

بررسی رابطه میان بازدهی سهام و تورم با استفاده از تجزیه و تحلیل موجک در بورس اوراق بهادار تهران

دکتر سعید مشیری*

کامران پاکیزه**

منوچهر دبیریان***

ابوالفضل جعفری****

تاریخ ارسال: ۸۷/۴/۸

تاریخ پذیرش: ۸۹/۱/۲۹

این مقاله یک مطالعه تجربی برای بررسی رابطه میان بازده شاخص سهام و نرخ تورم با استفاده از روش چند مقیاسی موجک^۱ در بورس اوراق بهادار تهران است. در این پژوهش، ضمن مرور اجمالی برخی پژوهش‌های تجربی پیشین، فرضیه فیشر^۲ مبنی بر وجود رابطه مثبت بین نرخ بازدهی اسمی سهام و نرخ تورم با استفاده از روش چندمقیاسی موجک را آزمون می‌نماییم. روش چندمقیاسی امکان بررسی رابطه یاد شده را در مقیاس‌های زمانی متفاوت فراهم می‌نماید. نتایج تحلیل رگرسیون در محدوده موجک و همبستگی موجک نشان می‌دهد که رابطه بین تورم و بازده سهام در افق کوتاه‌مدت، منفی و در افق میان‌مدت و بلندمدت مثبت است. یافته‌های این پژوهش با نتایج مطالعات عزیززی (۱۳۸۳)، بودوخ و ریچاردسون (۱۹۹۳)، ونگ و وو (۲۰۰۰) و راین (۲۰۰۶) که با رویکردهای غیر از تجزیه و تحلیل موجک انجام شده‌اند، سازگار است. یافته‌های این پژوهش همچنین از فرضیه فیشر حمایت قوی نموده و با نتایج کیم و این^۳ (۲۰۰۵) که رابطه بین تورم و بازده سهام را با استفاده از رویکرد تجزیه و تحلیل موجک مورد مطالعه قرار داده‌اند، تا حدی متفاوت است ولی سازگاری نسبی دارد. بدین ترتیب که در مطالعه کیم و این رابطه بین تورم و بازده سهام در کوتاه و بلندمدت، مثبت اما در دوره‌های میان‌مدت، منفی است.

طبقه‌بندی JEL: G12, E31, C32

واژگان کلیدی: بازده سهام، تورم، تجزیه و تحلیل موجک، همبستگی، فرضیه فیشر، بورس اوراق بهادار تهران.

* دانشیار دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی

** دانشجوی دکتری حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی

*** کارشناس ارشد ریاضی

**** کارشناس ارشد مدیریت مالی

1. wavelet multiscaling method
3. Kim and In

2. Fisher hypothesis

مقدمه

یکی از بحث‌های اصلی در اقتصاد مالی در دو دهه اخیر، رفتار بازده سهام و رابطه آن با تورم در دوره بلندمدت در مقابل کوتاه‌مدت بوده است. پژوهشگران اقتصادی اکنون در مورد تأثیر نرخ بالای تورم بر فعالیت‌های اقتصادی اتفاق نظر دارند. نرخ بالای تورم در دوره‌های متوالی بیشتر به عنوان بحرانی تلقی می‌شود که فعالیت‌های واقعی مالی، سرمایه‌گذاری و در کل اقتصاد را مختل می‌کند. این موضوع در چند سال اخیر در اقتصاد ایران و به ویژه در بورس اوراق بهادار تهران قابل مشاهده است. به نظر می‌رسد نه تنها تورم نقش تعیین‌کننده‌ای در توسعه بازارهای پولی و مالی کشورهای در حال توسعه دارد، بلکه در کشورهای توسعه‌یافته، که قاعداً تورم پایین‌تری دارند، تورم پایین و متوسط نیز اثر چشم‌گیری بر بازارهای پولی و مالی دارد (برنز^۱ و همکاران، ۱۹۹۹). بنابراین، تورم همواره به عنوان یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌های سرمایه‌گذاران به ویژه در بازارهای سهام مطرح بوده است. با توجه به این که سرمایه‌گذاران دارای افق‌های زمانی متفاوتی برای سرمایه‌گذاری می‌باشند، بررسی رابطه بین بازدهی سهام و تورم در مقیاس‌های زمانی متفاوت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

بارو (۱۹۹۵)، فیشر^۲ (۱۹۹۳)، و بولارد و کیتینگ^۳ (۱۹۹۵) رابطه بین تورم و رشد اقتصادی را در بلندمدت مورد مطالعه قرار داده‌اند. طبق این مطالعه یک رابطه منفی بین تورم و رشد اقتصادی وجود دارد. سارل (۱۹۹۶) و سپهری و مشیری (۲۰۰۴) نشان دادند که رابطه‌ای غیرخطی بین تورم و رشد اقتصادی وجود دارد، بدین ترتیب که در تورم‌های پایین رابطه مثبت یا خنثی و در تورم‌های بالا رابطه منفی است. نرخ تورم آستانه در مطالعه سارل به صورت برونزا و در مطالعه سپهری و مشیری به صورت درونزا برای کشورهای مختلف دنیا تعیین شده است. مشیری و سلطانی (۱۳۸۱) نیز این رابطه غیرخطی را برای ایران برآورد کرده و نشان دادند که یک آستانه تورمی به میزان ۱۵ درصد در رابطه بین تورم و رشد اقتصادی ایران وجود دارد. تورم‌های بالا باعث بروز عدم اطمینان نسبت به روند قیمت‌ها و انحراف فعالیت‌های اقتصادی از تولید به فعالیت‌های غیرمولد و در نتیجه، کاهش سرمایه‌گذاری فیزیکی و انسانی می‌شود. فیشر (۱۹۳۰) در مطالعه برجسته خود در زمینه نرخ‌های بهره، بیان نمود که نرخ‌های اسمی بهره به طور کامل اطلاعات در دسترس در زمینه نرخ‌های آتی تورم را منعکس می‌نمایند و بدین ترتیب نرخ اسمی بهره می‌تواند به عنوان حاصل جمع نرخ بهره واقعی و نرخ تورم مورد انتظار تعبیر شوند، این قضیه در ادبیات امور مالی به اثر یا فرضیه فیشر معروف شده است. این فرضیه به صورت ضمنی بیان می‌کند که نرخ‌های بهره واقعی به نوسان تورم مورد انتظار در بلندمدت واکنشی نشان نمی‌دهد. به بیان دیگر، بر اساس فرضیه فیشر نرخ‌های بازدهی اسمی دارایی‌ها با تورم تغییر می‌کنند. درحالی‌که نرخ‌های بازدهی واقعی سهام توسط عوامل واقعی و مستقل از نرخ تورم تعیین می‌شود؛ اما نتایج بیشتر تحقیقات تجربی صورت گرفته در گذشته نشان می‌دهد که بازدهی سهام با تورم رابطه منفی دارد (فاما و شوئرت^۴، ۱۹۹۷؛ گالتکین^۵، ۱۹۸۳؛ برنز و همکاران، ۱۹۹۹). این همبستگی منفی

1. Barnes

2. Fisher

3. Bullard and Keating

4. Fama and Schwert

5. Gultekin

بین تورم و بازدهی واقعی سهام در بیشتر موارد با عنوان معمای تورم - بازدهی سهام شناخته می‌شود. فاما (۱۹۸۱) همبستگی منفی کوتاه‌مدت بین بازدهی سهام و تورم را از طریق همبستگی منفی کوتاه‌مدت بین تورم و فعالیت واقعی (فرضیه نمایندگی)^۱ تشریح می‌کند.

هدف اصلی این پژوهش، بررسی رابطه بین بازدهی سهام و تورم در بورس اوراق بهادار تهران در مقیاس‌های زمانی متفاوت به روش تجزیه و تحلیل موجک می‌باشد که برای نخستین بار در ایران صورت می‌پذیرد. این رویکرد جدید مبتنی بر روش چند مقیاسی موجک است که در آن یک سری زمانی به مقیاس‌های مختلف تجزیه می‌شود. مهم‌ترین مزیت تجزیه و تحلیل موجک، توانایی آن در تجزیه داده‌ها به چندین مقیاس زمانی است. تعداد زیادی سرمایه‌گذار را در نظر بگیرید که در بازار اوراق بهادار به داد و ستد اوراق بهادار پرداخته و در افق‌های زمانی متفاوت اقدام به تصمیم‌گیری می‌نمایند. می‌توان داد و ستدکنندگان را در حال مبادله به صورت دقیقه به دقیقه، ساعت به ساعت، روز به روز، ماه به ماه یا سال به سال مجسم نمود. در واقع، به دلیل مقیاس‌های زمانی متفاوتی که داد و ستدکنندگان مختلف برای تصمیم‌گیری دارند، ساختار پویا و واقعی رابطه بین بازدهی سهام و تورم در مقیاس‌های زمانی متفاوت تغییر می‌کند. مدت‌هاست که اقتصاددانان و تحلیلگران مالی ایده وجود چندین دوره زمانی در تصمیم‌گیری را تشخیص داده‌اند، با این حال، تحلیل‌های اقتصادی و مالی به دلیل نبود ابزارهای تحلیلی برای تجزیه داده‌ها به بیش از دو مقیاس زمانی بر دو مقیاس زمانی کوتاه‌مدت و بلندمدت محدود بوده است. اما برخلاف بیشتر پژوهش‌های پیشین، در این پژوهش، موجک تجزیه متعامد از کوواریانس، همبستگی، و همبستگی مقطعی^۲ بین بازدهی سهام و تورم در مقیاس‌های زمانی متفاوت ارائه می‌دهد.

مروری بر پژوهش‌های پیشین

بیشتر پژوهش‌های تجربی که رابطه بین بازدهی سهام و تورم را بررسی کرده‌اند بر افق‌های زمانی کوتاه‌مدت (معمولاً یک سال یا کمتر از آن) متمرکز شده‌اند. اما بررسی این رابطه در بلندمدت حداقل از دو جنبه حائز اهمیت است. نخست این که از دیدگاه تجربی، دوره نگهداری بسیاری از سرمایه‌گذاران سهام بلندمدت است. بنابراین، شناخت رابطه بین قیمت‌های سهام و تورم در افق‌های زمانی بلندمدت‌تر حائز اهمیت است (بودوخ و ریچاردسون^۳، ۱۹۹۳). دوم، این رابطه واقعی بلندمدت می‌تواند به واسطه اختلالات کوتاه‌مدت مغشوش و مبهم شود که این اختلالات ممکن است برای مثال ناشی از مبادلاتی باشد که به منظور متوازن کردن بار دیگر سبد سرمایه‌گذاری^۴ انجام می‌گیرد یا نشأت گرفته از نیازهای فوری مصرف باشد (هریسون و ژانگ^۵، ۱۹۹۹). با توجه به این مطالب، بودوخ و ریچاردسون (۱۹۹۳) رابطه بین بازدهی سهام و تورم را در ایالات متحده و انگلستان در افق‌های زمانی کوتاه‌مدت (یک سال)

۱. فرضیه نمایندگی (proxy hypothesis) بیان می‌دارد که مهم‌ترین عامل تعیین‌کننده قیمت سهام، سودهای بالقوه آن شرکت است.

2. cross-correlation
4. portfolio rebalance

3. Boudoukh and Richardson
5. Harrison and Zhang

و بلندمدت (پنج سال) با استفاده از روش متغیرهای ابزاری مورد بررسی قرار دادند. آنها در پژوهش‌های خود نشان دادند که در کوتاه‌مدت بازده اسمی سهام با تورم تقریباً همبستگی نداشته یا همبستگی منفی اندکی بین آنها وجود دارد، در حالی که در بلندمدت بازدهی اسمی سهام و تورم دارای همبستگی مثبت است. وونگ و وو^۱ (۲۰۰۰) کار بودوخ و ریچاردسون را با آزمون فرضیه فیشر در بلندمدت و کوتاه‌مدت در ۱۵ کشور شامل ۷ کشور صنعتی و هشت کشور آسیایی مورد آزمون و بررسی قرار دادند. آنها نتیجه گرفتند که در افق‌های بلندمدت بازده‌های اسمی سهام با تورم مورد انتظار رابطه مثبتی دارد. در راستای موارد یاد شده سولنیک و سولنیک^۲ (۱۹۹۷)، انگستد و تنگرد^۳ (۲۰۰۲) و شاتمن و شوایتزر^۴ (۲۰۰۰)، ارتباط بین بازده سهام و تورم را در بازه زمانی طولانی مدت بررسی کردند. نتایج مطالعات آنها نیز نشان می‌داد که هرچه بازه زمانی طولانی‌تر می‌شود از فرضیه فیشر حمایت بیشتری می‌شود.

به رغم این که ادبیات موجدک به سرعت در حال رشد است، تجزیه و تحلیل موجدک در علوم اقتصاد و مالی روشی نسبتاً جدید به شمار می‌رود. ادبیات اخیر شامل دیویدسون^۵ و همکاران (۱۹۹۸)، پن و وانگ^۶ (۱۹۹۸)، رمزی و ژانگ^۷ (۱۹۹۷)، رمزی و لمپارت^۸ (۱۹۹۸ a، ۱۹۹۸ b)، چو^۹ (۲۰۰۱) و جنچی^{۱۰} و همکاران (۲۰۰۱) می‌باشد. دیویدسون و همکاران (۱۹۹۸) رفتار قیمتی کالا را مورد مطالعه قرار دادند. پن و وانگ (۱۹۹۸) تجزیه و تحلیل موجدک را برای بررسی عدم کارایی بازار سهام به کار گرفتند. رمزی و ژانگ (۱۹۹۷) از تجزیه و تحلیل موجدک به منظور تجزیه سیگنال‌های سه نرخ اصلی ارز استفاده کردند. آنها دریافتند که تجزیه و تحلیل موجدک داده‌های همسان نشان می‌دهند که تنها در فرکانس‌های بسیار پایین که معادل دوره‌های بزرگتر از تقریباً دو ساعت است، شواهد ساختاری وجود دارد. رمزی و لمپارت (۱۹۹۸ a، ۱۹۹۸ b) دو نمونه دیگر از کاربرد تجزیه داده‌ها توسط موجدک را ارائه نمودند. آنها در نخستین مقاله، رابطه بین عرضه پول و درآمد اسمی را مورد مطالعه قرار دادند. چو (۲۰۰۱) نیز در پژوهش مشابهی از داده‌های مربوط به کشورهای اروپایی برای بررسی رابطه بین عرضه پول و درآمد اسمی در آن کشورها استفاده نمود. رمزی و لمپارت (۱۹۹۸b) در دومین مقاله خود رابطه بین درآمد و مخارج را مورد بررسی قرار دادند. آنها ادعا کردند که عملکرد رگرسیون مقیاس به مقیاس، بهتر از رگرسیون معمولی بر متغیرهای مجموع زمانی است. پژوهش صورت‌گرفته توسط جنچی و همکاران (۲۰۰۱) نیز به طور جامع چگونگی استفاده از موجدک در علوم اقتصاد و مالی را پوشش می‌دهد. راین (۲۰۰۶)، رابطه بین بازده سهام و تورم را در ایرلند در دو دوره بلندمدت و کوتاه‌مدت مورد بررسی قرار داد. نتایج پژوهش او فرضیه فیشر را تأیید می‌نمود، بدین ترتیب که بازه واقعی سهام در بلندمدت، مستقل از تورم مورد انتظار بوده و یک رابطه مثبت بین بازده اسمی سهام و تورم مورد انتظار در بلندمدت وجود دارد. کیم و این^{۱۱} (۲۰۰۵) رابطه بین تورم و بازده سهام در استرالیا در یک دوره ۱۲۸ ماهه از دوره‌های کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت را با استفاده از رویکرد جدید موجدک مورد

1. Wong and Wu	2. Solnik and Solnik	3. Engsted and Tanggaard
4. Schotman and Schweitzer	5. Davidson	6. Pan and Wang
7. Ramsey and Zhang	8. Ramsey and Lampart	9. Chew
10. Gençay	11. Kim and In	

بررسی قرار دادند. نتایج پژوهش آنها نشان می‌دهد که رابطه بین تورم و بازده سهام در کوتاه‌ترین (۱ ماه) و بلندترین (۱۲۸ ماه) دوره زمانی مثبت اما در دوره‌های میان‌مدت منفی است.

در ایران، عزیزی (۱۳۸۳) از معدود مواردی است که رابطه بین تورم و بازده سهام را مورد مطالعه قرار داده است. در پژوهش وی، رابطه بین تورم و شاخص‌های مختلف بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش خودرگرسیون برداری^۱ بررسی شده است. مطالعه وی به بررسی تنها وجود رابطه بین تورم و بازده پرداخته است، نتایج مطالعه بیانگر تبیین شدن شاخص بازده نقدی، و بازده نقدی و قیمت توسط تورم و عدم تبیین شاخص قیمت توسط تورم بوده است.

به طور خلاصه، بیشتر پژوهش‌های پیشین رابطه بین بازدهی سهام و تورم را هم در افق کوتاه‌مدت و هم در افق بلندمدت مورد بررسی قرار داده‌اند. از این رو، پژوهش‌های پیشین بیشتر به دلیل مقیاس زمانی محدود در شناخت رابطه واقعی و پویای بین بازدهی سهام و تورم با محدودیت مواجه بوده‌اند. به هر حال، وقتی این موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد که بازدهی سهام و تورم در افق‌های زمانی متفاوت تا چه میزانی با یکدیگر همبستگی مثبت یا منفی دارند، پرسش‌های مهم و جالب توجهی مطرح می‌شود. به بیان دیگر، مسأله اصلی در مطالعه رابطه واقعی و پویای بین بازدهی سهام و تورم در "افق‌های زمانی" گوناگون است.

در این پژوهش از رویکردی نو برای آزمون رابطه میان بازده سهام و تورم در بورس اوراق بهادار تهران استفاده می‌کنیم. در این پژوهش، فرضیه فیشر مبنی بر وجود رابطه مثبت بین بازدهی سهام و تورم را مورد بررسی و آزمون مجدد قرار می‌دهیم و نتایج آن به عمق بخشی درک و شناخت ما از رابطه واقعی بین بازدهی‌های اسمی سهام و تورم در مقیاس‌های زمانی متفاوت کمک می‌نماید. در این مطالعه، رابطه بین بازدهی سهام و تورم به طور کامل را مورد بررسی قرار می‌دهیم، به طوری که سری‌های زمانی بازدهی سهام و تورم را با استفاده از تجزیه و تحلیل موجک تا ۸ سطح (معادل دوره ۱۲۸ ماهه) تجزیه کرده و داده‌های تجزیه‌شده برای بررسی رابطه یاد شده را مورد استفاده قرار می‌دهیم. بنابراین، نتایج آن برای سرمایه‌گذاران داخلی و خارجی و نیز نهادهای قانون‌گذار و تصمیم‌گیرنده در حوزه پولی و مالی ایران می‌تواند مفید باشد. همچنین، نتایج این پژوهش در راستای حمایت از اهمیت تجزیه مقیاس زمانی برای توضیح رابطه بین بازدهی سهام و تورم خواهد بود.

افزون بر این، به منظور درک رابطه واقعی بین بازدهی سهام و تورم، واریانس و کوواریانس بازدهی سهام و تورم را نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. همچنین، همبستگی و همبستگی مقطعی بین بازدهی اسمی سهام و تورم برای مقیاس‌های زمانی متفاوت را محاسبه می‌کنیم.

تجزیه و تحلیل موجک

موجک را می‌توان با لنزهای یک دوربین مقایسه کرد که این امکان را ایجاد می‌کند که هم تصاویر مناظر وسیع را ثبت نمود و هم بر جزئیات بسیار ریز که در حالت عادی از چشم انسان پنهان است،

متمرکز شد. به بیان ریاضی، موجک‌ها پایه‌های متعامد موضعی^۱ متشکل از موج‌هایی هستند که یک تابع را به لایه‌هایی با مقیاس‌های متفاوت تجزیه می‌کنند.

ریشه نظریه موجک در تجزیه و تحلیل فوریه^۲ قرار دارد، اما تفاوت‌های مهمی میان این دو وجود دارد. تبدیل فوریه مجموعه‌ای از توابع سینوس و کسینوس را در طول موج‌های متفاوت به منظور ایجاد تابعی خاص به کار می‌گیرد. اما، توابع سینوس و کسینوس توابعی دوره‌ای هستند که ذاتاً غیرموضعی^۳ می‌باشند؛ یعنی آنها به جمع و تفریق بی‌نهایت در هر دو انتهای خط واقعی ادامه می‌دهند. بنابراین، هر گونه تغییری در یک نقطه خاص از دامنه زمان، تأثیری دارد که بر روی کل خط واقعی احساس می‌شود. این بدان معناست که فرض می‌کنیم ظرفیت فرکانس تابع در طول محور زمان ثابت باشد. برای غلبه بر این مشکل، پژوهشگران تبدیل پنجره‌ای فوریه^۴ را ابداع کردند. داده‌ها در طول محور زمان به چندین بازه تقسیم شده و تبدیل فوریه بر هر بازه به صورت مجزا اعمال می‌شود. اما، موجک‌ها بر روی دامنه محدود تعریف می‌شوند. بر خلاف تبدیل فوریه آنها هم از نظر زمان و هم از نظر مقیاس موضعی هستند و روش مناسب و کارایی برای ایجاد سیگنال‌های پیچیده فراهم می‌آورند. مهم‌تر این که، موجک‌ها می‌توانند داده‌ها را به اجزایی با فرکانس متفاوت به منظور تجزیه و تحلیل جداگانه تقسیم کنند. این تجزیه مقیاس روش جدیدی را برای پردازش داده‌ها به وجود می‌آورد. همان گونه که گریس^۵ (۱۹۹۵) بیان می‌کند، موجک‌ها ما را قادر می‌سازند که هم جنگل و هم درختان را ببینیم.

پایه موجک از یک موجک پدر که بیانگر روند اصلی داده‌هاست و یک موجک مادر که در جهت توضیح تمام انحرافات از روند اصلی داده‌ها استفاده می‌شود، تشکیل می‌شود. این شبیه طرح ساخت یک ارگانسیم طبیعی است که بر پایه تولید مثل قرار دارد. در مقیاس‌های بالا، موجک، حمایت زمانی اندکی دارد که آن را قادر می‌سازد تا بر جزئیات و پدیده‌های کوتاه‌مدت تمرکز نماید. در مقیاس‌های پایین، موجک قادر به تشریح پدیده‌های بلندمدت است. توانایی موجک‌ها در به کارگیری زمان و مقیاس آنها را قادر می‌سازد تا بر مشکل هایزنبرگ^۶ غلبه کنند؛ قانونی که می‌گوید کسی نمی‌تواند به طور همزمان بر دامنه زمان و بسامد متمرکز شود (شلیچر^۷، ۲۰۰۲). توضیحات تفصیلی مربوط به تحلیل چندمقیاسی و تبدیل موجک گسسته را که مروری بر پایه‌های ریاضی و جزئیات موجک می‌باشد در پیوست آورده‌ایم.

آزمون تجربی رابطه میان بازده سهام و تورم در بورس اوراق بهادار تهران

اقتصاد کشور ما در دو دهه گذشته تورم را به طور مستمر تجربه کرده‌است. بدیهی‌است حفظ قدرت خرید در شرایط تورمی بسیار حائز اهمیت است که از جمله راه‌های آن، سرمایه‌گذاری در فعالیت‌های پربازده است که از آن میان می‌توان به داد و ستد سهام به عنوان یک گزینه سرمایه‌گذاری اشاره کرد. داد و ستد سهام در بورس اوراق بهادار تهران که پس از انقلاب به حالت تعلیق در آمده بود بار دیگر از سال ۱۳۶۹ آغاز شده است (عزیزی، ۱۳۸۳). آزمون تجربی رابطه میان تورم و بازدهی شاخص‌های کل قیمت

1. Local orthonormal bases	2. Fourier analysis	3. non-local
4. Windowed Fourier transform	5. Graps	6. Heisenberg's curse
7. Schleicher		

سهام، قیمت و بازده نقدی (بازده کل) و بازده نقدی در بورس اوراق بهادار تهران و مقایسه و هم‌سنجی نتایج به دست آمده با یافته‌های پژوهش‌های دیگر می‌تواند چگونگی این رابطه را در ایران نشان دهد. در این پژوهش، رابطه میان تورم و بازدهی سهام در دوره زمانی ۱۳۸۶-۱۳۷۱ در بورس اوراق بهادار تهران را با استفاده از تجزیه و تحلیل موجک در افق‌های زمانی متفاوت مورد آزمون تجربی قرار می‌دهیم. بدین منظور از داده‌های ماهانه نرخ تورم و نرخ‌های بازدهی شاخص قیمت سهام (TEPIX)، شاخص قیمت و بازده نقدی (TEDPIX) و شاخص بازده نقدی (TEDIX) بورس اوراق بهادار تهران استفاده کرده که در ادامه به ترتیب آنها را با علائم R-TEDPIX، R-TEPIX، INF و R-TEDIX نشان خواهیم داد. لازم به ذکر است که شاخص‌های TEDIX و TEDPIX در سال ۱۳۷۸ ایجاد شدند، ولی داده‌های TEDPIX و R-TEDIX مربوط به دوره ۱۳۸۶ - ۱۳۷۸ است. تورم نیز به صورت درصد تغییر ماهانه شاخص قیمت‌های مصرف‌کننده تعریف شده‌است. داده‌های بورس تهران را از نرم‌افزار "ره آورد" و داده‌های شاخص قیمت مصرف‌کننده را از تارنمای بانک مرکزی استخراج کرده‌ایم. بازده ماهانه شاخص را به صورت زیر اندازه‌گیری کرده‌ایم:

$$R_t = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1 \quad (1)$$

که در آن:

R_t : بازده ماهانه شاخص در دوره معامله N روزه (یک ماهه)،

V_t : ارزش شاخص بورس اوراق بهادار در انتهای دوره t،

V_{t-1} : ارزش شاخص بورس اوراق بهادار در ابتدای دوره t.

بنابراین، بازده ماهانه شاخص به صورت درصد تغییرات R_t محاسبه می‌شود.

برای نمایش واضح‌تر ابتدا داده‌ها نرمال نموده، سپس، نمودار آنها را ترسیم می‌نماییم، ولی محاسبات

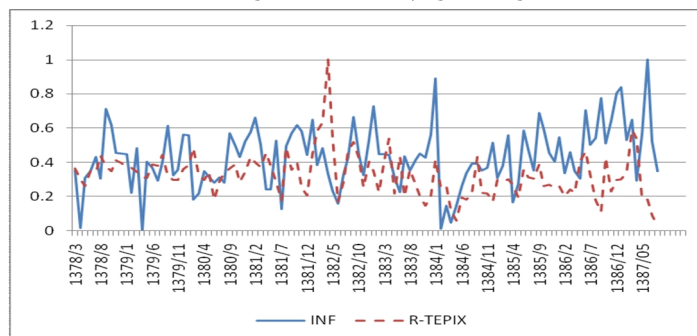
با استفاده از داده‌های نرمال نشده، انجام شده است.

سری زمانی A را به صورت زیر نرمال می‌نماییم:

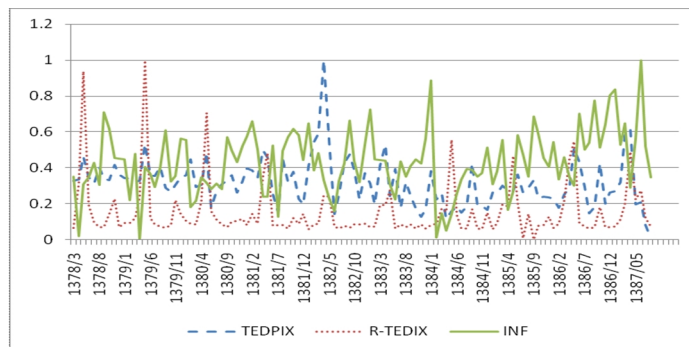
$$\forall x_i \in A, y_i = \frac{x_i - \min(A)}{\max(A) - \min(A)}$$

سری زمانی A' که توسط y_i ساخته می‌شود، نرمال شده سری زمانی A است.

نمودار ۱. تورم و R-TEPIX نرمال شده



نمودار ۲. R-TEDPIX، R-TEDIX و تورم نرمال شده



۱. رابطه بین تورم و R-TEPIX

آمار توصیفی دو متغیر تورم و R-TEPIX را در جدول ۱، ارائه کرده‌ایم. طبق معیارهای چولگی و کشیدگی و آماره JB این دو متغیر توزیع نرمال ندارند. همچنین، خودهمبستگی سری R-TEPIX بیشتر از خودهمبستگی سری تورم است. همبستگی خطی بین تورم و R-TEPIX نیز مثبت و برابر با ۰/۲۷ است.

جدول ۱. پیکربندی داده‌ها

X=	Inflation	R-TEPIX
mean	۰.۰۱۱	۰.۰۱۶
standard Deviaition	۰.۰۰۸	۰.۰۴۸
Skewness	۰.۲۱	۱.۳۴
Kurtosis	۰.۵۸	۵.۴۷
JB	۲۴۷.۸ (۱)	۲۰۴.۶ (۱)
ρ	۰.۰۳	۰.۴
LB(15) for x	۱۶۴.۵۹ (۱)	۱۸۳.۴ (۱)
Correlation(R-TEPIX, Inflation) = 0.098		

ابتدا، ارتباطی که بر مبنای مدل فیشر می‌باشد بررسی نموده و از داده‌های تجزیه‌شده با روش MODWT استفاده می‌کنیم. برای این بررسی، ابتدا داده‌ها با روش MODWT در مقیاس‌های مختلف و با موجک دابشیز ۴ (db4) و با استفاده از نرم افزار MATLAB تجزیه می‌شوند، سپس، بر روی داده‌های به دست آمده رگرسیون اعمال می‌شود. در این رگرسیون، متغیر وابسته R-TEPIX و متغیر توضیحی، تورم است. نتایج حاصل از رگرسیون در جدول زیر خلاصه شده است:

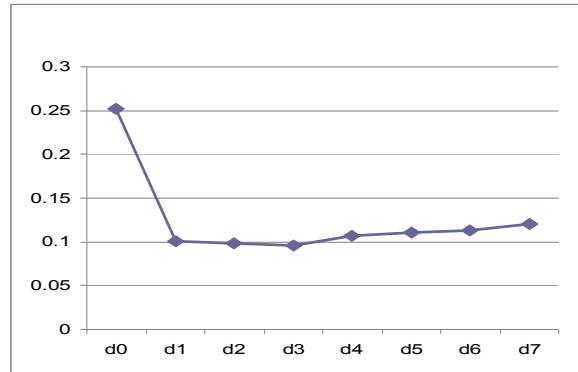
جدول ۲. نتایج تحلیل رگرسیون

	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	S_7
b_1	۰.۱۲	۰.۰۲۷	۰.۰۳۹	۰.۰۳۹	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴
s.e	(۰.۰۱۷)	(۰.۰۱۶)	(۰.۰۱۶)	(۰.۰۱۵)	(۰.۰۱۵۸)	(۰.۰۱۵۸)	(۰.۰۱۵۸)	(۰.۰۱۵۸)	(۰.۰۱۵۸)
R^2	۱۰.۱	۱.۶	۱.۶	۱.۷	۱.۷	۱.۷	۱.۸	۱.۸	۱.۸

همان‌طور که در جدول ۲، مشاهده می‌شود، رابطه معناداری بین تورم و R-TEPIX در دوره‌های زمانی مختلف که با d_i نشان داده‌ایم، وجود دارد. در d_0 که معادل دوره یک ماهه است ارتباط بین R-TEPIX و تورم به طور قابل ملاحظه‌ای ضعیف است، با افزایش مقیاس زمانی، ضریب b نشانگر ارتباط قوی‌تری در دوره‌های بالاتر از یک ماه است. d_1 دوره ۲ ماهه، d_2 دوره چهار ماهه، d_3 دوره ۲i ماهه و S_7 دوره بیش از ۱۲۸ ماهه است. همچنین، مقدار R^2 با افزایش مقیاس زمانی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

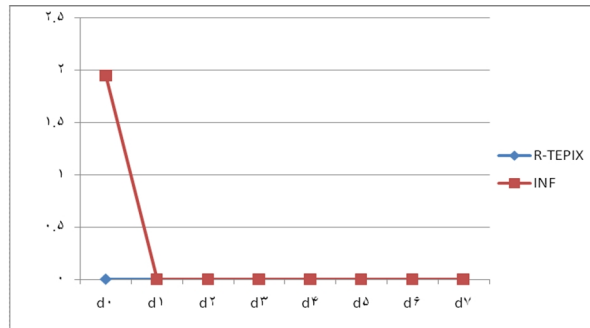
در مجموع، قدرمطلق b بیشترین ارزش را در مقیاس‌های زمانی میان‌مدت و بلندمدت دارد که نشان‌دهنده درجات همبستگی بین دو متغیر بوده و با افزایش d_i همبستگی افزایش می‌یابد، ارتباط محکمی در d_0 مشاهده نمی‌شود، درحالی‌که با افزایش مقیاس موجک، ارتباط مثبت و قوی‌تری بین R-TEPIX و تورم به دست می‌دهد.

نمودار ۳. همبستگی بین تورم و R-TEPIX در مقیاس‌های متفاوت



مرحله بعد، بررسی واریانس‌های R-TEPIX و تورم است. نمودار ۴، واریانس‌های موجک R-TEPIX و تورم را که بر مبنای MODWT است، نشان می‌دهد. واریانس‌های R-TEPIX با افزایش مقیاس موجک ابتدا افزایش می‌یابد، ولی سپس ثابت می‌ماند، در حالی که واریانس‌های تورم تقریباً ثابت و خیلی نزدیک به صفر هستند. نتایج به دست آمده موافق با نظرات اسکات من و شوایتزر (۲۰۰۰) است و نشان می‌دهد که بی‌ثباتی بازده سهام معمولاً خیلی بیشتر از بی‌ثباتی تورم است.

نمودار ۴. واریانس تورم و R-TEPIX در مقیاس‌های متفاوت



مقایسه نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش بودوخ و ریچاردسون (۱۹۹۳) می‌تواند مفید باشد. آنها رابطه مثبت را در مدتی طولانی (۵ سال) بررسی کرده‌اند. ارتباط ۵ ساله را می‌توان با تجزیه و تحلیل نتایج d_7 به دست آورد و به طور کلی مدل فیشر در تجزیه و تحلیل موجک در طولانی‌ترین مقیاس یعنی S_7 تأیید می‌شود.

همچنین، بر اساس داده‌های این پژوهش، ارتباطی مثبت بین R-TEPIX و تورم در طولانی‌ترین افق وجود دارد، این مطلب را می‌توان در نمودار همبستگی R-TEPIX و تورم در مقیاس‌های زمانی متفاوت مشاهده نمود.

۲. رابطه بین تورم، R-TEDPIX و R-TEDIX

بین TEDPIX، R-TEDIX و تورم، خودهمبستگی ماهانه از ۰.۱۱- (R-TEDIX) تا ۰.۰۷۲ (TEDPIX) تغییر می‌کند که نشان می‌دهد که R-TEDIX پیوستگی پایایی بیشتری نسبت به TEDPIX و تورم داشته و آماره‌های لیجک - باکس و جاکو- برا نشان‌دهنده پایایی و وابستگی خطی تمام داده‌هاست.

جدول ۳. بیکربندی داده‌ها

X=	R-TEDIX	TEDPIX	Inflation
mean	۰.۰۱	۰.۰۲۷	۰.۰۱۱
standard Deviaition	۰.۰۱۷	۰.۰۵۱	۰.۰۰۸
Skewness	۳.۱۴	۱.۳۴	۰.۲۱
Kurtosis	۱۱.۴	۵.۲۲	۰.۵۸
JB	۶۶۵.۳۷ (۱)	۲۶۳.۴۳ (۱)	۰.۳۶ (۱)
ρ	-۰.۱۴	۰.۰۷۱	۰.۰۰۷
LB(15) for x	۹۲.۱ (۱)	۶۳.۹ (۱)	۷۲.۵ (۱)
		R-TEDIX And Inflation	TEDPIX And Inflation
correlation		-۰.۲۵	۰.۰۲

معیارهای کشیدگی و چولگی نشان می‌دهد که داده‌ها به طور نرمال توزیع نشده‌اند، همچنین، همبستگی بین TEDPIX و تورم مثبت و دارای مقدار ۰.۱۱۱ و همبستگی بین R-TEDIX و تورم منفی و دارای مقدار ۰/۲۹- است. ابتدا، برای بررسی ارتباط بر مبنای مدل فیشر از داده‌های تجزیه‌شده با روش MODWT استفاده می‌کنیم.

جدول ۴. نتایج تحلیل رگرسیون

R-TEDIX	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	s_5
b_1	۰.۲	-۰.۰۱۲	۰.۰۰۱	۰.۰۰۳	۰.۰۰۳	۰.۰۰۳	۰.۰۰۳
s.e.	(۰.۰۹)	(۰.۰۳۱)	(۰.۰۳۲)	(۰.۰۳۲)	(۰.۰۳۲)	(۰.۰۳۳)	(۰.۰۳۳)
R^2	۱.۴	۰.۱	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰	۰.۰

همان طور که در جدول ۴، مشاهده می‌شود، ضریب برآوردی b و خطاهای استاندارد هم‌تراز و R^2 مثبت شده است. ابتدا، ارزش R^2 با افزایش مقیاس زمانی کاهش می‌یابد در d_0 که برابر دوره یک ماهه است ارتباط بین R-TEDIX و تورم به طور ضعیفی منفی است، با افزایش مقیاس زمانی، این رابطه منفی قوت می‌یابد.

در مجموع، قدر مطلق b بیشترین ارزش را در مقیاس‌های زمانی میان‌مدت و بلندمدت دارد که نشان‌دهنده درجات همبستگی بین دو متغیر بوده و با افزایش d_i همبستگی افزایش می‌یابد، ارتباط محکمی در d_0 مشاهده نمی‌شود.

جدول ۵. نتایج تحلیل رگرسیون

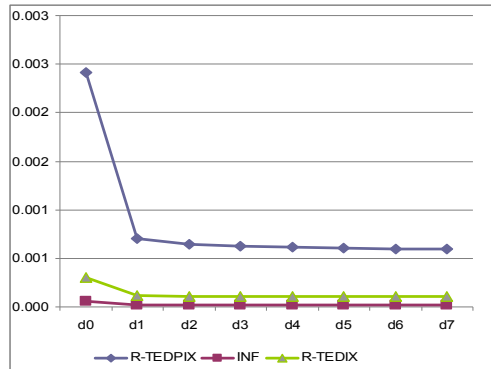
TEDPIX	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	s_5
b_1	۰.۰۷۴	۰.۰۳۶	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴
s.e	(۰.۰۱۱)	(۰.۰۱۳)	(۰.۰۱۳)	(۰.۰۱۳۳)	(۰.۰۱۳۶)	(۰.۰۱۳۷)	(۰.۰۱۴)
R^2	۱۰	۳.۷	۴.۴	۴.۳	۴.۲	۴.۱	۴

همان طور که در جدول ۵، مشاهده می‌شود، ضریب برآوردی b و خطاهای استاندارد هم‌تراز و R^2 مثبت شده است. ابتدا، ارزش R^2 با افزایش مقیاس زمانی کاهش یافته، سپس، افزایش می‌یابد. در d_0 که برابر دوره یک ماهه است ارتباط بین TEDPIX و تورم ضعیف است، با افزایش مقیاس زمانی، این ارتباط مثبت تقویت می‌شود.

در مجموع، قدر مطلق b بیشترین ارزش را در مقیاس‌های زمانی میان‌مدت و بلندمدت دارد که نشان‌دهنده درجات همبستگی بین دو متغیر بوده و با افزایش d_i همبستگی افزایش می‌یابد.

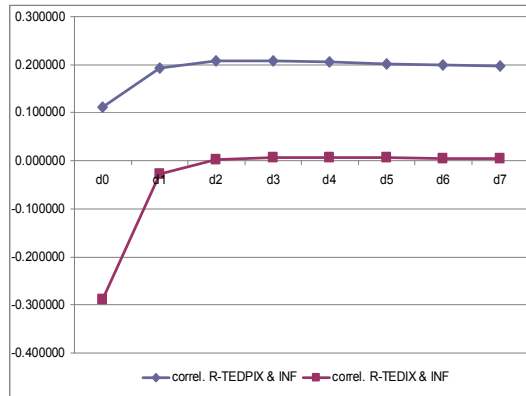
مرحله بعد، بررسی واریانس‌های R-TEDIX و TEDPIX و تورم است. نمودار ۵ واریانس‌های موجک R-TEDIX و TEDPIX و تورم را که بر مبنای MODWT است، نشان می‌دهد. نتایج به دست‌آمده مشابه نتایج مربوط به R-TEPIX است، به طوری که واریانس‌های R-TEDIX و TEDPIX با افزایش مقیاس ابتدا افزایش می‌یابد، سپس، تقریباً ثابت می‌ماند. همان طور که مشخص است بی‌ثباتی R-TEDIX و TEDPIX معمولاً خیلی بیشتر از بی‌ثباتی تورم است.

نمودار ۵. واریانس تورم، R-TEDIX و TEDPIX در مقیاس‌های متفاوت



در نمودار ۶، مشاهده می‌شود که همبستگی متغیرهای TEDPIX در مقیاس‌های متفاوت ارتباطی مثبت با تورم دارد، همچنین، مشاهده شود که R-TEDIX با تورم ارتباطی منفی دارد.

نمودار ۶. همبستگی بین تورم با R-TEDIX و تورم با TEDPIX در مقیاس‌های متفاوت



نتیجه‌گیری

پژوهش‌های پیشین نتایج متفاوتی را در خصوص رابطه بین بازده سهام و تورم را گزارش نموده‌اند، به طوری که بعضی از پژوهش‌ها در برخی کشورها بیانگر رابطه مثبت و در برخی کشورها بیانگر رابطه منفی بوده و در برخی دیگر رابطه معناداری یافت نشده‌است. بر این اساس است که رابطه بین بازده سهام و تورم در بین پژوهشگران به رابطه‌ای معماگونه تعبیر شده‌است. این پژوهش با رویکرد موجک به بررسی این رابطه پرداخته است، این رویکرد بر پایه روش موجک چند مقیاسی قرار دارد که سری‌های زمانی معینی را در مبناهای مقیاس تجزیه می‌کند. نتایج تحلیل رگرسیون در محدوده موجک و همبستگی موجک نشان می‌دهد که رابطه میان تورم و بازده سهام در افق کوتاه‌مدت ضعیف و در افق میان‌مدت و بلندمدت مثبت است. همچنین، نتایج به دست‌آمده نشان می‌دهد که تجزیه مقیاس زمانی، شناخت و آگاهی قابل توجهی را به منظور آزمون نظریه فیشر به وجود می‌آورد، زیرا تعدادی از مسائل و معماهای بازده‌های سهام و تورم که بیشتر در این نوشته ذکر شده، توسط تجزیه و تحلیل موجک حل و توضیح داده می‌شود.

یافته‌های این پژوهش با نتایج مطالعه عزیززی (۱۳۸۳) از این دیدگاه که بین تورم و بازده سهام رابطه معناداری وجود دارد، سازگاری دارد. اما بررسی ما این رابطه را با استفاده از رویکرد موجک به صورت دقیق‌تر و در دوره‌های زمانی متفاوت در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار داده است. نتایج این پژوهش با بودوخ و ریچاردسون (۱۹۹۳)، ونگ و وو (۲۰۰۰) و رایین (۲۰۰۶) نیز سازگار است، همچنین، از فرضیه فیشر حمایت قوی نموده و به طور کلی با نتایج مطالعه کیم و این^۱ (۲۰۰۷) که رابطه بین تورم و بازده سهام را در استرالیا در یک دوره کلی ۱۲۸ ماهه از دوره‌های کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت با استفاده از رویکرد تجزیه و تحلیل موجک مورد مطالعه قرار دادند، سازگاری دارد. با این حال، نتایج به دست‌آمده با نتایج کیم و این تا حدی متفاوت است؛ بدین ترتیب که در مطالعه کیم و این رابطه بین تورم و بازده سهام در کوتاه‌مدت (۱ ماه) و بلندمدت (۱۲۸ ماه) مثبت بوده، اما در دوره‌های میان‌مدت منفی است.

منابع

- عزیزی، فیروزه. (۱۳۸۳). آزمون تجربی رابطه تورم و بازده سهام در بورس اوراق بهادار تهران. فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی، شماره ۱۱ و ۱۲، ۱۵۶-۱۴۳.
- مشیری، سعید و سلطان احمدی. (۱۳۸۱). رابطه غیرخطی رشد و تورم در ایران. مجموعه مقالات ارائه شده در سیزدهمین کنفرانس پولی و بانکی، موسسه تحقیقات پولی و بانکی، بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، اردیبهشت.
- Azariadis, C., Smith, B.D., (1996). Private information, money and growth: Indeterminacy, fluctuations, and the Mundell-Tobin effect. *Journal of Economic Growth* 1, pp 309-332.
- Barnes, M., Boyd, J. H., Smith, B. D., (1999). Inflation and asset returns. *European Economic Review* 43, pp 737-754.
- Boudoukh, J., Richardson, M., (1993). Stock returns and inflation: A long horizon perspective. *American Economic Review* 83, pp 1346-1355.
- Boyd, J.H., Choi, S., Smith, B.D. (1996). Inflation, Financial Market, and capital market. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review* 78 , pp 9-35.
- Boyd, J.H., Smith, B.D. (1998). Capital market imperfections in a monetary growth model. *Economic Theory* 11, pp 241-273.
- Bullard, J.B, Keating, J., (1995). The long-run relationship between inflation and output in postwar economies. *Journal of Monetary Economics* 36, pp 477-496.
- Chew, C., (2001). The money and income relationship of European countries by time scale decomposition using wavelets., New York University.
- Davidson, R., Labys, W. C., Lesourd, J. B., (1998). Wavelet analysis of commodity price behavior. *Computational Economics* 11, pp 103-128.
- Engsted, T., Tanggaard, C., (2001). The Danish stock and bond markets: comovement, return predictability and variance decomposition. *Journal of Empirical Finance* 8, pp 43- 271.
- Engsted, T., Tanggaard, C., (2002). The relation between asset returns and inflation at short and long horizons. *Journal of International Financial Markets, Institutions, and Money* 12, pp 101-118.
- Fama, E. F., (1981). Stock returns, real activity, inflation and money. *American Economic Review* 71, pp 545-565.
- Fama, E. F., Schwert, G. W., (1977). Stock market returns and inflation. *Journal of Financial Economics* 5, pp 115-146.
- Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest*, Macmillan, New York.
- Fischer, S. (1993). The role of macroeconomic factors in growth. *Journal of Monetary Economics*. 32, pp 485-512.
- Gençay, R., Selçuk, F., Whitcher, B., (2001). *An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics*. Academic Press, London.
- Graps, A. (1995). *An Introduction to Wavelets*. IEEE Computational Science and Engineering 2(2): pp 50-61.
- Gultekin, N. B., (1983). Stock market returns and inflation: Evidence from other countries. *Journal of Finance* 38, pp 49-65.

- Harrison, P., Zhang, H. H., (1999). An investigation of the risk and return relation at long horizons. *Review of Economics and Statistics* 81, pp 399-408.
- Huybens, E and Smith, B.D., (1998). Financial Market Frictions, Monetary Policy, and Capital Accumulation in a Small Open Economy. *Journal of Economic Theory*, 81(2), pp 353-400.
- Huybens, E and Smith, B.D. (1999). Inflation, financial markets and long-run real activity. *Journal of Monetary Economics*, 43, pp 283-315
- Kim, S., In, F., (2005). The relationship between stock returns and inflation: new evidence from wavelet analysis... *Journal of Empirical Finance*, 12, 3.
- Meyer, Y., Coifman, R. (1997). *Wavelets*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pan, Z., Wang, X., (1998). A stochastic nonlinear regression estimator using wavelets. *Computational Economics* 11, pp 89-102.
- Percival, D. B. and Walden, A. T.(2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- Ramsey, J. B., Lampart, C., (1998a). Decomposition of economic relationships by timescale using wavelets. *Macroeconomic Dynamics* 2, pp 49-71.
- Ramsey, J. B., Lampart, C., (1998b). The decomposition of economic relationships by time scale using wavelets: Expenditure and income. *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics* 3, pp 23-42.
- Ramsey, J. B., Zhang, Z., (1997). The analysis of foreign exchange data using waveform dictionaries. *Journal of Empirical Finance* 4, pp 341-372.
- Ryan, G., (2006). Irish stock return and inflation, a long-run perspective. *Applied Financial Economics*, 16, pp 699-706.
- Sarel, M. (1996). Nonlinear effects of inflation on economic growth. *IMF Staff Papers*, 43, pp. 199-215.
- Schleicher Ch., (2002). An introduction to wavelets for economists. Bank of Canada working paper, ISSN 1192-5434.
- Schotman, P. C., Schweitzer, M. (2000). Horizon sensitivity of the inflation hedge of stocks. *Journal of Empirical Finance* 7, pp 301-305.
- Sepehri, Ardeshir, and Saeed Moshiri. (2004). Inflation-Growth Profiles across Countries: Evidence from Developing and Developed Countries. *International Review of Applied Economics*, Vol. 18, No. 2, April, pp 191-207.
- Solnik, B., Solnik, V. (1997). A multi-country test of the Fisher model for stock returns. *Journal of International Financial Markets, Institutions, and Money* 7, pp 289-301.
- Schreft, S.L., Smith, B.D., (1997). Money, banking, and capital formation. *Journal of Economic Theory* 73, 157-182.
- Schreft, S.L., Smith, B.D., (1998). The effects of open market operations in a model of intermediation and growth. *Review of Economic Studies* 65, pp 519-550.
- Wong, K. F. and Wu, H. J. (2000). Does the Fisher hypothesis hold in long horizons: evidence from sixteen countries, Department of Economics, Boston College.

پیوست: تحلیل چندمقیاسی و تبدیل موجک گسسته

۱. تبدیل موجک گسسته

در این بخش به مروری بر پایه‌های ریاضی و جزئیات موجک می‌پردازیم. ساختار ریاضی موجک بر فضای توابع V از تجزیه چند مقیاسی (تحلیل چند مقیاسی) بنا شده است. مثال‌های کلاسیک که در مقاله می‌بر^۱ (۱۹۹۷) بیان شده‌است، تجزیه بر روی فضای هیلبرت $L_2(R)$ می‌باشد. تحلیل چند مقیاسی شامل یک دنباله از زیرفضاهای تودرتو V_j از فضای توابع V (یعنی $\dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$) با اشتراک تهی و بسیار چگال در $L_2(R)$ است. تجزیه در لایه‌های دقت چندگانه، نیازمند یک رابطه دو مقیاسی به صورت زیر است:

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1}$$

نقطه شروع برای تجزیه (و برای ساختن پایه‌های موجک) ساختن موجک پدر φ است.

این تابع باید دارای مزیت حمایت فشرده و تبدیلات صحیح $\varphi(t-k)$ در حالی که $k \in Z$ باشد، این تابع فضای V_0 را تولید می‌کند.

به وسیله تبدیلات صحیح از توابع مقیاس $\varphi(2^j t - k)$ فضای فیلتر (پالاینده) V_j ساخته می‌شود. مقیاس دادن به وسیله 2^j ، توابع پایه‌ای برای فضای V_j می‌سازد و فضاهای تودرتو V_j برای ساختن معادله مقیاس

$$\varphi(t) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(2t - k) \quad (1)$$

با ضرایب اختصاص یافته a_k ، $k \in Z$ به کار می‌رود.

با استفاده از ترکیب‌های خطی تابع مقیاس موجک پدر، موجک مادر ساخته می‌شود.

حفظ تعامد برای ضرایب انتخاب‌شده در ترکیبات خطی لازم است، به بیان دیگر، یکی از شرایط انتخاب موجک‌های پدر و مادر داشتن تعامد است:

$$\langle \varphi(\circ - k), \psi(\circ - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad l, k \in Z \quad (2)$$

معادله مقیاس ۱ و شرط تعامد ۲ شرایطی را برای ضرایب b_k فراهم می‌سازد، این ضرایب موجک مادر را شناسایی می‌کنند. موجک مادر ترکیب خطی از مقیاس و موجک‌های پدر φ است،

$$\psi(t) = \sum_{k \in Z} b_k \varphi(2t - k) \quad (3)$$

موجک‌های ψ با ضرایب $\{b_k\}$ و $k \in Z$ ، به طور یکتا محاسبه می‌شوند.

یک مثال معروف برای موجک مادر، موجک هار ψ^3 با ضابطه زیر است:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 0.5] \\ -1 & t \in [0.5, 1] \\ 0 & t \notin [0, 1] \end{cases}$$

که می‌توان موجک پدر را با ضابطه زیر به دست آورد:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & t \notin [0, 1] \end{cases}$$

نکته‌ای که در این حالت برای موجک پدر صادق است، این است که معادله مقیاس را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1) \quad \text{برای } a_k = 0 \text{ و } a_0 = a_1 = 1 \text{ به صورت}$$

$k \neq 0, 1$ است.

موجک هار به عنوان ترکیب خطی از موجک‌های پدر مقیاس شده $\varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$ و $\varphi(2t)$ تعریف می‌شود، در حالی که مقدار ضرایب b_k رابطه ۳ عبارت است از $b_0 = 1$ و $b_1 = -1$ و برای سایر k ها. موجک هار را می‌توان به عنوان یک موجک دابشیز^۱ از مرتبه ۱ با ضریب $b_k \neq 0$ تعریف کرد. در حالت کلی، موجک‌های دابشیز از مرتبه N به صورت تحلیلی به دست نمی‌آیند، اما به وسیله $2N$ ضریب توصیف می‌شوند.

موجک دابشیز بر مبنای افزایش تعداد پایه‌های متعامد ساخته می‌شود. از طریق ترکیب ایده تجزیه و تحلیل فوریه و بانک‌های فیلتر توصیف شرایط برای تعامد پایه‌ها نسبت به شرایط فیلترهای a_k و b_k در رابطه‌های ۱ و ۳ مقدور است، از این می‌توان نشان داد که تبدیلات φ و ψ متعامد هستند و از این تعامد می‌توان دید که در موجک هار $\sum_k a_k = 2$ و $\sum_k b_k = 2$ است. این امر در موجک به آسانی به دست می‌آید. موجکی در نظر بگیرید به طوری که پایه‌های این موجک به وسیله تابع ψ تبدیل و مقیاس‌بندی شده‌اند، نوع ψ مقیاس‌بندی و تبدیل شده به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (4)$$

برای موجک متعامد ψ ، مجموعه $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in Z\}$ پایه‌ای متعامد برای موجک است.

یک تابع f را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$f(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (5)$$

تبدیل موجک گسسته (DWT) متناظر با نگاشتی با ضابطه $f \rightarrow c_{j,k}$ است. DWT ساز و کاری فراهم می‌سازد که برای نمایش داده یا سری‌های زمانی f در جملاتی از ضرایب که به وسیله

مقیاس‌های خاص کاربرد دارد. اگر f یک سیگنال باشد، تجزیه f به مقیاس‌های متفاوت از طریق دقت اعمال DWT به f به دست می‌آید.

۲. تبدیل موجک گسسته حداکثر همپوشانی

در این بخش، روش‌های پایه‌ای و اصلی موجک ارائه شده و به طور خاص تبدیل گسسته (DWT) و تبدیل موجک گسسته حداکثر همپوشانی (MODWT) تشریح می‌شود. همچنین، بر اساس سری داده‌های تجزیه شده از طریق MODWT، روش محاسبه واریانس، کوواریانس و همبستگی موجک دو متغیره ارائه می‌شود.

همان طور که پیشتر نیز اشاره شد، تبدیل‌های موجک پایه‌ای عبارتند از موجک پدر و موجک مادر که آنها را به ترتیب با علامت‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ نشان می‌دهند. موجک پدر (تابع مقیاس) نشان دهنده روند اصلی داده‌هاست، در حالی که موجک مادر (تابع کوچک) در جهت توضیح تمام انحرافات از روند اصلی داده‌ها استفاده می‌شود.

سری زمانی $f(t)$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم آن را به مقیاس‌های موجک گوناگون تجزیه کنیم. با استفاده از DWT می‌توان داده‌های اصلی را به فضای کوچک تبدیل کرد. این کار با استفاده از تبدیل $W = Wf(t)$ انجام می‌شود. ویژگی‌های مهم سری‌های زمانی را می‌توان با استفاده از توابع $\psi(t)$ موجک مادر، بهتر به دست آورد. این توابع تفاوت‌های بین دو فضای مجاور را پوشش می‌دهند. با استفاده از تعامد می‌توان فضای L^2 را به صورت زیر تعریف کرد:

$$L^2 = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (6)$$

در رابطه بالا، \oplus بیانگر جمع دو فضاست. در این رابطه ارتباط V_0 با فضای موجک از طریق $V_0 = W_{-\infty} \oplus \dots \oplus W_{-1}$ بیان می‌شود. بر همین اساس موجک مادر $\psi(t)$ به صورت زیر است:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi_k(2^{-j}t - k) 2^{-\frac{p_j}{2}} \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right) \quad (7)$$

بر اساس رابطه ۷، هر سری زمانی $f(t) \in L^2$ به صورت بسط سری موجک نوشته و بیان می‌شود:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (8)$$

همان طور که در رابطه ۸، مشاهده می‌شود، الگوریتم DWT توانایی ایجاد ضرایب موجک را در مقیاس‌های ظریف (خش) دارد. از این رو داده‌های با تواتر بالا (کم) را ثبت می‌کند. بنابراین، یک سری از اطلاعات هموار شده توسط S_k از جزئیات $d_{j,k}$ به دست می‌آید که پیشتر مورد بررسی قرار نگرفته است، در حالی که این اطلاعات سطوح دقت بیشتری را ارائه می‌دهد. در این پژوهش، تجزیه و تحلیل MODWT جانشین DWT می‌شود، این تجزیه و تحلیل تمام عملکردهای DWT را ایجاد می‌کند که

می‌توان از تجزیه و تحلیل واریانس MRA نام برد. مفهوم اصلی واریانس موجک جانشین مفهوم تغییرپذیر بر مقیاس‌های معین می‌شود که مقیاس کلی به وسیله واریانس نمونه برآورد می‌شود (پرسیوال و والدن^۱، ۲۰۰۰).

واریانس موجک به وسیله ضرایب MODWT برای مقیاس $\lambda_j \equiv 2^{j-1}$ از طریق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_l^2(\lambda_j) = \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} [\tilde{d}_{j,t}^l]^2, \quad l = x, y \quad (9)$$

که $\tilde{d}_{j,t}^l$ ضریب موجک MODWT متغیرهای l در مقیاس λ_j است.

$\tilde{N}_j = N - L_j + 1$ مجموعه‌ای از ضرایب است که تحت تأثیر محدودیت نمی‌باشد، و

$$L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$$

کوواریانس موجک هم می‌تواند کوواریانس نمونه را به مقیاس‌های زمانی متفاوت تجزیه کند.

کوواریانس موجک در مقیاس λ_j به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Cov_{xy}(\lambda_j) \equiv \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{d}_{j,t}^x \tilde{d}_{j,t}^y \quad (10)$$

باید توجه داشت که برآوردگر هیچ ضریبی را که کاربرد روشی از حالت‌های محدود زمانی را داشته باشد به کار نمی‌برد. با استفاده از ضرایب موجک MODWT متأثر از محدودیت و نرمال‌سازی مجدد، می‌توان برآوردگر ویژه‌ای از کوواریانس نوسان را به وجود آورد.

در صورتی که در کوواریانس تغییر سری‌های زمانی را دخالت ندهیم، می‌توان مفهوم همبستگی موجک را تعریف کرد. همبستگی موجک از کوواریانس موجک برای $\{x_t, y_t\}$ و واریانس‌های موجک برای $\{x_t\}$ و $\{y_t\}$ تشکیل می‌شود، برآوردگر همبستگی نوسانی به طریق زیر با استفاده از روابط ۹ و ۱۰ بیان می‌شود:

$$\tilde{\rho}_{xy}(\lambda_j) \equiv \frac{Cov_{xy}(\lambda_j)}{\tilde{v}_x(\lambda_j) \tilde{v}_y(\lambda_j)}$$

همبستگی نوسانی همانند ضریب همبستگی معمولی بین دو متغیر تصادفی بیان می‌شود، و دارای

$$\text{مقدار } |\rho_{xy}(\lambda_j)| < 1 \text{ است (جنچی و همکاران ۲۰۰۲).}$$