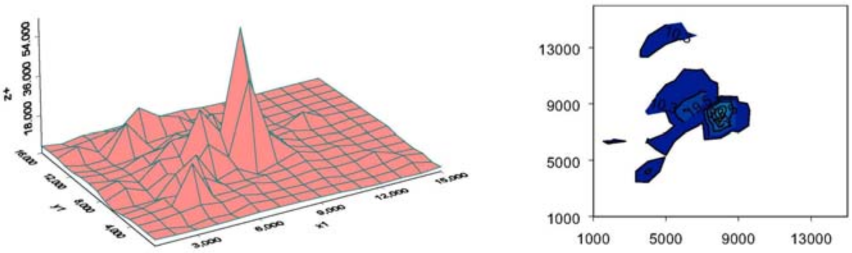
شکل ۵- برازش تغییرنگار.

جدول ۱- برآورد پارامترهای تغییرنگار کروی فازی

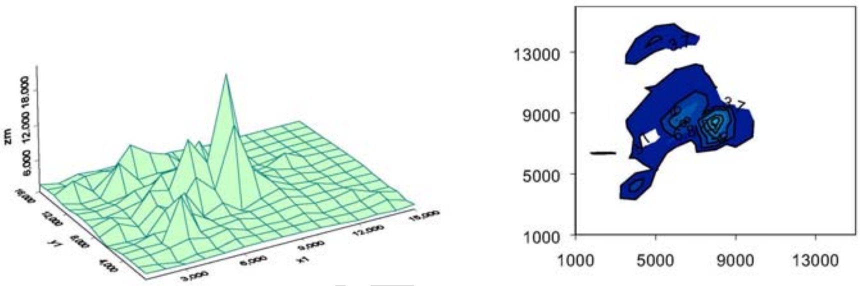
دامنه	*آستانه*	*اثرقطعه ای*	*تغییرنگار*
۵۴۶۰	۳	۰	γ^-
۵۹۵۰	۱۳	۳	γ^m
۶۱۵۰	۴۱	۱۵	γ^+



شکل ۶- نمودار رویه و کانتور مقادیر برآورد شده کل شبکه برای پهنای پایین به روش کریگینگ فازی بیزی.



شکل ۷- نمودار رویه و کانتور مقادیر برآورد شده کل شبکه برای پهنای بالا به روش کریگینگ فازی بیزی.



شکل ۸- نمودار رویه و کانتور مقادیر برآورد شده کل شبکه برای میانه به روش کریگینگ فازی بیزی.

جدول ۲- پیشگویی و واریانس پیشگو در ۵ نقطه

کریگینگ بیزی		*کریگینگ معمولی*		
واریانس	Z	واریانس	Z	*(x,y)*
۰/۹۰۳۸	۱/۴۷	۰/۹۰۳۹	۱/۴۵	*(۱۰۰۰و۲۰۰۰)*
۰/۸۶۱۹	۱/۵۵	۰/۸۶۲۰	۱/۵۵	*(۲۰۰۰و۳۰۰۰)*
۰/۸۸۲۸	۱/۳۴	۰/۸۸۲۸	۱/۳۴	*(۳۰۰۰و۱۰۰۰)*
۰/۸۲۲۳	۳/۸۰	۰/۸۲۲۳	۳/۸۰	*(۴۰۰۰و۹۰۰۰)*
۰/۸۷۹۸	۱/۵۳	۰/۸۷۹۹	۱/۵۳	*(۵۰۰۰و۱۰۰۰)*

جدول ۳- پیشگویی و واریانس پیشگو در ۵ نقطه

کریگینگ فازی بیزی		*کریگینگ فازی*		
واریانس	(Z^-, Z^m, Z^+)	واریانس	(Z^-, Z^m, Z^+)	*(x,y)*
۰/۶۷۱۲	(۳/۷۰ و۱/۴۷و۰/۷۹)	۰/۶۷۱۷	(۳/۷۱ و۱/۴۴و ۰/۷۷)	*(۱۰۰۰و۲۰۰۰)*
۰/۴۷۸۵	(۳/۹۷ و۱/۵۵و ۰/۹۰)	۰/۴۷۸۶	(۳/۹۸ و۱/۵۵و ۰/۸۹)	*(۲۰۰۰و۳۰۰۰)*
۰/۵۸۱۱	(۳/۳۲ و۱/۳۴و۰/۶۸)	۰/۵۸۱۹	(۳/۳۳ و۱/۳۴و ۰/۶۶)	*(۳۰۰۰و۱۰۰۰)*
۰/۱۶۸۹	(۸/۳۲ و۳/۸۳و۰/۶۸)	۰/۱۶۹۰	(۸/۳۴ و۳/۸۳و ۰/۶۸)	*(۴۰۰۰و۹۰۰۰)*
۰/۵۶۷۷	(۳/۵۹ و۱/۵۳و۰/۵۶)	۰/۵۶۸۰	(۳/۶۱ و۱/۵۳و ۰/۵۶)	*(۵۰۰۰و۱۰۰۰)*

جدول۴- میانگین مربع خطای برآورد برای هر چهار روش

روش برآورد	MSE
کریگینگ معمولی	۰/۸۸۹۰۵۴۶
کریگینگ بیزی	۰/۸۸۹۰۳۰۰
کریگینگ فازی	۰/۶۰۱۵۷۲۱
کریگینگ فازی بیزی	۰/۵۷۴۶۱۵۳

بحث و نتیجه گیری

استفاده از روشهای فازی برای دادههای مشابه میزان آلودگی کادمیوم منطقه فریبرگ، نتایج دقیقتری نسبت به روشهای معمول ارائه میدهد. البته این بدان معنی نیست که همواره روشهای فازی رقیبی برای روشهای معمول میباشند، بلکه بعنوان روشهایی مکمل قابل استفاده میباشند. در صورت موجود بودن اطلاعات پیشین، با استفاده از روشهای بیزی نتایج بهتری بدست می آید حتی اگر اطلاعات پیشین، با استفاده از روشهای بیزی میتوان پیشگوییهای دقیقتری را بدست آورد، حتی اگر اطلاعات پیشینی در دسترس نباشد با استفاده از پیشینهای ناآگاهی بخش میتوان از رهیافت بیزی به پیشگوهایی با واریانس کوچکتر از روشهای کلاسیک رسید. در این مقاله رهیافت بیزی در زمینه فضایی فازی مورد استفاده قرار گرفت و نیکویی نتایج حاصل از آن با معیار MSE نسبت به سایر روشها نشان داده شدهاست. هرچند گاهی روشهای بیزی فازی نیازمند حل دستگاههای پیچیده هستند، اما میتوان با استفاده از روشهای ساده سازی و یا عددی آنها را محاسبه نمود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات اصلاحی داوران محترم مجله که موجب بهبود این مقاله گردید و همچنین از حمایت قطب علمی دادههای ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

منابع:

محمدزاده، م.، جعفری خ.م. ۱۳۸۲: پیشگویی فضایی بیزی برای میدان تصادفی گوسی، کنفرانس احتمال و فرآیندهای تصادفی. دانشگاه کشاورزی و منابع طبیعی، گرگان.

محمدزاده، م.، جعفری خ.م. ۱۳۸۳: پیشگویی فضایی بیزی برای یک میدان تصادفی تبدیل یافته. مجله علوم دانشگاه تهران، جلد سیام، شمارهٔ اول، ۱۴۴-۱۳۳.

Bardossy A., Bgardi I., Kelly, W.E. 1990: Kriging with Imprecise (Fuzzy) Varigoram I, II, *J. Math Geol.* **22:** 63-79, 81-94.

Cressie N. 1993: Statistics for Spatial Data, Wiley, New York.

Diamond P. 1989: Fuzzy Kriging. *J. Fuzzy Sets and System*, **33:** 315-332.

Ecker M.D., Gelfand A.E. 1997: Bayesian Variogram Modeling for an Isotropic Spatial Process. *J. Agric. Boil, Environ. Stat.* **2:** 347-369.

Handcock M., Stein M. 1993: A Bayesian Analysis of Kriging. *J. Technometrics*. **35:** 403-410.

Hill J.R., Hinkley D.V., Kostal H., Morris C.N. 1984: Spatial estimation from remotely sensed data via empirical Bayes models, *NASA Technical Report*, United States, **21:** 115-135.

Kitanidis P.K. 1986: Parameter Uncertainty in Estimation of Spatial Functions: Bayesian Analysis. *J. Water Resources Research.* **22:** 499-507.

Nielsen A.A., Ersboll B.K., Palchen W., Rank G., Klug A. 1995: A New Approach to Differentiation Between Geogenic and Anthropogenic Influences on Soils in a Mining Processing Area, Haarstad, K[ED.], proc. *Nordic Symposium on Variability in Polluted Soil and Groundwater*. PP. 1-14.

Omre H., Halvorsen K.B. 1989: The Bayesian Bridge Between Simple and Universal Kriging. *J. Mathematical Geology.* **21:** 767-786.

Piotrowski J.A., Bartels F., Skalski A. 1996: Geographical Regionalization of Glacial Aquitard Thickness in Northwestern Germany. Based on Fuzzy Kriging. *J. Math Geol.* **28:** 437-452.