فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران
سال هفدهم، شماره ۵۲، پاییز ۱۳۹۱، صفحات ۸-۱

تحلیل هزینه سود در یک سامانه صف‌بندی با k نوع سرویس نامتجانس و تعطیلی سرویس‌دهنده

دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده*

تاریخ دریافت: ۹ مرداد ۱۳۹۱ تاریخ پذیرش: ۲۷ دی ۱۳۹۱

در این مقاله به تحلیل هزینه سود یک سامانه صف‌بندی با k نوع سرویس نامتجانس و متوالی همراه با تعطیلی سرویس‌دهنده می‌پردازیم. زمان‌های سرویس و زمان تعطیلی، توزیع کلی دارند. فرض می‌شود زمان بین دو ورود متوالی دارای توزیع نمایی است. همچنین زمان‌های سرویس، زمان تعطیلی و زمان‌های بین ورود متغیرهای تصادفی مستقل هستند. پس از ارائه k نوع سرویس، به دلایلی سرویس‌دهنده با احتمالی به تعطیلی رفته و پس اتمام دوره تعطیلی جهت ارائه سرویس به سامانه برمی‌گردد. با توجه به اهمیت ابعاد اقتصادی و بهینه‌سازی سامانه‌های صف‌بندی، در این مدل با تعریف تابع کل هزینه مورد انتظار در واحدزمان، به محاسبه کمترین نرخ سرویس‌دهی سامانه می‌پردازیم. همچنین به کمک مفهوم کل درآمد دریافتی به تحلیل سود کل سامانه با توجه هزینه کل سامانه می‌پردازیم. در آخر در یک مطالعه موردی و به کمک محاسبات عددی، حساسیت مدل نسبت به پارامترها را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: هزینه- سود، صف M/G/1، میانگین تعداد متقاضیان، هزینه کل، کل درآمد دریافتی.

طبقه‌بندی JEL: H2، D24.

* عضو هیأت علمی گروه آمار دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی
badamchi@yahoo.com

۱. مقدمه

اصولاً بررسی و تحلیل کامل یک سامانه صف‌بندی با تحلیل اقتصادی مدل به دست می‌آید. در دنیای امروز با محدود شدن امکانات در سامانه‌ها و اهمیت زمان برای متقاضیان، بهینه‌سازی مدل به خصوص از لحاظ زمان سرویس‌دهی و هزینه اقامت متقاضی مورد توجه قرار گرفته است، اما تحلیل سود در کنار تحلیل هزینه، امروزه اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است.

در این مقاله براساس مقاله‌ای از شاهکار و بادامچی‌زاده (۲۰۰۶) به تحلیل هزینه سود سامانه صف‌بندی جامعی می‌پردازیم که نمونه‌های ملموسی از آن را می‌توان در خطوط تولید، سامانه‌های خدماتی مانند بانک‌ها، سامانه‌های مخابراتی یافت. هدف، بررسی مدل مقاله مذکور از لحاظ کمترین نرخ سرویس‌دهی است به قسمی که ابتدا هزینه به حداقل رسیده، سپس با تعریف تابع کل سود به حداقل نرخ سرویس لازم دست پیدا می‌کنیم که متناظر با آن سود مورد انتظار بررسی می‌شود. البته شاید ایده‌آل حداکثرسود مورد انتظار باشد، اما در سامانه‌های صف‌بندی به دلیل برقراری شرط پایایی همواره محدودیتی برای نرخ سرویس وجود دارد که معمولاً منجر به حداکثر شدن تابع مطلوبیت در انتهای بازه می‌شود. سپس، به توصیف مدل پرداخته و تعریف ریاضی سامانه را به‌طور اجمال می‌آوریم. پس از آن، به تحلیل هزینه سامانه می‌پردازیم. برای عملیاتی کردن محاسبات، توزیع نمایی را برای زمان سرویس و تعطیلی سرویس‌دهنده در نظر می‌گیریم که به دلیل بی‌حافظگی، اغلب این توزیع‌ها در این مؤلفه‌های سامانه‌های صف‌بندی رایج هستند، اما روند محاسبات طوری است که هر توزیع دیگری را نیز می‌توان جایگزین کرد و در دنباله بحث، تحلیل سود سامانه و حساسیت آن نسبت به پارامترها بررسی می‌شود.

۲. پیشینه تحقیق

تاکنون تحلیل هزینه اهمیت خاصی در سامانه‌های صف‌بندی داشته است. در کتاب‌های با ارزش گراس و هریس (۲۰۰۸)، تاها (۱۹۹۷) و مورس (۱۹۵۸) تحلیل سود- هزینه سامانه‌های کلاسیک مانند M/M/۱ و M/M/c بررسی‌شده‌اند. به علاوه در بل (۱۹۷۱) تحلیل بهینه یک صف M/G/۱ با سرویس‌دهنده برداشتنی مطالعه شده است.

اخیراً در میشرا (۲۰۰۶) و (۲۰۰۸) تحلیل هزینه- سود سامانه $M/E_k/1$ با سرویس‌دهنده برداشتنی[1] و همچنین در ونگ (۱۹۹۷) و ونگ و مینگ (۱۹۹۷) این سامانه با شرط

1. Removable

ازکارافتادگی‌سرویس‌دهنده و همچنین سرویس‌دهنده برداشتنی بررسی شده‌اند. به علاوه در پیرن و چانگ (۲۰۰۴) مدیریت بهینه سامانه $M / E_k /1$ با خط‌مشی N و سرویس‌دهنده برداشتنی مطالعه شده است. سامانه‌های با تعطیلی سرویس‌دهنده در واقع تعمیمی از سامانه‌های فوق است که در این مقاله به یک نوع از این مدل‌ها پرداخته‌ایم.

۳. توصیف مدل

مدل مورد بررسی، یک سامانه صف‌بندی با k نوع سرویس نامتجانس و متوالی همراه با تعطیلی سرویس‌دهنده است.

۱. متقاضیان تک به تک براساس توزیع پواسون با نرخ λ وارد سامانه می‌شوند.

۲. توزیع زمان سرویس برای هر مرحله، کلی در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی B_i نشانگر زمان سرویس مرحله iام است که میانگین آن یعنی $E(B_i)$ و گشتاور دوم یعنی $E(B_i^2)$ متناهی‌اند. سرویس به ترتیب ورود ارائه می‌شود (FCFS) و تا اتمام سرویس مرحله kام متقاضی مفروض، سرویس متقاضی بعدی شروع نمی‌شود.

۳. پس از اتمام سرویس مرحله kام متقاضی مفروض، سرویس‌دهنده با احتمال θ به دلایلی مانند ارتقای سرویس، ارائه سرویس در محل دیگر و یا ازکارافتادگی باجه را تعطیل کرده و در زمانی با توزیع کلی به تعطیلی می‌رود. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی V نشانگر زمان تعطیلی است که میانگین آن یعنی $E(V)$ و گشتاور دوم آن یعنی $E(V^2)$ متناهی‌اند.

۴. متغیرهای تصادفی B_i و V مستقل فرض می‌شوند.

۵. برای تحلیل اقتصادی مدل مفاهیم زیر را تعریف می‌کنیم:

- C_s: هزینه سرویس‌دهی به هرمتقاضی در واحد زمان
- C_t: هزینه اقامت هر متقاضی در سامانه (حالت اشتغال وتعطیلی) در واحد زمان
- C_u: هزینه استفاده از سامانه در دوره بیکاری برای امور اضطراری
- R: درآمد حاصل از ارائه سرویس به هر متقاضی

از شاهکار و بادامچی‌زاده (۲۰۰۶) متوسط تعداد متقاضیان در سامانه برابر است با

$$L_Q = \rho + \frac{\lambda^2 \left\{ \left[\sum_{i=1}^{k} E(B_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^{k} Var(B_i) + 2\theta E(V) \sum_{i=1}^{k} E(B_i) + \theta E(V^2) \right\}}{2(1-\rho)} \qquad (1)$$

که درآن

$$\rho = \lambda \left[\sum_{i=1}^{k} E(B_i) + \theta E(V) \right] \qquad (2)$$

ضریب بهره‌دهی سامانه بوده و شرط پایایی سامانه عبارت‌است از $\rho < 1$. در نتیجه به کمک روابط لیتل متوسط زمان انتظار متقاضیان در سامانه برابر است با $W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$.

٤. تحلیل هزینه سامانه

تابع کل هزینه مورد انتظار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$T_1 = C_s$ (متوسط زمان انتظار متقاضیان در سامانه) $+ C_t$ (متوسط کل زمان سرویس)
$+ C_u$ (متوسط طول دوره بیکاری)

در یک مطالعه موردی برای انجام محاسبات و عملیاتی نمودن مدل فرض می‌کنیم زمان‌های سرویس و تعطیلی از توزیع نمایی به‌ترتیب به صورت $dB_i(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$ و $dV(x) = \frac{1}{\nu} e^{-\frac{x}{\nu}}$ پیروی می‌کنند. در این صورت $E(B_i) = \mu$، $E(B_i^2) = 2\mu^2$، $E(V) = \nu$ و $E(V^2) = 2\nu^2$. حال با جایگذاری مقادیر از (۱) و (۲) داریم:

$$T_1 = C_s(k\mu) + C_t \left[(k\mu + \theta\nu) + \frac{\lambda H(\mu)}{2(1-\rho)} \right] + C_u(1-\rho) \qquad (3)$$

که در آن $H(\mu) = k^2\mu^2 + k\mu^2 + 2\theta k\nu\mu + 2\theta\nu^2$ و $\rho = k\lambda\mu + \lambda\theta\nu$. حال برای محاسبه نرخ سرویس بهینه μ^* از T_1 مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. پس از ساده‌کردن، عبارت درجه دوم زیر برحسب μ به دست می‌آید:

$$\mu^{2}\left[2k^{3}\lambda^{2}(C_s+C_t-\lambda C_u)+\lambda^{2}k(k^{2}+k)C_t\right]+$$
$$\mu\left[-4k^{2}\lambda(1-\lambda\theta\nu)(C_s+C_t-\lambda C_u)-2\lambda^{2}k(k^{2}+k+\theta k\nu)C_t+2\lambda^{2}k^{2}\theta\nu C_t\right]+$$
$$\left[2k(1-\lambda\theta\nu)^{2}(C_s+C_t-\lambda C_u)+2\lambda(k^{2}+k+\theta k\nu)(1-\lambda\theta\nu)C_t+2k\lambda^{2}\theta\nu C_t\right]=0$$

در این مرحله به کمک نرم‌افزار Mathematica برای عملیاتی‌ترشدن مدل با قرار دادن مقادیری به جای پارامترها، μ^* بهینه را به دست می‌آوریم. فرض کنیم ۴ $k=$، ۳ $\lambda=$، ۱ $\nu=$ و ۰/۲ $\theta=$. در این صورت شرط پایایی عبارت است از ۱ > ۰/۶ + $\rho=12\mu$ و یا ۰/۰۳ > μ. حال اگر ۲۵ $C_u=$، ۱ $C_t=$ و ۱۰ $C_s=$، آنگاه ۰/۰۰۵ $\mu^*=$ حداقل نرخ سرویسی است که هزینه را مینیمم می‌کند. در این صورت کل هزینه بهینه[1] (TOC) برابر است با (حدوداً) ۹/۷. جدول ۱ حساسیت TOC نسبت به برخی پارامترها را نشان می‌دهد.

جدول ۱

C_s	C_t	C_u	k	λ	θ	ν	μ^*	ρ	TOC
۱۰	۱	۲۵	۴	۳	۰/۲	۱	۰/۰۰۵	۰/۶۶	۹/۷
۱۰	۱	۲۵	۳	۳	۰/۲	۱	۰/۰۱۱	۰/۷	۸/۶
۱۰	۱	۲۵	۴	۳	۰/۱	۱	۰/۰۳	۰/۷۱	۹/۲
۱۰	۱	۲۵	۵	۳	۰/۲	۱	۰/۰۰۲	۰/۶۳	۱۰/۸
۱۵	۱	۲۵	۴	۳	۰/۲	۱	۰/۰۰۳	۰/۶۴	۱۰/۳
۱۰	۱	۳۰	۴	۳	۰/۲	۱	۰/۰۰۹	۰/۷۱	۹/۹

تعیین μ^* بهینه تحت شرایط پایایی سامانه به شدت به مقادیر مناسب دیگر پارامترها وابسته است و با هر انتخاب دلخواه از پارامترها لزوماً μ^* بهینه بدست نمی‌آید. از مقادیر جدول نتیجه می‌شود که کاهش مراحل سرویس موجب کاهش هزینه، افزایش C_s بیشتر از افزایش C_u موجب افزایش هزینه می‌شود.

۵. تحلیل سود سامانه

در این بخش به تحلیل سود سامانه می‌پردازیم. در واقع به کمک درآمد دریافتی (R)، کل سود مورد انتظار[2] (TEP) را بدست می‌آوریم. فرض کنیم R درآمد دریافتی برای ارائه سرویس به هر

1. Total optimization Cost
2. Total Expected Profit

متقاضی در واحد زمان باشد، در این صورت کل درآمد دریافتی مورد انتظار (TER) برابر است با $TER = RW_Q$. همچنین کل هزینه مورد انتظار (TEC) برابر است با $TEC = C_s k\mu + C_t W_Q$. فرض کنیم

$$T_۲ = TER - TEC = (R - C_t)W_Q - C_s k\mu$$

حال با جایگذاری مقادیر و مشتق‌گیری از حاصل آن نسبت به μ و مرتب کردن، عبارت زیر برحسب μ به‌دست می‌آید:

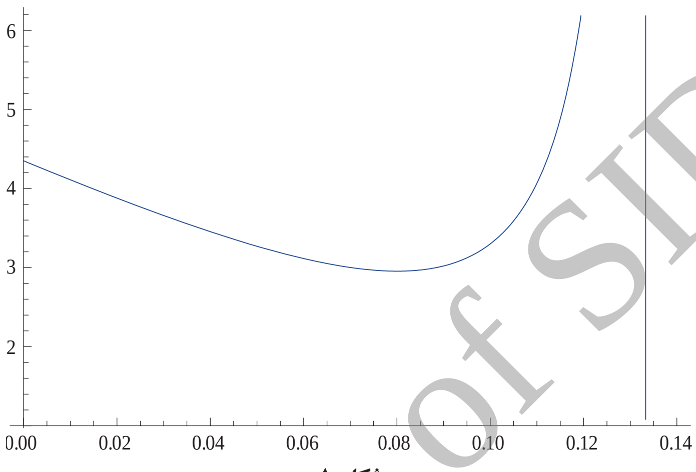
$$\begin{aligned}
&\mu^۲\left[۲\lambda^۲k^۳(R-C_t)+۳\lambda^۲k(k^۲+k)(R-C_t)-۲\lambda^۳k^۳C_s\right]\\
&+\mu[۲\lambda(k^۲+k)(۱-\lambda\theta\nu)(R-C_t)-۴\lambda k^۲(۱-\lambda\theta\nu)(R-C_t)\\
&\quad+۴\lambda^۲k^۲\theta\nu(R-C_t)+۴\lambda^۲k^۲(۱-\lambda\theta\nu)C_s]\\
&+[۲k(۱-\lambda\theta\nu)^۲(R-C_t)+۲\lambda k\theta\nu(۱-\lambda\theta\nu)(R-C_t)\\
&\quad+۲\lambda^۲k\theta\nu^۲(R-C_t)-۲\lambda k(۱-\lambda\theta\nu)^۲C_s]=۰
\end{aligned}$$

فرض کنیم $\nu = ۱$، $\theta = ۰/۱$، $k = ۳$، $\lambda = ۲$، $C_t = C_s = ۵$ و $R = ۶$. در این‌صورت شرط پایایی عبارتست از $۶\mu + ۰/۰۲ < ۱$ یا $\mu < ۰/۱۳$. حداقل نرخ سرویس به عنوان ریشه مشتق برابراست با $\mu^* = ۰/۰۳$ که متناظر با آن حداقل سود بدست می‌آید. گفتنی است که معمولاً در تحلیل سود به دنبال نقطه ماکزیمم سود هستیم که در این مدل به دلیل طبیعت کار سود بیشتر با نرخ سریع سرویس‌دهنده تحقق می‌یابد و طبق منحنی شکل ۱ این مقدار ماکزیمم در نقطه انفجار سامانه یعنی $\mu = ۰/۱۳$ رخ می‌دهد. در جدول ۲ حساسیت TEP نسبت به تغییرات پارامترها آمده است.

جدول ۲

C_s	C_t	R	k	λ	θ	ν	μ^*	ρ	TEP
۵	۵	۶	۳	۲	۰/۱	۱	۰/۰۷	۰/۶۱	۳/۲۶
۵	۵	۶	۳	۳	۰/۱	۱	۰/۰۳	۰/۶۴	۲/۵
۵	۵	۶	۳	۲	۰/۲	۱	۰/۰۳	۰/۶	۳/۳۵
۵	۵	۶	۱	۲	۰/۱	۱	۰/۱۸	۰/۵۷	۴/۱
۵	۵	۷	۳	۲	۰/۱	۱	۰/۰۴	۰/۴۸	۷/۴
۳	۵	۶	۳	۲	۰/۱	۱	۰/۰۵	۰/۵۲	۳/۴

در این جدول نیز مقدار بهینه μ^* براساس مقادیر مناسب دیگر پارامترها به‌دست می‌آید. همچنین سود نسبت به تغییرات R حساسیت بیشتری دارد و با افزایش یک واحد R مقدار TEP به بیش از دو برابر افزایش می‌یابد. در شکل ۱، نمودار تغییرات TEP نسبت به μ براساس مقادیر سطر اول جدول ۲ با توجه به محدوده مجاز μ آمده است.



شکل ۱

براساس شکل ۱، حداقل سود در نرخ ۰/۰۷ رخ می‌دهد. با توجه به محدوده مجاز μ، نمودار دارای مجانب قائم در ۰/۱۳ (حدوداً) است.

٦. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل هزینه- سود در یک سامانه صف‌بندی M/G/۱ با k مرحله سرویس متوالی و نامتجانس با تعطیلی سرویس‌دهنده انجام شده است. با انتخاب توزیع‌های خاص، انتخاب پارامترهای معین و با استفاده از نرم‌افزار Mathematica، مدل به‌طور موردی مطالعه شده است. یکی از اهداف این مقاله ارائه مدلی از ارتباط دو علم نظریه صف‌بندی و علم اقتصاد است که در دنیای امروز و در بهینه‌سازی سامانه‌های خدماتی، تولیدی و مخابراتی نقش مهمی ایفا می‌کند. به‌طور حتم بررسی و تحلیل نظری سامانه صف‌بندی بدون درنظر گرفتن ابعاد اقتصادی مدل ناقص

خواهد بود. لذا هدایت پایان‌نامه‌ها، رساله‌ها و طرح‌های پژوهشی به این سمت موجب کاربردی‌تر شدن آن‌ها خواهد شد.

منابع

Bell, C. E. (1971), "Characterization and Computation of Optimal Policies for Operating an M/G/1 Queueing System with Removable Server", *Operat. Res*, Vol. 19, pp. 208-218.

Gross, D. and C. M. Harris (2008), *Fundemental of Queueing Theory*, 4nd edition, Wiely, New York.

Mishra S. S. (2006), "Cost analysis of Renewal Model in Clocked Queueing Networks", SCRA 2006-FIM 13th International conference on interdisciplinary mathematical and statistical techniques, USA.

Mishra S.S. and D. K. Yadav (2008), "Cost and Profit Analysis of M/Ek/1 Queuing System with Removable Service Station", *Bulgarian Journal of Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, No. 56, pp. 2777-2784.

Morse P.M. (1958), *Queues, Inventories and Maintenance*, Wiley, New York.

Pearn W. L. and Y. C. Chang (2004), "Optimal Management of the N-policy $M/E_k/1$ Queueing System with a Removable Service Station: A Sensitivity Investigation", *Computer and Operation Research*, Vol. 31, pp. 1001-1015.

Shahkar G. H. and A. Badamchizadeh (2006), "On $M/(G_1,G_2,\ldots,G_k)/V/1(BS)$", *Far East Journal of Theoretical Statistics*, Vol. 20, No. 2, pp. 151-162.

Taha, H. A. (1997), *Operations Research: An Introduction*, Prentice-Hall of India.

Wang K. H. and Y. Ming (1997), "Profit Analysis of $M/E_k/1$ Machine Repair Problem with a Non-reliable Service Station", *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 32, pp. 587-594.

Wang, K. H. (1997), "Optimal Control of an $M/E_k/1$ Queueing System with Removable Service Station Subject to Breakdowns", *Journal of the Peration Research Society*, Vol. 48, pp. 936-942.