

فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران / سال هفتم / شماره ۲۵ / زمستان ۱۳۸۴ / صفحات ۴۷-۶۴

بررسی وجود فرایند آشوبی در شاخص بازدهی کل قیمت سهام بازار بورس تهران

دکتر سعید مشیری*

حبیب مروت**

تاریخ ارسال: ۱۳۸۳/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۴/۷/۱۲

چکیده^۱

سریهای زمانی بسیار پیچیده مانند قیمت‌های بازارهای سهام معمولاً تصادفی و در نتیجه، تغییرات آنها غیر قابل پیش‌بینی فرض می‌شود، در حالی که ممکن است این سریها محصول یک فرایند غیرخطی پویای معین (آشوبی) و در نتیجه قابل پیش‌بینی باشند.

در این تحقیق، شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی قیمت سهام بازار بورس تهران (TEPIX) در دوره زمانی ابتدای سال ۱۳۷۷ تا پایان ۱۳۸۲ مورد آزمون قرار گرفته است تا مشخص شود که آیا این شاخصها از فرایند تصادفی پیروی می‌کنند یا متأثر از یک فرایند معین (آشوبی) هستند. به این منظور، از آزمونهای BDS، شبکه عصبی و بزرگترین نمای لیاپانوف استفاده شده است.

آزمونهای BDS و شبکه عصبی وجود فرایند غیرخطی در پسماندهای مدل‌های ARMA برازش شده بر این شاخصها را نشان دادند؛ ولی این آزمونها وجود فرایند غیرخطی در پسماندهای مدل GARCH را تأیید نکردند.

* دانشیار دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی

e-mail: smoshiri@mun.ca

** کارشناس ارشد اقتصاد، دانش‌آموخته دانشگاه علامه طباطبائی

e-mail: habib_morovat@yahoo.com

۱. نویسندگان از نظرات و پیشنهادهای مفید دکتر جاوید بهرامی، دکتر تیمور محمدی، و داوران محترم فصلنامه بهره برده‌اند که در اینجا از ایشان قدردانی می‌شود. بدیهی است که مسئولیت هرگونه اشتباه به عهده نویسندگان است.

نتایج آزمون بزرگترین نماهای لیاپانوف که آزمون مستقیمی برای فرایندهای غیرخطی معین است دلالت بر وجود آشوب در شاخصهای بازدهی قیمت کل سهام بازار بورس تهران دارد. این نتیجه دلالت بر ناکارایی بازار سهام و در نتیجه، قابلیت پیش‌بینی کوتاه‌مدت آن دارد که می‌تواند یک رهنمود سیاستی مبنی بر شناخت عوامل ناکارایی بازار مانند شفاف نبودن جریان اطلاعات و اقدام در جهت رفع آنها داشته باشد. همچنین، برای مدل‌سازی و به ویژه پیش‌بینی شاخص قیمت‌های سهام، استفاده از مدل‌های غیرخطی به جای مدل‌های معمول خطی مناسب‌تر است.

طبقه‌بندی JEL : C40 ، G0 .

واژگان کلیدی: آشوب، فرایند غیرخطی پویای معین، آزمون BDS ، شبکه عصبی، نمای لیاپانوف، پیش‌بینی پذیری، شاخص کل قیمت سهام بازار بورس تهران (TEPIX)

مقدمه

با رشد روز افزون بازارهای سرمایه و سهام در دهه‌های اخیر، این بازارها نقش اساسی در اقتصاد کشورهای مختلف ایفا نموده، به طوری که تحرک و رونق بورس اوراق بهادار و بازار سهام به عنوان یکی از معیارهای سلامت و پویایی اقتصاد کشورها شناخته می‌شود. بازارهای سهام به عنوان یکی از ارکان اصلی بازار سرمایه، پس‌اندازها و منابع مالی محدود موجود در جامعه را در سریع‌ترین زمان و با هزینه معاملات کمی به مسیر سرمایه‌گذاری هدایت می‌کنند. بنابراین این بازارها، نقش بسیار مهمی در تخصیص بهینه منابع مالی داخلی و خارجی ایفا می‌نمایند. در ایران، با اینکه بیش از سه دهه از آغاز فعالیت بورس اوراق بهادار تهران می‌گذرد این بازار نتوانسته در بین بازارهای مالی دنیا جایگاه معتبری داشته باشد. در سالهای اخیر، سیاست‌گذاران اقتصادی کشور در جهت اهداف برنامه‌های توسعه اقتصادی و سیاست تعدیل، به خصوصی‌سازی و گسترش فعالیت بازار سهام که یکی از ملزومات خصوصی‌سازی است علاقه‌مند شده، درصدد گسترش فعالیت بورس از لحاظ مکانی (ایجاد بازارهای جدید در شهرهای دیگر) و هم از لحاظ حجم و تنوع فعالیتها برآمده‌اند. با گسترش بازارهای مالی، سهامداران، محققان و سیاست‌گذاران برای تصمیم‌گیری بهینه و کاهش هزینه ریسک نیازمند آشنایی با مدل‌های پیش‌بینی و استفاده از آنها هستند. در این تحقیق فرایند حاکم بر شاخص قیمت بازار سهام و مشکلات مربوط به پیش‌بینی آن بررسی شده است.

برای سالهای متعددی این سؤال که، تا چه اندازه می‌توان از قیمت‌های قبلی بازار سهام برای پیش‌بینی معنی‌دار (معتبر) قیمت‌های آتی استفاده کرد، یکی از مباحث اصلی و رایج در محافل علمی و تجاری بوده است. برای پاسخ‌گویی به این سؤال مدل‌ها و فرضیه‌های مختلفی ارائه شده‌اند که می‌توان آنها را در چهار گروه کلی: مدل‌های فنی^۱، مدل‌های ساختاری^۲، مدل‌های گام تصادفی^۳ و مدل‌های آشوبی^۴ تقسیم‌بندی کرد. از مدل‌های فوق، مدل گام تصادفی تا دهه‌های اخیر اهمیت و اعتبار بیشتری داشته است. این نظریه فرایند حاکم بر روند قیمت‌ها را تصادفی دانسته و بنابراین تغییرات آنها را غیر قابل پیش‌بینی می‌داند. بر اساس نظریه گام تصادفی، فرضیه بازارهای کارا^۵ برای آزمون آن مطرح شد که طبق آن بازارهایی که از فرایند گام تصادفی پیروی نمایند کارا هستند. (جنانی، ۱۳۸۱).

برای آزمون فرضیه بازارهای کارا در بازارهای سهام از آزمون‌های آماری مختلفی که غالباً خطی هستند استفاده شده است. اما اخیراً آزمون‌های آشوبی که مبتنی بر نظریه آشوب هستند، برای بررسی وجود فرایندهای غیرخطی معین و آشوبی در سری‌های زمانی پیچیده ارائه شده‌اند. طبق نظریه آشوب،

1. technical model
2. structural model
3. random walks model
4. chaotic model
5. efficient market hypothesis

شاخصهای سهام که دارای ظاهری کاملاً تصادفی (کارآی ضعیف) هستند، ممکن است از فرایندهای غیر خطی معین تبعیت کرده (ناکارآ باشند) و در نتیجه، نتوان آنها را با استفاده از آزمونهای معمولی از سریهای تصادفی تمییز داد.

مطالعات متعددی وجود آشوب در شاخصهای بازارهای سهام در کشورهای مختلف را بررسی کرده‌اند. برخی از این مطالعات وجود فرایند آشوبی در قیمت‌های سهام، ولی برخی دیگر وجود فرایند غیرخطی (نه لزوماً آشوبی) را تأیید کرده‌اند. آزمونهای مهم آشوبی عبارتند از آزمون BDS، آزمون نمای لیاپونوف و آزمون شبکه‌های عصبی. در تحقیق حاضر، علاوه بر استفاده از آزمونهای BDS و نمای لیاپونوف، که قبلاً نیز در ایران استفاده شده‌اند، از آزمون شبکه‌های عصبی نیز استفاده شده است. همچنین، علاوه بر استفاده از داده‌های سریهای زمانی روزانه از ابتدای سال ۱۳۷۷ تا پایان سال ۱۳۸۲، در این تحقیق از داده‌های هفتگی نیز استفاده شده است. در واقع این مقاله، پژوهشهای قبل در این زمینه در ایران را با معرفی یک آزمون جدید و داده‌های متفاوت گسترش می‌دهد.

در ادامه پس از مروری بر ادبیات تجربی در بخش یک، نظریه آشوب و آزمونهای مورد استفاده در بخش دو توضیح داده می‌شوند. پس از توصیف داده‌های مورد استفاده در بخش سه، نتایج آزمونهای آشوبی در بخش چهار ارائه شده و در نهایت، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش پنج بیان خواهد شد.

۱. مروری بر ادبیات تجربی

مطالعات مختلفی در سطح جهان برای بررسی وجود فرایند آشوبی در بازارهای مالی و پولی انجام شده که در اینجا به برخی از آنها به اختصار اشاره می‌شود.

شینکمن و لی‌بارون (۱۹۸۹)^۱ با استفاده از آزمون BDS به بررسی وجود آشوب در شاخص وزنی بازدهی هفتگی بازار سهام ایالات متحده پرداختند. آنها شواهد نسبتاً قوی از وجود فرایند غیرخطی در این شاخص یافتند، اما نتوانستند وجود آشوب در آنها را نشان دهند. هسیه (۱۹۹۱)^۲ به بررسی وجود فرایند غیرخطی و آشوب در شاخص بازدهیهای هفتگی امریکا با استفاده از داده‌های مرکز تحقیق در قیمت‌های سهام (CRSP) از ۱۹۶۳ تا ۱۹۸۷ پرداخت. وی از آزمونهای BDS و بُعد همبستگی استفاده کرد و نشان داد که این شاخص از فرایند گام تصادفی تبعیت نکرده، بلکه از فرایند نوع GARCH تبعیت می‌کند. آبیانکر، کولپند و ونگ (۱۹۹۵)^۳ وجود آشوب در شاخص سهام انگلستان (FTSE 100^۴) را با استفاده از آزمونهای دوطیفی، BDS و نمای لیاپونوف بررسی کردند. آنها با استفاده از داده‌های

1. Scheinkman & Lebaron (1989)
2. Hsieh (1991)
3. Abhyankar, Copeland & Wong (1995)
4. Financial Times Stock Exchange

شش ماه اول سال ۱۹۹۳ شواهد قوی از وجود فرایند غیرخطی در آنها یافته، ولی نتوانستند وجود فرایند آشوبی در آنها را نشان دهند. ون (۱۹۹۶)^۱ با استفاده از آزمونهای نمای لیپانوف و بُعد همبستگی به بررسی وجود آشوب پیوسته و گسسته در شاخصهای هفتگی و روزانه S&P 500^۲ پرداخت. وی با استفاده از این آزمونها وجود آشوب در این شاخص را نشان داد و نتیجه گرفت که احتمال وجود آشوب پیوسته از آشوب گسسته بیشتر است. آبیانکر، کولپند و ونگ (۱۹۹۷) وجود وابستگیهای غیرخطی و آشوبی را در چهار شاخص مهم بازدهی سهام در جهان یعنی شاخص سهام انگلیس (FTSE 100)، شاخص سهام امریکا (S & P 500)، شاخص سهام آلمان (DAX)^۳ و شاخص سهام ژاپن (Nikkei 225) را آزمون کردند. آنها از آزمونهای BDS و نمای لیپانوف و داده‌های مربوط به بازدهیهای ۱، ۵ و ۱۵ دقیقه‌ای از اول ماه سپتامبر تا ۳ نوامبر ۱۹۹۱ استفاده کردند و هرچند وجود فرایند غیرخطی در این سریها را نشان دادند، ولی شواهدی برای وجود آشوب با بعد پایین در آنها نیافتند (Woods, 1997). شینتانی و لینتون (۲۰۰۲)^۴ با استفاده از آزمون نمای لیپانوف فرضیه وجود آشوب در شاخص روزانه میانگین صنعتی دایو جونز (DJIA)^۵ از سال ۱۹۲۸ تا ۲۰۰۰ با تعداد ۱۸۴۹۰ مشاهده را آزمودند و نتوانستند وجود آشوب در این سری را نشان دهند. اسمال و تی‌سه (۲۰۰۳)^۶ با به‌کارگیری آزمونهای غیرخطی و عددی، وجود آشوب در بازدهی روزانه سه شاخص مالی میانگین صنعتی دایو جونز (DJIA)، طلای لندن و نرخ ارز یورو/دلار را با استفاده از ۱۰۰ تا ۲۰۰۰۰ مشاهده بررسی و نشان دادند که این سه شاخص دارای فرایند غیر خطی معین هستند.

در ایران تعداد مطالعات بسیار محدودی در این زمینه انجام شده است. به عنوان نمونه، خالوزاده (۱۳۷۷) وجود فرایند آشوبی در بازدهی لگاریتمی سهام شرکت شهد ایران را با استفاده از داده‌های روزانه این شاخص از تاریخ ۱۳۷۳/۶/۲۱ تا ۱۳۷۶/۳/۳ بررسی کرد. وی با استفاده از آزمونهای نمای لیپانوف و بُعد همبستگی، وجود آشوب ضعیف در این سری را نشان داد. سلامی (۱۳۸۱) وجود فرایند آشوبی در بازدهیهای شاخص کل قیمت سهام تهران (TEPIX) را با استفاده از داده‌های روزانه این شاخص از تاریخ ۱۳۷۵/۱/۵ تا ۱۳۸۰/۹/۱۴ بررسی کرد. وی با استفاده از آزمونهای BDS، نمای لیپانوف و آنتروپی کولموگروف با درجه اطمینان بالایی وجود آشوب در این سری و همچنین پسماندهای مدل (۲,۱) GARCH را نشان داد. مشیری و فروتن (۱۳۸۳) نیز آشوبی بودن فرایند

1. Wen (1996)
2. Standard & Poor
3. Deutscher Aktienindex
4. Shintani & Linton (2002)
5. Dow Jones Industrial Average
6. Small & Tse (2003)

حاکم بر قیمت‌های جهانی نفت خام در بازارهای مالی را تأیید کرده و نشان دادند که مدل شبکه‌های عصبی پیش‌بینی بهتری نسبت به سایر مدلها از چنین فرایندی ارائه می‌دهد. در مطالعه حاضر، ما علاوه بر انجام آزمونهای BDS و نمای لیاپونوف، از آزمون شبکه‌های عصبی نیز استفاده کرده‌ایم. همچنین برای دستیابی به نتایج قابل اطمینان‌تر، کلیه آزمونها با دو مجموعه سربهای زمانی روزانه و هفتگی انجام و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۲. نظریه آشوب

نظریه آشوب، بخشی از مبحث گسترده‌تر علم دینامیک^۱ است. علم دینامیک رفتار یک سیستم که موقعیت آن طی زمان تغییر می‌کند را مطالعه می‌کند. این سیستم می‌تواند آب و هوای زمین، حرکت یک شهاب سنگ، حرکت پاندول ساعت و یا نوسانات قیمت در بازارهای مالی مانند بورس باشد. بنابراین، آشوب موضوعی جالب برای رشته‌های گوناگون علمی است و همراه با علوم طبیعی مانند فیزیک، اکولوژی و هواشناسی در ادبیات علم اقتصاد نیز وارد شده است (Tofallis, 1995). فرایند آشوبی یک فرایند غیرخطی، پویا و معین^۲ است که تصادفی^۳ به نظر می‌رسد. در واقع نظریه آشوب، مدعی است که هر چند مشاهدات روزمره ما از وقایع گوناگون تصادفی به نظر می‌رسند، اما از یک نظم و قطعیت خاص تبعیت می‌کنند، بنابراین در صورت کشف فرایند حاکم بر آن امور، قابل پیش‌بینی هستند (مشیری و فروتن، ۱۳۸۳). نظریه آشوب در بازار سهام در مقابل نظریه کارایی بازار سهام مطرح شد و ادعا کرد که فرایند حاکم بر روند قیمت‌های سهام، علی‌رغم پیچیدگی بسیار زیاد آن، تصادفی نبوده، بلکه ممکن است از فرایند معین آشوبی پیروی کند. این ادعا در صورت درستی آن، دلالت بر این دارد که امکان پیش‌بینی قیمت‌های سهام با کشف فرایند حاکم بر روند قیمت‌ها امکان‌پذیر است.^۴

۲-۱. آزمونهای کشف آشوب

در ادبیات مربوط به آشوب، آزمونهای متعددی برای تشخیص فرایندهای آشوبی از فرایندهای تصادفی مطرح شده‌اند. برخی از این آزمونها فرضیه تصادفی بودن یک فرایند را آزمون می‌کنند، ولی برخی دیگر یکی از خصوصیات فرایندهای آشوبی را آزمون می‌کنند. گروه اول را می‌توان به عنوان آزمونهای

1. dynamics
2. deterministic
3. random

۴. برای آشنایی بیشتر با جزئیات مباحث مربوط به نظریه آشوب و کاربردهای آن در اقتصاد به Bamoul and Benhabaib (1989) و مشیری (۱۳۸۲) مراجعه کنید.

غیرمستقیم و گروه دوم را آزمونهای مستقیم برای کشف فرایندهای آشوبی نام برد. در آزمونهای غیرمستقیم معمولاً تصادفی بودن پسماندهای یک رگرسیون خطی و یا غیرخطی آزمون می‌شود. در نتیجه، رد فرضیه تصادفی بودن پسماندها لزوماً به معنای آشوبی بودن یک فرایند نیست، زیرا ممکن است این مسئله به علت نوع تصریح مدل خطی و یا غیرخطی مورد استفاده در آزمون باشد. در این تحقیق از سه آزمون اصلی BDS، شبکه عصبی، و توان لیاپونوف استفاده شده است که در زیر به اختصار به معرفی آنها می‌پردازیم.

۱-۲-۱. آزمون BDS

این روش را براک، دچرت و شینکمن در سال ۱۹۸۷ به منظور آزمون تصادفی بودن فرایند مولد یک سری زمانی مطرح کردند. این آزمون از تابع همبستگی (انتگرال همبستگی)^۱ به عنوان آماره آزمون استفاده می‌کند. در آزمون BDS، با فرض اینکه داده‌ها به طور مستقل و مشابه^۲ (IID) توزیع شده‌اند، انتگرال همبستگی دارای توزیع مجانبی مشخص است. بنابراین، می‌توان از این آزمون به عنوان یک آزمون آماری در جهت اینکه آیا فرایند ایجادکننده سری زمانی مستقل و مشابه است یا از وابستگیهای خطی یا غیرخطی تبعیت می‌کند استفاده کرد.^۳

این آزمون می‌تواند برای آزمون غیرخطی بودن فرایند مولد داده‌ها نیز استفاده شود. برای این منظور می‌توان ابتدا، فرایند ARMA را جهت رفع ساختار خطی بر داده‌ها برازش کرد و سپس، آزمون BDS را بر روی پسماندهای حاصل از فرایند ARMA به کار برد. اگر همه وابستگیهای خطی به وسیله فرایند ARMA از داده‌ها رفع شده باشد، وجود وابستگیهای پسماندها ناشی از غیرخطی بودن فرایند مولد داده‌ها خواهد بود. بنابراین اگر فرض صفر در این آزمون، یعنی تصادفی بودن فرایند مولد پسماندهای مدل ARMA، رد شود، به معنی وجود فرایند غیرخطی (نه الزاماً آشوبی) در داده‌ها است. همان‌طور که گفته شد، آماره آزمون BDS تبدیلی از انتگرال همبستگی است. انتگرال همبستگی احتمال اینکه فاصله دو نقطه از دو مسیر مختلف در فضای فازی کمتر از ϵ باشد را اندازه می‌گیرد، با افزایش فاصله مورد نظر یعنی ϵ این احتمال نیز مطابق با بُعد فراکتالی فضای فازی تغییر می‌کند. برای محاسبه انتگرال همبستگی ابتدا باید یک مجموعه m حافظه‌ای از داده‌ها را با استفاده از تئوری تیکن^۴ تشکیل داد.

انتگرال همبستگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

1. correlation integral
2. independent & identical distributed
3. S. Barnett (1996), Dechert (1996)
4. Tackn Theory

$$C_m(\varepsilon, T) = \frac{1}{T_m} \sum_{t,s=1}^T H(\varepsilon - |x_t - x_s|), \quad t \neq s \quad (1)$$

در این رابطه H تابع هوی‌ساید^۱ بوده که تعداد نقاطی را که فاصله آنها از ε کمتر است محاسبه می‌کند.

T_m تعداد مجموعه m حافظه‌ای که از نمونه‌ای به حجم T ساخته می‌شود را نشان می‌دهد:

$$T_m = T - m + 1$$

ε حداکثر فاصله دو نقطه را که در محاسبه انتگرال همبستگی استفاده می‌شود نشان می‌دهد و $C_m(\varepsilon, T)$ انتگرال همبستگی نمونه‌ای به حجم T و m بعد محاط است. برآک و دیگران نشان دادند که اگر یک متغیر IID باشد، آماره BDS توزیع مجانبی نرمال استاندارد خواهد داشت که می‌توان آن را از طریق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W = \frac{T_m^{1/2} [C_m(\varepsilon, T) - C_m^m(\varepsilon)]}{\delta_m(\varepsilon, T)} \approx N(0, 1) \quad (2)$$

که در این معادله، W آماره BDS و $\delta_m(\varepsilon, T)$ انحراف معیار عبارت داخل علامت [] است. بنابراین، اگر آماره W که برای پسماندهای مدل ARIMA محاسبه شده است به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان فرض تصادفی بودن پسماندها را در مقابل تبعیت آنها از فرایند غیرخطی رد کرد.

۲-۱-۲. آزمون شبکه عصبی^۲

آزمون شبکه عصبی وایت^۳ (۱۹۸۹) برای یافتن فرایند غیرخطی استفاده می‌شود^۴ و^۵ این آزمون بر این مبنا استوار است که یک سری زمانی مشاهده شده می‌تواند به بخش خطی $X_t'\theta$ و بخش غیرخطی $\sum_{j=1}^q \beta_j \psi(X_t' \gamma_j)$ که از یک مدل شبکه عصبی حاصل شده است تجزیه شود. بنابراین می‌توان نوشت:

1. Heviside function
2. Neural-Network Test
3. White
4. Guarda, Salmon, M. (1996)
5. J. A. Jungeiligés (1996)

$$f(X_t, \theta) = X_t' \varphi + \sum_{j=1}^q \beta_j \psi(X_t' \gamma_j) \quad (3)$$

که در آن، β, φ و γ پارامترهای مدل، ε جمله خطا و ψ تابع انتقال غیرخطی (معمولاً سیگموئید) است. عبارت دوم که شامل دو مجموع پارامترهای φ و γ به صورت حاصل ضرب است از نظر آماری غیرخطی محسوب می‌شود. بنابراین، اگر ضریب این عبارت از لحاظ آماری صفر باشد، معادله صرفاً شامل عبارت خطی اول بوده که به صورت یک رگرسیون معمولی در خواهد آمد. بنابراین، آزمون شبکه عصبی فرضیه $\beta_j = 0, j = 1, \dots, q$ برای مقادیر مشخص q (تعداد نرونهای لایه میانی) و $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_q)$ را آزمون می‌کند.

آزمون شبکه عصبی به ترتیب زیر انجام می‌شود:

۱- y_t را به صورت خطی بر روی X_t برآورد کرده، $y_t = X_t' \varphi + e_t$ ، و پسماندهای برآورد شده آن را (\hat{e}_t) ذخیره می‌کنیم.

۲- بردار γ_j را مستقل از X_t و y_t انتخاب کرده و بردارهای $\Psi(X_t' \gamma_j)$ را تشکیل داده و سپس e_t را بر روی X_t و Ψ_t برآورد کرده، $\hat{e}_t = X_t' \varphi + \Psi_t' \lambda + \varepsilon_t$ و پسماندهای برآورد شده، $(\hat{\varepsilon}_t)$ را ذخیره می‌کنیم.

۳- فرضیه صفر را با آماره NR^2 آزمون می‌کنیم. N تعداد مشاهدات و R^2 ضریب تعیین همبستگی رگرسیون بند (۲) است.

۴- تحت فرضیه صفر خطی بودن فرایند در میانگین، آزمون شبکه عصبی به طور مجانبی از توزیع $\chi^2(q)$ تبعیت می‌کند که می‌توان آن را با ضریب لاگرانژ بیان کرد.

۳-۱-۲. آزمون نمای لیاپونوف^۱

یکی از ویژگی‌های اصلی فرایندهای آشوبی حساسیت شدید آنها نسبت به شرایط اولیه است، به این معنی که یک تغییر بسیار جزئی در شرایط اولیه یک فرایند آشوبی آن را دچار تغییرات بسیار اساسی می‌کند، به نحوی که یک فرایند کاملاً مستقل و مجزایی به نظر می‌رسد. مهمترین وسیله برای تشخیص وجود حساسیت نسبت به شرایط اولیه در یک سیستم پویا استفاده از نماهای ویژه لیاپونوف است که لیاپونوف ریاضی‌دان روسی در آغاز قرن بیستم (۱۹۰۷) مطرح کرد. روش نمای لیاپونوف به علت اینکه

1. Lyapunov Exponent Test

تعریف کمی دقیقی از ویژگی مهم حساسیت زیاد به شرایط اولیه (و بنابراین وجود آشوب) را می‌دهد، اهمیت زیادی در کشف فرایندهای آشوبی دارد.

نمای لیاپونوف میانگین نرخ واگرایی یا همگرایی نمایی مسیرهای زمانی ای که شرایط اولیه‌شان اختلاف اندکی با هم دارند را اندازه‌گیری می‌کند. نمای لیاپونوف مثبت بیانگر واگرایی نمایی مسیرهای زمانی، حساسیت شدید نسبت به شرایط اولیه و بنابراین، وجود آشوب است. نمای لیاپونوف منفی نشانگر همگرایی نمایی مسیرهای زمانی و نمای لیاپونوف صفر بیانگر آن است که مسیرها واگرایی یا همگرایی ندارند. باید توجه کرد که اگر حداقل یکی از نماهای لیاپونوف یک سیستم پویا مثبت باشد، نشان دهنده وجود آشوب در آن سیستم است. بنابراین معمولاً، بزرگترین نمای لیاپونوف محاسبه می‌گردد که اگر مثبت باشد، نشان‌دهنده وجود آشوب در سیستم است.

برای محاسبه بزرگترین نمای لیاپونوف دو روش وجود دارد: (۱) روش مستقیم^۱ (۲) روش ژاکوبین^۲ از روش مستقیم هنگامی که معادلات حرکت سیستم (که از حل معادلات تفاضلی یا دیفرانسیل مربوط حاصل می‌شوند)، به طور صریح مشخص باشد استفاده می‌شود، اما چون معمولاً معادلات حرکت سیستمهای اقتصادی مشخص نیست، از روش دوم برای محاسبه نمای لیاپونوف این سیستمها استفاده می‌شود. روش ژاکوبین را نیچکا و دیگران^۳ (۱۹۹۲) مطرح کردند؛ آنها با استفاده از نظریه تیکن معادلات مربوط به سیستمهای آشوبی را تشکیل داده و با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی این مدلها را برآورد، و با استفاده از آن بزرگترین نمای لیاپونوف را از رابطه زیر برآورد کردند:

$$\lambda_{\max} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \log |V_1(M)| \quad (4)$$

در این رابطه، $V_1(M)$ بزرگترین مقدار مشخصه ماتریس $P_M^T P_M$ و J_1 و $P_M = J_M J_{M-1} \dots J_1$ ، $J_t = (DF)_{X_t}$ و $(DF^M)_{X_t}$ ماتریس ژاکوبین تابع ارزیابی شده در X_t است.

۳. داده‌ها

در این تحقیق برای بررسی وجود آشوب در بازار بورس اوراق بهادار تهران از شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی کل قیمت سهام تهران (TEPIX) در بازه زمانی اول ۱۳۷۷ تا پایان ۱۳۸۲ استفاده می‌شود. بنابراین، حجم نمونه‌های مورد استفاده در تحقیق ۱۴۵۲ مشاهده برای شاخص روزانه و ۳۰۳ مشاهده برای شاخص هفتگی است.

1. direct method
2. Jacobian method
3. Nychka & et al (1992)

شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی سهام تهران به صورت درصد تغییر در شاخصهای قیمت تعریف و محاسبه شده‌اند.

۴. نتایج آزمونهای آشوبی

۴-۱. آزمون BDS

آزمون BDS با سه نوع داده انجام شده است. در نوع اول، شاخص قیمت کل روزانه و هفتگی سهام تهران، در نوع دوم، پسماندهای مدل ARMA، و در نوع سوم پسماندهای مدل GARCH آزمون شدند. آزمون نوع اول تصادفی بودن فرایند مولد شاخص قیمت را ارزیابی می‌کند، در حالی که آزمونهای نوع دوم و سوم تصادفی بودن پسماندهای مدل‌های خطی و غیرخطی را بررسی می‌کنند که به‌عنوان آزمون برای خطی یا غیرخطی بودن فرایند مولد داده‌ها استفاده خواهد شد. نتایج این آزمون بر روی داده‌های خام شاخص بازدهی روزانه و هفتگی TEPIX به‌ترتیب در جدول (۱) و جدول (۲) ارائه شده است.

جدول ۱- نتایج آزمون BDS بر روی داده‌های خام شاخص بازدهی روزانه TEPIX

۶	۵	۴	۳	۲	m / ϵ
۵۲/۶۱	۴۱/۸۲	۳۴	۲۸/۶۹	۲۳/۷۱	$0.15 \times sd$
۲۸/۱۹	۲۶/۵۸	۲۵/۴۳	۲۴/۴۶	۲۳/۴۳	$1 \times sd$
۲۲/۶	۲۲/۶۳	۲۲/۸۱	۲۳/۰۸	۲۳/۳۱	$1.5 \times sd$
۱۹/۷۶	۲۰/۲۱	۲۰/۷۹	۲۱/۴۷	۲۱/۶۲	$2 \times sd$

جدول ۲- نتایج آزمون BDS بر روی داده‌های خام شاخص هفتگی TEPIX

۶	۵	۴	۳	۲	m / ϵ
۱۴/۵	۱۱/۴۶	۹/۶	۸/۳۵	۷/۰۷	$0.15 \times sd$
۹/۹۹	۹/۰۵	۸/۰۴	۷/۲۴	۵/۷۹	$1 \times sd$
۸/۸۵	۸/۲۷	۷/۳۹	۶/۹۸	۵/۷۵	$1.5 \times sd$
۸/۵۷	۸/۳۶	۷/۸	۸/۰۱	۶/۹۵	$2 \times sd$

در این جدول m بُعد محاط، ϵ حداکثر فاصله بین دو نقطه در فضای فازی و sd انحراف معیار نمونه است که مقدار این شاخص برای شاخص بازدهی روزانه برابر 0.05 و برای شاخص هفتگی برابر 0.15 است.

همان‌طور که نتایج آزمون برای بُدهای مختلف نشان می‌دهد، فرضیهٔ صفر مبنی بر توزیع معادل و مستقل بودن^۱ (IID) فرایند مولد داده‌های روزانه و هفتگی شاخص حَتّی در سطح ۱٪ نیز رد می‌شود (آمارهٔ توزیع نرمال استاندارد در سطح ۱٪ برابر ۲/۵۶ است). بنابراین، فرایند مولد داده‌ها از فرایند خطی یا غیرخطی تبعیت می‌کند.

برای انجام آزمون BDS با نوع دوم داده‌ها، فرایند خطی موجود در داده‌ها به وسیلهٔ مدل ARMA خارج و سپس، آزمون BDS بر پسماندهای این مدل انجام می‌شود.

برای برازش مدل ARMA ابتدا، مانایی سریها با استفاده از آزمون دیکی-فولر تعمیم یافته (ADF) و نمودارهای خودهمبستگی (AC) و خودهمبستگی جزئی (PAC) بررسی شد. برای آزمون دیکی-فولر تعمیم یافته وقفه‌های مناسب با استفاده از معیار آکائیک (AIC) تعیین شد. آزمونهای فوق وجود ریشهٔ واحد در سریها را در سطح ۱٪ تأیید نکردند. سپس، برای برازش مدل $ARMA(p,q)$ ، مرتبه‌های خودرگرسیون (AR) و میانگین متحرک (MA) با استفاده از نمودارهای AC و PAC تعیین شدند. مدل $ARMA(1,2)$ برای رفع فرایند خطی از سری زمانی شاخص بازدهی روزانهٔ سهام و فرایند $ARMA(1,1)$ برای رفع فرایند خطی از سری زمانی شاخص بازدهی هفتگی سهام برآورد شد. برای مطمئن شدن از مناسب بودن مدل برازش شده، مانایی پسماندهای مدل فوق با استفاده از آزمون دیکی-فولر تعمیم یافته بررسی شد، این آزمون عدم وجود ریشهٔ واحد در پسماندهای مدلها فوق و در نتیجه، مانایی آنها را نشان داد. در آخرین مرحله برای بررسی وجود فرایند غیرخطی در پسماندهای مدلها فوق، از آزمون BDS استفاده شد. نتایج این آزمونها برای شاخص روزانه و هفتگی به ترتیب در جدول (۳) و (۴) آمده است.

جدول-۳. نتایج آزمون BDS بر پسماندهای مدل ARMA برازش شده بر شاخص بازدهی روزانه TEPIX

ε	m				
	۶	۵	۴	۳	۲
$0.15 \times sd$	۳۴/۶۹	۲۹/۰۶	۲۴/۳۳	۲۰/۷۸	۱۷/۴۷
$1 \times sd$	۲۲/۵۵	۲۱/۳۳	۲۰/۱۷	۱۹/۰۴	۱۷/۷۵
$1.5 \times sd$	۱۹/۳۶	۱۹/۰۷	۱۸/۷۴	۱۸/۴۶	۱۷/۶۲
$2 \times sd$	۱۸/۵	۱۸/۶۷	۱۸/۹	۱۸/۹۸	۱۷/۲۸

1. identically and independently distributed

جدول ۴- نتایج آزمون BDS بر پسماندهای مدل ARMA برازش شده بر شاخص بازدهی هفتگی TEPIX*

۶	۵	۴	۳	۲	m ε
۱۴/۰۶	۱۱/۲۹	۹/۵۹	۸/۰۹	۶/۹۶	$۰/۵ \times sd$
۱۱/۴۶	۱۰/۰۶	۸/۸۵	۷/۹۶	۶/۸۹	$۱ \times sd$
۱۰/۱۳	۹/۵۷	۸/۸۴	۸/۶۲	۸/۱۷	$۱/۵ \times sd$
۹/۲۳	۹/۱۶	۹/۰۳	۹/۳	۹/۸۱	$۲ \times sd$

* مقدار sd برای پسماندهای مدل برازش شده بر شاخص بازدهی روزانه برابر ۰/۰۰۵ و برای شاخص بازدهی هفتگی برابر ۰/۰۱۴ است.

همان‌طور که نتایج آزمون برای بُدهای مختلف نشان می‌دهد، فرضیه صفر مبنی بر توزیع معادل و مستقل بودن پسماندهای مدل ARMA برازش شده بر شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی در سطح ۱٪ رد می‌شود (آماره توزیع نرمال استاندارد در سطح ۱٪ برابر ۲/۵۶ است). بنابراین، فرایند مولد داده‌ها احتمالاً از فرایند غیرخطی تبعیت می‌کند.

در نوع سوم آزمون BDS و برای شناخت بیشتر و دقیق‌تر فرایند حاکم بر داده‌ها، وجود ناهمسانی واریانس در پسماندهای مدل $ARMA(1,2)$ برازش شده بر شاخص بازدهی روزانه، و مدل $ARMA(1,1)$ برازش شده بر شاخص بازدهی هفتگی، با استفاده از آزمون ARCH-LM بررسی شد. نتایج این آزمونها وجود ناهمسانی واریانس شدید در پسماندها را نشان دادند. از مدل‌های نوع ARCH برای رفع ناهمسانی واریانس استفاده شد. آزمون LM-ARCH نشان داد که پسماندهای مدل $GARCH(1,1)$ برازش شده بر شاخص بازدهی روزانه و شاخص بازدهی هفتگی دارای ناهمسانی واریانس نیستند. به عبارت دیگر، مدل برازش شده قادر به رفع ویژگی غیرخطی فرایند بوده است. در مرحله بعد، پسماندهای مدل $GARCH(1,1)$ با روش BDS آزمون شدند که نتایج این آزمونها در جدول (۵) و جدول (۶) ارائه شده است.

همان‌طور که نتایج آزمونها برای بُدهای مختلف نشان می‌دهد، فرضیه صفر مبنی بر حاکم بودن فرایند غیرخطی از نوع GARCH بر داده‌های روزانه و هفتگی شاخص در سطح ۵٪ رد نمی‌شود (آماره توزیع نرمال استاندارد در سطح ۵٪ برابر ۱/۹۶ است). بنابراین، فرایند مولد داده‌های شاخص بازدهی روزانه و هفتگی احتمالاً از فرایند GARCH تبعیت می‌کنند.

جدول ۵- نتایج آزمون BDS بر پسماندهای مدل $GARCH(1,1)$ برازش شده بر شاخص بازدهی روزانه TEPIX

۶	۵	۴	۳	۲	m	ϵ
-۰/۱	۰/۰۸	۰/۶۶	۰/۹۴	۲/۰۷		$۰/۵ \times sd$
-۱/۲۸	-۰/۹۸	-۰/۵۴	-۰/۳	۰/۷۹		$۱ \times sd$
-۱/۵۳	-۱/۲۸	-۰/۹۸	-۰/۹۹	۰/۱۹		$۱/۵ \times sd$
-۱/۱۱	-۰/۸۸	-۰/۷۴	-۰/۹۵	۰/۲۷		$۲ \times sd$

جدول ۶- نتایج آزمون BDS بر پسماندهای مدل $GARCH(1,1)$ برازش شده بر شاخص بازدهی هفتگی TEPIX

۶	۵	۴	۳	۲	m	ϵ
۳/۱۶	۲/۵	۱/۷۱	۱/۲	۱/۴۷		$۰/۵ \times sd$
۱/۲۷	۱/۱۶	۰/۷۹	۰/۶۸	۰/۸۲		$۱ \times sd$
۰/۸۷	۰/۶۹	۰/۴۷	۰/۶۱	۰/۵۶		$۱/۵ \times sd$
۰/۴۹	۰/۳۴	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۱۹		$۲ \times sd$

* مقدار sd برای پسماندهای مدل های $GARCH$ برابر ۱ است.

۴-۲. آزمون شبکه عصبی

در این قسمت، آزمون شبکه عصبی برای آزمون فرضیه صفر مبنی بر وجود فرایند غیرخطی در سریهای زمانی شاخص بازدهی روزانه و هفتگی TEPIX به کار می‌رود. برای انجام این آزمون ابتدا، مدل های $ARMA(1,2)$ بر شاخص بازدهی روزانه و مدل $ARMA(1,1)$ بر شاخص بازدهی هفتگی و مدل $GARCH$ بر هر دو شاخصها برازش شده و سپس، با استفاده از شبکه عصبی بخش غیرخطی مربوط به پسماندهای مدل $ARMA$ و پسماندهای استاندارد شده مدل $GARCH$ برآورد و در نهایت، فرض صفر مبنی بر عدم وجود فرایند غیرخطی در این پسماندها آزمون شد. نتایج این آزمون در جدول (۷) بیان شده است.

همان طور که در جدول (۷) مشاهده می‌شود، آماره محاسبه شده برای پسماندهای مدل $ARMA$ برازش شده بر هر دو شاخص در سطح ۵٪ از آماره جدول $(\chi^2_{3/5} = 7/56)$ بزرگتر است. بنابراین، فرض صفر مبنی بر عدم وجود فرایند غیرخطی در پسماندهای مدل $ARMA$ رد می‌شود. اما عدم

وجود فرایندهای غیرخطی در پسماندهای مدل GARCH برآزش شده بر هر دو شاخص در سطح ۵٪ رد نمی‌شود. بنابراین، احتمالاً شاخصهای مذکور از فرایند غیرخطی نوع GARCH تبعیت می‌کنند.

جدول ۷ - نتایج آزمون شبکه عصبی بر روی شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی TEPIX

مدل GARCH	مدل ARMA	مدلها
		شاخصها
۵/۷۶	۳۳/۱۲	شاخص بازدهی روزانه
۰/۱۲	۱۵	شاخص بازدهی هفتگی

۳-۴. آزمون نمای لیاپانوف

برای انجام این آزمون از روش ولف و دیگران (۱۹۸۶) و نرم‌افزار MATLAB6.5 استفاده شده است. نتایج این آزمون بر روی شاخص بازدهی روزانه در جدول (۸) و برای شاخص بازدهی هفتگی در جدول (۹) نشان داده شده است.

جدول ۸ - نتایج آزمون نمای لیاپانوف بر روی داده‌های خام شاخص روزانه TEPIX*

۶	۵	۴	۳	۲	m
					ε
۰/۱۱۶	۰/۱۰۵	۰/۱	۰/۰۷	۰/۱۱۲۰	$۰/۵ \times sd$
۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۴	۰/۰۱۵	$۱ \times sd$
۰/۰۱۱	۰/۰۱۵	۰/۰۱۷	۰/۰۰۴	-۰/۰۱۵	$۱/۵ \times sd$
۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	-۰/۰۱۵	-۰/۰۴۴	$۲ \times sd$

* مقدار sd برابر ۰/۰۰۵ است.

جدول ۹ - نتایج آزمون نمای لیاپانوف بر روی داده‌های خام شاخص هفتگی TEPIX*

۶	۵	۴	۳	۲	M
					ε
۱/۰۷۷۶	۱/۱۷۵۳	۱/۴۰۶۲	۰/۶۶۹۳	۰/۴۶۹۳	$۰/۵ \times sd$
۰/۷۵۹۳	۰/۸۴۳۹	۰/۷۲۶۱	۰/۶۶۹۳	-۰/۰۷۵۸	$۱ \times sd$
۰/۵۷۴۴	۰/۳۴۶۰	۰/۰۶۷۹	۰/۶۶۹۳	-۰/۰۷۵۸	$۱/۵ \times sd$
۰/۲۱۹۶	۰/۱۷۸۹	-۰/۱۹۲۷	-۰/۳۵۵۰	-۰/۴۹۴۵	$۲ \times sd$

* مقدار sd برابر ۰/۰۱ است.

با توجه به نتایج آزمون نمای لیاپانوف در بُدهای فضای فازی مختلف که در جداول فوق نشان داده شده است، می‌توان نتیجه گرفت که به علت مثبت بودن اکثر بزرگترین نماهای لیاپانوف محاسبه شده، به احتمال زیاد سریهای زمانی شاخص بازدهی روزانه و هفتگی TEPIX در نمونه مورد نظر از فرایند آشوبی تبعیت می‌کنند.

۵. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق وجود آشوب در شاخصهای بازدهی روزانه و هفتگی قیمت کلّ بازار سهام تهران با استفاده از آزمونهای BDS، شبکه عصبی و بزرگترین نمای لیاپانوف بررسی شد. ابتدا، وجود فرایند غیرخطی در پسماندهای مدل‌های ARMA و GARCH برآزش شده بر این شاخصها با استفاده از آزمونهای BDS و شبکه عصبی بررسی شد. این آزمونها وجود فرایند غیر خطی در پسماندهای مدل ARMA را تأیید کردند، ولی نتوانستند وجود فرایند غیرخطی را در پسماندهای مدل GARCH نشان دهند. بنابراین، احتمالاً این سریها از فرایند غیرخطی نوع GARCH تبعیت می‌کنند. سپس، بزرگترین نمای لیاپانوف برای بُدهای فازی مختلف محاسبه شدند که اکثر این نماها مثبت بوده که این مسئله بیانگر آشوبی بودن این سریها است.

در پایان، از نتایج به دست آمده در این تحقیق می‌توان چنین جمع‌بندی کرد که فرایند حاکم بر شاخص کلّ قیمت‌های سهام در بازار بورس تهران خطی نیست. بنابراین، بهتر است برای برآورد و پیش‌بینی این شاخص از مدل‌های غیرخطی استفاده شود. در میان مدل‌های غیرخطی، مدل GARCH که متکی بر فرض واریانس ناهمسانی شرطی در داده‌هاست می‌تواند به عنوان یکی از مدل‌های مناسب در نظر گرفته شود. البته با توجه به نتایج آزمون نمای لیاپانوف امکان آشوبی بودن فرایند حاکم بر شاخص قیمت‌ها نیز تا حدّ بسیار زیادی وجود دارد. در این صورت، برای مدل سازی شاخص قیمت‌ها باید از مدل‌های معین (نه تصادفی) استفاده شود. تصریح مدل‌های غیرخطی معین برای سریهای زمانی مشاهده شده به خصوص در علوم انسانی و اجتماعی بسیار مشکل است و تاکنون نیز انجام نشده است، ولی می‌توان برای پیش‌بینی آنها از مدل‌های انعطاف‌پذیری مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی استفاده کرد. در واقع، نتایج این آزمونها به پژوهشگران کمک می‌کند تا مدل‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی شاخص قیمت‌های سهام طراحی کرده یا به کار گیرند. همچنین، رهنمود سیاستی نتایج فوق این است که باید در جهت شناخت عوامل ناکارایی بازار و رفع آنها اقدام کرد. به عنوان نمونه، شفاف‌سازی جریان اطلاعات می‌تواند در افزایش کارایی بازار بسیار مؤثر باشد.

منابع

- جنانی، محمد حسن. (۱۳۸۱). معمای قیمت سهام. بورس، شماره ۳۱، ص ۳۲-۳۵.
 خالوزاده، حمید. (۱۳۷۷). مدل‌سازی غیرخطی و پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس تهران. پایان‌نامه دکتری، دانشکده برق دانشگاه تربیت مدرس.
 سلامی، امیربهداد. (۱۳۸۱). آزمون روند آشوبی در بازده سهام بازار اوراق بهادار تهران. پژوهشنامه اقتصادی، شماره ۵، ص ۳۵-۷۱.
 مشیری، سعید. (۱۳۸۲). مروری بر نظریه آشوب و کاربردهای آن در اقتصاد. فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، شماره ۱۲، ص ۲۹-۶۸.
 مشیری، سعید و فائزه، فروتن (۱۳۸۳). آزمون آشوب و پیش‌بینی قیمت‌های آتی نفت خام. فصلنامه پژوهشنامه اقتصادی ایران، شماره ۲۱، ص ۶۷-۹۰.
- Abhyankar, A. H., Copeland, L. S. and Wong, W. (1995). Nonlinear Dynamics in Real-Time Equity Market Indices: Evidence from the UK. *Economic Journal*, No. 105, PP. 864-880.
- Abhyankar, A. H., Copeland, L. S. and Wong, W. (1997). Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100. *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 15, PP. 1-14.
- Barnett. A.W., Gallant, Hinich, A.R., Jungeilges, M. J., Kaplan.D.T, J. A. and Jensen. M.J. (1996). *An Experimental Design to Compare Tests of Nonlinearity and Chaos*. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, PP. 163-190.
- Baumol, W. J. and Benhabib, J. (1989). Chaos, Significance, Mechanism and Economic Applications. *Journal of Economic Perspective*, Vol.3, No.1, PP. 77-105.
- Dechert, W.D. (1996). *Testing Time Series for Nonlinearities*. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, PP. 191-201.
- Guarda, P. and Salmon, M. (1996). *Detection of Nonlinearity in Foreign-Exchange Data*. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, PP. 77-111.
- Hsieh, D. A. (1991). Chaos and Nonlinear Dynamics: Applications to Financial Markets. *Journal of Finance*, No. 46, PP. 1839-1877.
- Jungeiliges, J. A. (1996). *Operational Characteristics of White's Test for Neglected Nonlinearities*. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, PP. 219-266.
- Medio, A. G. Gallo. (1992). *Chaotic Dynamics Theory and Applications to Economics and DMC Software*. Cambridge University Press.

-
- Scheinkman, J. A. and LeBaron, B. (1989). Nonlinear Dynamics and Stock Returns. *Journal of Business*, No. 62, PP. 311-337.
- Shintani, M. and Lintani, O. (2002). Nonparametric Neural Network Estimation of Lyapunov Exponents and a Direct Test for Chaos. *Discussion Paper*, No. EM/02/434.
- Small, M. and Tse, C. (2003). Determinism in Financial Time Series. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 7, and Issue. 3.
- Tofallis, C. (1995). Chaotic Behavior in a Bank Account. *British Review of Economic Issue*, Vol 17 , No. 43, PP. 53-68.
- Wen, K. (1996). *Continaose-time Chaos in Stock Market Dynamics*. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, PP. 133-159.
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., and Vastano, J. (1985). Determining Lyapunov Exponents from Time Sseries. *Physica*, Vol 16, PP. 285-317.