# روش برآورد "تأثیر با وقفه زمانی" براساس داده‌های مدل هم تجمعی

دکتر ابراهیم هادیان *

## چکیده

روش‌های موجود در برآورد میزان تأثیر شوک‌های وارده بر اقتصاد غالباً قادر به بیان این اثرات در طی زمانی هستند که منحصراً توسط مدل تعیین می‌گردد، در صورتی‌که تغییر بعضی از این متغیرها می‌تواند برای مدت زمان طولانی‌تر از آنچه که مدل تعیین نموده است، تأثیر خود را بر جای گذارد.

روش نوین هم تجمعی در تحلیل سری‌های زمانی این امکان را می‌دهد تا بتوان روشی برای برآورد تأثیر با وقفه زمانی تغییرات متغیرهای توضیحی بر متغیر وابسته ارائه نمود. از این رو، در این مقاله پس از تدوین یک مدل هم تجمعی فرضی و تشکیل مدل تصحیح خطای مربوط به آن، روشی برای برآورد تأثیر با وقفه زمانی تغییرات موقت و دائمی متغیر توضیحی بر متغیر وابسته ارائه شده است.

---

*. عضو هیأت علمی بخش اقتصاد دانشگاه شیراز.

## مقدمه

تأثیر با وقفه زمانی تغییرات متغیرهای توضیحی بر متغیروابسته یکی از مشکلات عمده مدلهای رگرسیون‌خطی‌استاندارد می‌باشد. این مدلها که معمولاً، چگونگی یک رابطهٔ علت و معلولی را بین متغیر وابسته و متغیرهای تعیین‌کننده آن نشان می‌دهند، تنها قادر به بیان تأثیر تغییرات متغیرهای توضیحی، در طی زمانی است که منحصراً توسط مدل تعیین می‌گردد. اما، در عمل، بعضی از این تغییرات می‌توانند متغیر وابسته را برای مدت طولانی‌تر تحت تأثیر قرار دهند. مثلاً، تأثیر تبلیغات بر حجم فروش یک مؤسسه را نمی‌توان تنها در یک یا دو دوره محدودکرد بلکه، این احتمال وجود داردکه تبلیغات برای سالهای متوالی تأثیر خود را بر حجم فروش به جای گذارد. این موضوع اگر چه مورد توجه صاحب نظران قرار گرفته اما، تنها برای معادلاتی که به صورت خود همبسته[1] تبیین می‌گردند بسط و گسترش یافت.

با توجه به توسعه روش هم تجمعی[2] موضوع مذکور در این چارچوب چندان مورد توجه واقع نگردید. از این رو، مقاله حاضر تلاشی در جهت ارائه روشی به منظور برآورد تأثیر با وقفه زمانی تغییرات موقت و دائمی متغیرهای توضیحی بر متغیر وابسته، بر اساس دادهٔ مدل هم تجمعی می‌باشد.

## چارچوب تحلیل

اگر دو متغیر سری زمانی $x_t$ و $y_t$ دارای رابطهٔ تعادلی و بلندمدت باشند، مدل هم تجمعی مربوط به آنها را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود.[3]

---

1. Auto - Regressive

2. Cointegration Technique

۳. در نظر گرفتن معادلاتی با بیش از دو متغیر محدودیت خاصی ایجاد نمی‌کند.

$$xt=\alpha_o+\alpha_۱ y_t+u_t \quad (۱)$$

که در آن u جمله پسماند می‌باشد. با توجه به این مدل هم تجمعی، مدل تصحیح خطا[1] برای متغیر x را نیز می‌توان به صورت زیر ارائه نمود.[2]

$$\Delta x_t=\beta_\theta+\beta_۱\Delta y_t+\beta_۲\Delta y_{t-۱}+\beta_۳\Delta x_{t-۱}\lambda+\hat{U}_{t-۱}+v_t \quad (۲)$$

که در آن $\hat{u}_{t-۱}$ جمله پسماند برآورد شده از مدل هم تجمعی با یک وقفه زمانی و $v_t$ جمله پسماند با میانگین صفر و واریانس $\sigma ۲$ می‌باشد.[3]

از رابطه (۱) می‌توان مقدار $\hat{u}_{t-۱}$ را محاسبه نمود.[4]

$$\hat{u}_{t-۱}=(x-\alpha_o-\alpha_۱ y)_{t-۱} \quad (۳)$$

با جایگزینی رابطه (۳) در رابطه (۲) خواهیم داشت.

$$\Delta x_t=\beta_o+\beta_۱\Delta y_t+\beta_۲\Delta y_{t-۱}+\beta_۳\Delta x_{t-۱}+\lambda(x-\alpha_o-\alpha_۱ y)_{t-۱}+v_t \quad (۴)$$

با قراردادن تساوی $\Delta x_t=x_t-x_{t-۱}$ و $\Delta y_t=y_t-y_{t-۱}$ و به طور مشابه برای $\Delta x_{t-۱}$ و $\Delta y_{t-۱}$، رابطه ۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_t=(\beta_o-\lambda\alpha_o)+\beta_۱ y_t+(-\beta_۱+\beta_۲-\lambda\alpha_۱)y_{t-۱}-\beta_۲ y_{t-۲}+(\beta_۳+\lambda+۱)x_{t-۱}-\beta_۳ x_{t-۲}+v_t \quad (۵)$$

حال، با استفاده از رابطه (۵) می‌توان کل تأثیرات حاصل از تغییرات موقت و دائمی $y_t$ را بر $x_t$ محاسبه کرد.

فرض کنید یک واحد افزایش (به طور موقت و تنها در زمان t) در $y_t$ ایجاد گردد. اثر آن در زمان t بر $x_t$

---

1. Error Correction Model

۲. برای اطلاع بیشتر از چگونگی تشکیل مدل هم تجمعی و مدل تصحیح خطا به Rao (1994) مراجعه شود.

۳. تعداد وقفه زمانی برای $\Delta x$ و $\Delta y$ بستگی به ماهیت متغیرها و همچنین، چگونگی توزیع جمله پسماند دارد.

۴. از رابطه شماره (۳) به بعد مقادیر برآوردشده $\alpha$ ها، $\beta$ها، v ها و $\lambda$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

برابر خواهد بود با مقدار $\beta_1$. اثبات این موضوع با استفاده از رابطه (۵) بسیار ساده خواهد بود. در این رابطه با فرض $\Delta y_t=1$ و ثابت بودن سایر مقادیر، $\Delta x_t=\beta_1 \Delta y_t$ یا $\Delta x_t=\beta_1$ خواهد بود.

برای زمان t+۱ خواهیم داشت :

$$x_{t+1}=(\beta_o-\lambda\alpha_o)+\beta_1 y_{t+1}+(-\beta_1+\beta_2-\lambda\alpha_1)y_t-\beta_2 y_{t-1}+(\beta_3+\lambda+1)x_t-\beta_3 x_{t-1}+v_t$$

با فرض $\Delta y_t=1$ ، $\Delta x_t=\beta_1$ و ثابت بودن سایر مقادیر:

$$\Delta x_{t+1}=(-\ \beta_1 \quad {}_2-\lambda\alpha_1)\Delta y_t+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_t+\beta$$

$$\Delta x_{t+1}=(-\beta_1+\beta_2-\lambda\alpha_1)+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_t$$

همچنین، برای زمان t + ۲ می‌توان رابطه (۵) را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$x_{t+2}=(\beta_o-\lambda\alpha_o)+\beta_1 y_{t+2}+(-\beta+\beta_2-\lambda\alpha_1)y_{t+1}-\beta_2 y_{t+}$$
$$(\beta_3+\lambda+1)x_{t+1}-\beta_3 x_t+v_{t+2}$$

با فرض $\Delta y_t=1$ و جایگزینی مقادیر $\Delta x_t$ و $\Delta x_{t+1}$ (سایر مقادیر ثابتند)، مقدار $\Delta x_{t+2}$ برابر خواهد بود با:

$$\Delta x_{t+2}=-\beta_2\Delta y_t+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+1}-\beta_3\Delta\lambda_t$$

$$\Delta x_{t+2}=-\beta_2+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+1}-\beta_3\Delta x_t$$

با بکارگیری شیوهٔ فوق می‌توان مقادیر $\Delta x_{t+3}$ ,....,$\Delta x_{t+n}$ را محاسبه کرد. خلاصه نتایج حاصله در جدول زیر آمده است:

جدول شماره -۱. چگونگی تأثیر تغییرات موقت $y_t$ بر x در طول زمان

| زمان | $\Delta y$ | $\Delta x$ |
| --- | --- | --- |
| t | ۱ | $\beta_1$ |
| t+۱ | ۰ | $(-\beta_1+\beta_2-\lambda\alpha_1)+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_t$ |
| t+۲ | ۰ | $-\beta_2+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+1}-\beta_3\Delta x_t$ |
| t+۳ | ۰ | $(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+2}-\beta_3\Delta x_{t+1}$ |
| t+۴ | ۰ | $(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+3}-\beta_3\Delta x_{t+2}$ |
| ⋮<br>t+n | ⋮<br>۰ | ⋮<br>$(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+n-1}-\beta_3\Delta x_{t+n-2}$ |

حالت دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت که در آن، یک واحد افزایش در $Y_t$ به صورت دائمی ایجاد گردد. در آن صورت اثر آن در زمان t برابر با $\beta_1$ خواهد بود. اما، در زمانهای t+۱ و t+۲ و... تأثیر متفاوتی بر $x_t$ ایجاد خواهد شد.

برای زمان t+۱ با استفاده از رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\Delta x_{t+1}=\beta_1\Delta y_{t+1}+(-\beta_1+\beta_2-\lambda\alpha_1)\Delta y_t+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_t$$

با جایگزینی $\Delta y_{t+1}=\Delta y_t=1$ مقدار $\Delta x_{t+1}$ برابر خواهد بود:

$$\Delta x_{t+1}=\beta_1+\quad {}_1+\beta_2-\lambda\alpha_1)+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_t(-\beta$$

همچنین، برای زمان t+۲ با استفاده از رابطه (۷) نیز خواهیم داشت:

$$\Delta x_{t+2}=\beta_1\Delta y_{t+2}+(-\beta_1+\beta\ \ -\lambda\alpha_1)\Delta y_{t+2}-\beta_2\Delta y_t+(\beta_3+\lambda+1)\Delta x_{t+1}-\beta_3\Delta x_t$$

نتایج فوق را می‌توان این بار نیز در جدولی خلاصه نمود.

**جدول شماره ۲. چگونگی تأثیر تغییرات دائمی $Y_t$ بر x در طول زمان**

| زمان | $\Delta y$ | $\Delta x$ |
|---|---|---|
| t | ۱ | $\beta_{۱}$ |
| t+۱ | ۱ | $(\beta_{۲}-\lambda\alpha_{۱})+(\beta_{۲}+\lambda+۱)\Delta x_t$ |
| t+۲ | ۱ | $(\beta_{۳}+\lambda+۱)\Delta x_{t+۱}-\beta_{۳}\Delta x_t$ |
| t+۳ | ۱ | $-\lambda\alpha_{۱}+(\beta_{۳}+\lambda+۱)\Delta x_{t+۲}-\beta_{۳}\Delta x_{t+۱}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| t+n | ۰ | $-\lambda\alpha_{۱}+(\beta_{۳}+\lambda+۱)\Delta x_{t+n-۱}-\beta_{۳}\Delta x_{t+n-۲}$ |

در ارتباط به مقادیر فوق، توجه به این نکته ضروری است که تغییرات x در طول زمان دقیقاً به چگونگی مدل هم تجمعی و مدل تصحیح خطای مربوط به آن مرتبط می‌باشد. لذا، با ایجاد تغییراتی در مدل‌های مذکور مقادیر تغییرات $x_t$ ناشی از تغییرات موقت و دائمی $y_t$ در طول زمان متفاوت خواهد بود. از این رو آنچه که در این مقاله حائز اهمیت می‌باشد شیوهٔ برآورد می‌باشد نه مقادیر آن.

با توجه به آنچه گذشت می‌توان $\Delta x$ (کل تأثیر بر $x_t$) را به صورت زیر به دست آورد:

$$\Delta x=\Delta x_t+\Delta x_{t+۱}+\Delta x_{t+۲}+\ldots\ldots+\Delta x_{t+n}$$

## منابع

1. Holden, K. & Thompson, J. "*Co - Integration:An Introductory Survery*". British Review of Economic Issues. Vol. 14, No. 33, (June 1992)

2. Rao, B. "Cointegration for the Applied Economist". The Macmillan Press LTD. (1994).