

تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشتگی در قالب الگوی نسل‌های همپوشان دودوره‌ای: مورد ایران

مرتضی خورسندی^۱

علی افسری^۲

تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۲/۱۶

تاریخ ارسال: ۹۵/۱/۲۲

چکیده

در سال‌های اخیر، کاهش نرخ زاد و ولد و افزایش امید به زندگی در بسیاری از کشورها موجب بروز پدیده سالمندشدن جمعیت شده که مسائل و مشکلاتی را به همراه داشته است. یکی از این مسائل تأثیر منفی این پدیده بر پایداری سیستم بازنشتگی است. هدف این پژوهش، بررسی تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشتگی در ایران است. برای این منظور از الگوی نسل‌های همپوشان استفاده شده و پس از حل الگو، مقادیر آن با استفاده از پارامترهای ایران انجام شده است. بر اساس نتایج به دست آمده، تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشتگی متأثر از نسبت هزینه‌های نگهداری فرزند به درآمد افراد است و در شرایط کنونی کشور تا زمانی که نرخ زاد و ولد کمتر از $4/12$ درصد باشد، افزایش نرخ زاد و ولد منجر به افزایش پرداخت‌های بازنشتگی و بهبود پایداری سیستم بازنشتگی خواهد شد.

واژگان کلیدی: سیستم بازنشتگی، نرخ زاد و ولد، الگوی نسل‌های همپوشان، اقتصاد ایران

طبقه‌بندی JEL: H55, J13

۱- مقدمه

وجود نهادهای بازنشتگی کارآمد در یک جامعه از اهمیت فراوان اقتصادی و اجتماعی برخوردار است. نهادهای بازنشتگی از یک سو تضمین‌کننده رفاه افراد در سنین پیری و

۱- استادیار گروه اقتصاد انرژی، دانشگاه علامه طباطبائی، پست الکترونیکی: mkhorsandi57@yahoo.com

۲- دانشجوی دکتری علوم اقتصادی، دانشگاه علامه طباطبائی (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی:

aliafsari89@gmail.com

از کارافتادگی هستند و می‌توانند نقش مهمی در توزیع درآمد داشته باشند و از سوی دیگر می‌توانند به‌عنوان منبعی پایدار برای تأمین مالی پروژه‌های سرمایه‌گذاری تلقی شده و در بازارهای مالی نقش فعالی داشته باشند.

نهادهای بازنشتگی و به‌طور کلی نظام بازنشتگی در ایران دارای دو چالش اساسی است. چالش اول، ساختار نظام بازنشتگی است که مشکلات زیادی را به‌همراه داشته است. صندوق‌های بازنشتگی بیمه‌ای در ایران بر اساس نظام سنتی پرداخت جاری اداره می‌شوند که موجب ایجاد نارسایی‌های زیادی شده است. در نظام بازنشتگی پرداخت جاری، کسورات بازنشتگی ذخیره و سرمایه‌گذاری نمی‌شود و به همین دلیل جامعه از یک منبع پایدار برای تأمین مالی پروژه‌های سرمایه‌گذاری محروم می‌شود و به‌علاوه تورم شدید و افزایش نسبت جمعیت سال‌خورده به کل جمعیت تأثیر منفی بر کارایی این نظام بازنشتگی دارد (روغنی‌زاده، ۱۳۸۴).

چالش دوم، سالمندشدن جمعیت است که البته با چالش اول هم ارتباط تنگاتنگی دارد. افزایش امکانات رفاهی و بهداشتی در دهه‌های اخیر موجب افزایش امید به زندگی و کاهش نرخ مرگ‌ومیر در بسیاری از کشورها و از جمله ایران شده است. از سوی دیگر، نرخ زاد و ولد در دهه‌های آینده کاهش یافته و در مجموع موجب بروز پدیده سالمندشدن جمعیت خواهد شد.

بر اساس آمار ارائه‌شده از سوی سازمان ثبت‌احوال کشور، نرخ زاد و ولد در سال‌های ۱۳۹۱، ۱۳۹۲ و ۱۳۹۳ به ترتیب ۱/۸۷، ۱/۹۱ و ۱/۹۷ درصد بوده است (سازمان ثبت‌احوال کشور، ۱۳۹۴ الف). بنابراین، نرخ زاد و ولد در سال‌های اخیر در حدود ۲ درصد بوده و در حال افزایش است، ولی متأسفانه بر اساس پیش‌بینی‌های انجام‌شده در مورد زاد و ولد در دهه‌های پیش‌رو (مشفق و همکاران، ۱۳۹۱) بدون اجرای سیاست‌های تشویقی زاد و ولد، نرخ زاد و ولد کاهش خواهد یافت.

یکی از اثرات مهم پدیده سالمندشدن جمعیت، تأثیر منفی آن بر پایداری^۱ سیستم بازنشستگی است. منظور از پایداری سیستم بازنشستگی این است که این سیستم بدون گرفتن کمک مالی از خارج خود از عهده تعهدات خود برآید. از یک سو با افزایش امید به زندگی، تعداد مستمری‌بگیران در سیستم بازنشستگی رو به افزایش است و از سوی دیگر با کاهش نرخ زاد و ولد، تعداد افرادی که حق مشارکت پرداخت می‌کنند رو به کاهش است و این دو عامل موجب کاهش توان مالی سیستم بازنشستگی و ناکارآمدی آن می‌شود، که کاهش رفاه همه افراد و به‌ویژه سالمندان را به دنبال خواهد داشت. بنابراین، به نظر می‌رسد که افزایش نرخ زاد و ولد تأثیر مثبتی بر پایداری سیستم بازنشستگی داشته باشد.

البته از جنبه نظری، افزایش نرخ زاد و ولد می‌تواند اثرات مختلفی بر پایداری سیستم بازنشستگی داشته باشد. از یک سو با افزایش نرخ زاد و ولد، تعداد افرادی که از درآمد خود، کسورات بازنشستگی را پرداخت می‌کنند افزایش می‌یابد و از طرفی سرمایه سرانه و در نتیجه درآمد سرانه و میزان کسورات بازنشستگی کاهش می‌یابد.

در این پژوهش به چالش دوم یعنی سالمندشدن جمعیت پرداخته شده و تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی در قالب یک الگوی اقتصادی پویا بررسی می‌شود. سؤال اصلی این پژوهش این است که آیا افزایش نرخ زاد و ولد تأثیر مثبتی بر پایداری سیستم بازنشستگی در ایران دارد؟ و در صورت مثبت بودن جواب این سؤال، آیا حدی برای این تأثیر مثبت نرخ زاد و ولد وجود دارد و به عبارت دیگر بیشترین نرخ زاد و ولد که افزایش نرخ زاد و ولد تا این نرخ می‌تواند تأثیر مثبت بر پایداری سیستم بازنشستگی در ایران داشته باشد کدام است؟

برای بررسی این موضوع در این پژوهش از الگوی نسل‌های همپوشان^۲ که فانتی و گوری^۳ (۲۰۱۲) و سیپریانی^۴ (۲۰۱۴) مطرح کرده‌اند استفاده می‌شود. پس از بیان مبانی

1- Sustainability

2- Overlapping Generations Model

3- Fanti and Gori

4- Cipriani

نظری و مروری بر مطالعات تجربی انجام شده در بخش دوم، الگوی پژوهش در بخش سوم معرفی شده و تحلیل می‌شود. کالیبراسیون (مقداردهی) الگو در بخش چهارم انجام می‌شود و بخش پنجم به نتایج پژوهش اختصاص دارد.

۲- ادبیات موضوع

نظام‌های بازنشستگی از نظر نوع تأمین مالی به سه دسته نظام پرداخت جاری^۱، نظام اندوخته کامل^۲ و نظام اندوخته جزئی^۳ تقسیم‌بندی می‌شوند. در نظام پرداخت جاری، پرداخت حقوق بازنشستگی از محل دریافت کسورات بازنشستگی شاغلان فعلی (حساب ذخیره مشترک اجتماعی) تأمین می‌شود. در نظام اندوخته کامل، پرداخت حقوق بازنشستگی هر فرد از محل سرمایه‌گذاری بر روی کسورات بازنشستگی همان فرد در طول دوران اشتغال وی (حساب شخصی) تأمین می‌شود و در نظام اندوخته جزئی، که ترکیبی از دو نظام قبلی است، مقداری از دستمزد هر فرد به حساب ذخیره مشترک اجتماعی و مقداری هم به حساب شخصی وی واریز شده و حقوق بازنشستگی فرد از هر دو حساب تأمین می‌شود (دشتبان و جباری، ۱۳۹۳).

همچنین، نظام‌های بازنشستگی از نظر ملاک تعیین حقوق بازنشستگی به دو نوع نظام حقوق تعریف شده^۴ و نظام کسور تعریف شده^۵ تقسیم‌بندی می‌شوند. در نظام حقوق تعریف شده، حقوق بازنشستگی بر اساس حقوق دوران اشتغال و معمولاً میانگین چند سال آخر دوره خدمت و در مواردی با اعمال ضریبی خاص و با لحاظ شدن تعداد سال‌های اشتغال محاسبه می‌شود و شیوه تأمین منابع مالی در این نظام به صورت پرداخت جاری است. اما در نظام کسور تعریف شده، حقوق بازنشستگی بر اساس میزان کسورات

1- Pay-As-You-Go (PAYG)

2- Full Funded (FF)

3- Partially Funded

4- Defined Benefit (DB)

5- Defined Contribution (DC)

پرداخت شده فرد در دوران اشتغال با لحاظ سود ناشی از سرمایه‌گذاری و یا نرخ تورم محاسبه می‌شود و تأمین منابع مالی در این نظام ممکن است به صورت پرداخت جاری و یا ذخیره کامل باشد (نیرومند، ۱۳۸۶، ص ۲۸-۱۹).

بسیاری از سیستم‌های بازنشستگی که در گذشته به وسیله دولت‌ها ایجاد شده‌اند بر پایه سیستم پرداخت جاری عمل می‌کنند. در این نوع سیستم بازنشستگی، در هر دوره از پرداخت‌های کارکنان برای تأمین مالی پرداخت بازنشستگی بازنشستگان استفاده می‌شود. تغییر توزیع سنی جمعیت و افزایش طول عمر انتظاری افراد، سیستم‌های بازنشستگی را با مسائل مالی بزرگی مواجه کرده است. از یک سو با افزایش طول عمر انتظاری افراد و افزایش تعداد بازنشستگان و از سوی دیگر با کاهش نرخ زاد و ولد و در نتیجه کاهش تعداد کارکنان، تأمین مالی سیستم‌های بازنشستگی با تنگناهای جدی روبه‌رو شده و این امر موجب افزایش سهم پرداختی کارکنان برای بازنشستگی و یا کاهش پرداخت‌های بازنشستگی به بازنشستگان در برخی کشورها شده است (سردا^۱، ۲۰۰۳). بنابراین، به نظر می‌رسد سیاست حمایت از زاد و ولد بیشتر، موجب پایداری بیشتر سیستم بازنشستگی شود.^۲

۲-۱- مبانی نظری

کاهش نرخ زاد و ولد به همراه افزایش طول عمر افراد در بسیاری از کشورها مسائلی را در پی داشته است. یکی از مهم‌ترین بخش‌هایی که تحت تأثیر پدیده سالمندشدن جمعیت قرار گرفته است نهادهای بازنشستگی و تأمین اجتماعی است. در مطالعات صورت گرفته در مورد سیستم بازنشستگی کشورها به دو صورت به مسئله نرخ زاد و ولد پرداخته شده است.

1- Cerda

۲- اصلاح ساختار سیستم بازنشستگی و سیاست‌های تشویقی برای افزایش نرخ زاد و ولد دو راهکار برای حل مشکلات پیش روی سیستم بازنشستگی کشور است. در این مقاله به راهکار دوم یعنی اهمیت سیاست‌های تشویقی برای افزایش نرخ زاد و ولد پرداخته شده که در دهه‌های آینده بر سیستم بازنشستگی کشور مؤثر خواهد بود. نتایج برخی از مطالعات تجربی در زمینه سیستم‌های بازنشستگی بر سیاست‌های تشویقی برای افزایش نرخ زاد و ولد و برخی بر اصلاح ساختار سیستم بازنشستگی تأکید می‌کنند. بنابراین، می‌توان به هر یک از دو راهکار توجه کرد و در مورد آنها مطالعه کرد.

در بسیاری از این مطالعات، نرخ زاد و ولد به‌عنوان یک متغیر درون‌زا در نظر گرفته شده و تأثیر سیستم بازنشستگی بر آن بررسی شده است. در این مطالعات این فرضیه وجود دارد که یکی از انگیزه‌های مهم افراد برای داشتن فرزند، اتکای آنها بر فرزندان در دوران پیری است و نتایج اغلب این مطالعات این است که گسترش سیستم بازنشستگی در کشورها با ایجاد یک پشتوانه مالی برای دوره پیری افراد، انگیزه آنها را برای داشتن فرزندان بیشتر کاهش می‌دهد و موجب کاهش نرخ زاد و ولد می‌شود.

در برخی از مطالعات هم تأثیر نرخ زاد و ولد به‌عنوان یک متغیر برون‌زا بر پایداری سیستم بازنشستگی بررسی شده است. در بررسی تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی، برای کاهش نرخ زاد و ولد سه اثر مهم در نظر گرفته می‌شود: اثر انتقال بین‌نسلی^۱، اثر رقیق شدن سرمایه^۲ و اثر کیفیت پرورش کودک^۳.

اولین اثر بیان‌گر آن است که کاهش نرخ زاد و ولد تعداد نیروی کار آینده را که پرداخت‌های آنها سیستم پرداخت بازنشستگی را مورد حمایت قرار می‌دهد، کاهش می‌دهد و تأثیر منفی بر این سیستم خواهد داشت. اثر دوم در جهت مخالف اثر اول عمل می‌کند، به این صورت که کاهش نرخ زاد و ولد نسبت سرمایه به کار را افزایش می‌دهد که موجب افزایش سرانه محصول و در نتیجه افزایش پرداخت‌های بازنشستگی می‌شود. اثر سوم موسوم به اثر کیفیت پرورش کودک مربوط به تصمیم والدین در خانواده‌ها می‌شود. به این صورت که والدین می‌توانند با کاهش تعداد فرزند، کمیت را به کیفیت تبدیل کرده و سرمایه‌گذاری بیشتری در مورد سرمایه انسانی فرزندان انجام دهند. بنابراین، کاهش نرخ زاد و ولد می‌تواند موجب افزایش سرمایه انسانی و در نتیجه افزایش دستمزد در آینده و منابع بیشتر برای سیستم بازنشستگی شود (سپیریانی، ۲۰۱۴).

بنابراین، به دلیل وجود این سه اثر مختلف، از لحاظ نظری تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی بستگی به شرایط داشته و ممکن است مثبت یا منفی باشد.

1- Intergenerational Transfer Effect

2- Capital Dilution Effect

3- Child Quality Effect

از این رو، به لحاظ تجربی، در اکثر موارد اثر انتقال بین‌نسلی بر دو اثر دیگر غالب بوده و کاهش نرخ زاد و ولد در بسیاری از کشورها منجر به ناپایداری سیستم بازنشستگی شده است.

۲-۲- مطالعات تجربی

در برخی از مطالعات، نرخ زاد و ولد درون‌زا فرض شده و تأثیر سیستم بازنشستگی بر آن بررسی شده است. یون و تالمین^۱ (۲۰۰۱) با استفاده از الگوی نسل‌های همپوشان نشان می‌دهند که وجود سیستم بازنشستگی پرداخت جاری در مقایسه با سیستم اندوخته کامل، همراه با نرخ زاد و ولد کمتری است، اگرچه رشد اقتصادی بالاتری را در پی خواهد داشت. آنها نتایج به دست آمده را این گونه توجیه می‌کنند که وجود سیستم بازنشستگی پرداخت جاری، احساس حمایت اجتماعی بیشتری را در افراد ایجاد می‌کند که منجر به نرخ زاد و ولد کمتری نسبت به سیستم اندوخته کامل می‌شود و این کاهش نرخ زاد و ولد با در نظر گرفتن نوع دوستی فرزندان نسبت به والدین بر رفتار مصرف و پس‌انداز افراد اثر گذاشته و به رشد اقتصادی بیشتری منجر می‌شود (یون و تالمین، ۲۰۰۱، ص ۳-۴).

بر اساس مطالعه سردا^۲ (۲۰۰۵) وجود ناپایداری در سیستم بازنشستگی پرداخت جاری منجر به افزایش کسورات بازنشستگی شده که بر نرخ زاد و ولد و عرضه نیروی کار تأثیر منفی می‌گذارد و موجب تداوم ناپایداری سیستم بازنشستگی و ایجاد بحران مالی در آن می‌شود. نتایج مطالعه ژائو^۳ (۲۰۱۱)، که با استفاده از الگوی نسل‌های همپوشان انجام شده، تأثیر منفی افزایش کسورات بازنشستگی را بر نرخ زاد و ولد تأیید می‌کند.

اما در دسته دیگری از مطالعات، نرخ زاد و ولد برون‌زا فرض شده و تأثیر آن بر پایداری سیستم بازنشستگی بررسی شده است. وربیچ و اسپراک^۴ (۲۰۱۱) با بررسی پدیده پیری جمعیت در ۳۳ کشور جهان به این نتیجه رسیدند که افزایش نرخ زاد و ولد به همراه افزایش در سن بازنشستگی می‌تواند مشکل عدم تعادل در هزینه‌های بازنشستگی عمومی را

1- Yoon and Talmain

2- Cerda

3- Zhao

4- Verbic and Spruk

حل کند. اما نتایج برخی از مطالعات، تأثیر مثبت افزایش نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی را تأیید نمی‌کند.

فانتی و گوری (۲۰۱۲) با فرض یک الگوی نسل‌های همپوشان نشان دادند که در سیستم بازنشستگی پرداخت جاری کاهش نرخ زاد و ولد در درازمدت موجب کاهش پرداخت بازنشستگی نمی‌شود و نتیجه اینکه ضرورتی برای اصلاح و تغییر سیستم بازنشستگی موجود وجود ندارد.

سپیریانی (۲۰۱۴) هم با در نظر گرفتن یک الگوی نسل‌های همپوشان نشان داد که با فرض زاد و ولد برون‌زا، کاهش نرخ زاد و ولد باعث افزایش پرداخت بازنشستگی، و افزایش طول عمر انتظاری افراد باعث کاهش پرداخت بازنشستگی می‌شود و با فرض زاد و ولد درون‌زا، افزایش طول عمر انتظاری باعث کاهش نرخ زاد و ولد و همین‌طور کاهش پرداخت بازنشستگی می‌شود.

نتیجه دو مطالعه اخیر با شواهد تجربی سازگار نیست؛ زیرا در واقعیت، کاهش نرخ زاد و ولد و پدیده سالمندشدن جمعیت در بسیاری از کشورها بر پایداری سیستم بازنشستگی تأثیر منفی گذاشته و حتی به قول سردا (۲۰۰۵) آنها را با بحران مالی مواجه کرده است. به نظر نویسندگان این مقاله در بیان ریاضی برخی از روابط الگوی نسل‌های همپوشان، که فانتی و گوری (۲۰۱۲) و سپیریانی (۲۰۱۴) به کار برده‌اند، اشتباهاتی رخ داده است که در این مقاله با تصحیح این اشتباهات و حل مجدد الگو و مقیاس‌دهی آن با داده‌های ایران، نتایج متفاوتی به دست می‌آید.

آرتیگ^۱ و همکاران (۲۰۱۴) با بررسی و مقایسه پایداری سیستم‌های بازنشستگی پرداخت جاری نشان دادند که در حالت کاهش نرخ زاد و ولد و یا افزایش طول عمر افراد، انتقال از سیستم بازنشستگی حقوق تعریف‌شده به سیستم کسور تعریف‌شده منجر به افزایش درآمد سرانه و رفاه افراد می‌شود.

در داخل کشور تحقیقات اندکی در زمینه پایداری نظام بازنشستگی انجام شده است.

دشتبان فاروجی و همکاران (۱۳۸۹) با استفاده از یک الگوی نسل‌های همپوشان ۵۵ دوره‌ای با افراد ناهمگن به تحلیل و شبیه‌سازی نظام بازنشستگی ایران می‌پردازند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که نظام بازنشستگی اندوخته‌ای، دارایی‌های مالی فردی بیشتر و همین‌طور انباشت سرمایه فیزیکی بالاتری را نسبت به نظام بازنشستگی پرداخت جاری به همراه دارد. همچنین، انتقال از نظام بازنشستگی پرداخت جاری به نظام بازنشستگی اندوخته‌ای منجر به سطوح بالاتر مصرف ملی و تولید ملی و همین‌طور انگیزه بیشتر افراد برای ماندن در بازار کار و کامل کردن دوران خدمت خود می‌شود.

در داخل کشور تاکنون تأثیر افزایش نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی در قالب یک الگوی اقتصاد کلان بررسی نشده است و بررسی این موضوع با استفاده از یک الگوی پویای اقتصاد کلان، نوآوری این مقاله است.

۳- معرفی و تحلیل الگوی پژوهش

الگوی مورد استفاده در این مقاله الگوی نسل‌های همپوشان است که فانتی و گوری (۲۰۱۲) و سپیریانی (۲۰۱۴) آن را برای بررسی تأثیر نرخ زاد و ولد بر پرداخت بازنشستگی در سیستم بازنشستگی پرداخت جاری به کار بردند. در این الگو فرض می‌شود که افراد در دو دوره جوانی و پیری زندگی می‌کنند. در هر نسل، افراد جوان فقط کار می‌کنند و سرمایه‌ای از خود ندارند و در مقابل افراد پیر کار نمی‌کنند و فقط پس‌انداز دوره جوانی خود را به صورت سرمایه برای تولید صرف می‌کنند. افراد از مصرف خود در دو دوره زندگی مطلوبیت به دست می‌آورند و هر فرد به دنبال حداکثر کردن مطلوبیت خود است. همچنین، در این الگو فرض می‌شود که دولت یک نظام بازنشستگی پرداخت جاری در جامعه برقرار کرده است و نرخ زاد و ولد به صورت برون‌زا در الگو در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود که شروع دوره جوانی و فعالیت اقتصادی افراد در پایان سن ۲۵ سالگی است و در صورت زنده ماندن افراد، این دوره تا ۳۰ سال یعنی سن ۵۵ سالگی افراد به طول می‌انجامد.

۳-۱- شرط بهینه هر یک از افراد

مطلوبیت انتظاری طول عمر یک جوان متولد در دوره t برابر است با:

$$U^t = \ln c_a^t + \beta \pi \ln c_o^t \quad (1)$$

که در رابطه فوق، C_a^t مصرف فرد جوان دوره t ، C_o^t مصرف فرد پیر دوره t ، β ضریب تنزیل ذهنی مصرف کننده بین دو دوره زندگی، و π احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری است.

اگر w_t دستمزد فرد جوان، θ نسبتی از دستمزد فرد جوان که برای بازنشستگی پرداخت می‌شود، s_t پس انداز فرد جوان، q ضریب هزینه نگهداری فرزند (نسبت هزینه نگهداری هر فرزند به دستمزد فرد جوان)، n نرخ زاد و ولد نسل جوان (نسبت تعداد متولدین در هر دوره به جمعیت افراد جوان آن دوره)، R_t نرخ متوسط بازدهی سرمایه گذاری (نرخ بهره) در دوره t ، و P_t پرداخت بازنشستگی به افراد پیر در دوره t باشد، هر فردی مطلوبیت انتظاری طول عمر خود را نسبت به دو قید زیر حداکثر می‌کند:

$$c_a^t = w_t(1 - \theta) - s_t - q w_t n \quad (2)$$

$$c_o^t = (1 + R_{t+1}) s_t / \pi + P_{t+1} \quad (3)$$

توضیح و اثبات روابط (۲) تا (۱۰) در ضمیمه (۱) آورده شده است. هر فرد باید مقدار پس انداز دوره جوانی s_t را طوری انتخاب کند که مطلوبیت انتظاری طول عمر خود را حداکثر کند. با جای گذاری مقادیر مصرف فرد در دوره‌های جوانی و پیری از روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) و گرفتن مشتق جزئی از تابع مطلوبیت انتظاری طول عمر فرد نسبت به s_t و پس از حل معادله به دست آمده، تابع پس انداز فرد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_t = \frac{\beta w_t (1 - \theta - qn)}{\frac{1}{\pi} + \beta} - \frac{P_{t+1}^e}{\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right) (1 + R_{t+1}^e)} \quad (4)$$

که در رابطه فوق، P_{t+1}^e و R_{t+1}^e به ترتیب پرداخت بازنشستگی انتظاری به افراد پیر در

دوره $t+1$ و نرخ متوسط بازدهی انتظاری سرمایه گذاری در دوره $t+1$ است.

۳-۲- قید بودجه دولت

دولت در نظام بازنشستگی پرداخت جاری، پرداخت بازنشستگی را به جمعیت پیر دوره t با دریافتی‌های خود از جمعیت جوان دوره t تأمین می‌کند. بنابراین، مقدار پرداخت بازنشستگی به هر یک از افراد پیر دوره t به صورت زیر است:

$$P_t = \frac{\theta n w_t}{\pi} \quad (5)$$

رابطه فوق بیانگر اثر انتقال بین نسلی نرخ زاد و ولد است. هرچه نرخ زاد و ولد (n) بیشتر شود تعداد نیروی کار که تأمین‌کننده منابع مالی سیستم بازنشستگی است افزایش می‌یابد و در نتیجه P_t افزایش می‌یابد.

۳-۳- شرط تسویه شدن بازار^۱

بر اساس الگوی تحقیق، مجموع پس‌انداز جوانان هر دوره به سرمایه دوره بعد تبدیل می‌شود. بنابراین، پس‌انداز دوره t برابر با سرمایه دوره $t+1$ می‌شود و رابطه زیر برقرار است:

$$s_t = n k_{t+1} \quad (6)$$

از روابط (۴)، (۵)، و (۶) تابع سرمایه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$k_{t+1} = \frac{\beta w_t (1 - \theta - qn)}{n \left(\frac{1}{\pi} + \beta \right)} - \frac{\theta w_{t+1}^c}{\pi \left(\frac{1}{\pi} + \beta \right) (1 + R_{t+1}^c)} \quad (7)$$

۳-۴- شرایط بهینه بنگاه

با فرض تابع تولید کاب-داگلاس به صورت $Y_t = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$ که در آن K_t مقدار سرمایه، N_t تعداد نیروی کار، و α سهم سرمایه در تولید است و همین‌طور با فرض اینکه در بازارهای عوامل تولید، شرایط رقابت کامل برقرار است، شرایط بهینه بنگاه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_t = A \alpha k_t^{\alpha-1} \quad (8)$$

1- Market Clearing Condition

$$w_t = A(1-\alpha)k_t^\alpha \quad (۹)$$

از روابط (۸) و (۹) مقادیر دستمزد را در دوره‌های t و $t+1$ و مقدار نرخ بهره را در دوره $t+1$ به دست آورده و در رابطه (۷) قرار می‌دهیم و به رابطه زیر می‌رسیم:

$$k_{t+1} = \frac{\beta A(1-\alpha)k_t^\alpha(1-\theta-qn)}{n\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)} - \frac{\theta A(1-\alpha)k_{t+1}^\alpha}{\pi\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)(1 + A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})} \quad (۱۰)$$

۳-۵- شرایط حالت پایدار

در حالت پایدار، رابطه $k_{t+1} = k_t = k^*$ برقرار است. با قراردادن این رابطه در

رابطه (۱۰) و با فرض $k^* \neq 0$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$1 = \frac{\beta A(1-\alpha)(1-\theta-qn)}{n\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)} k^{*\alpha-1} - \frac{\theta A(1-\alpha)k^{*\alpha-1}}{\pi\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)(1 + A\alpha k^{*\alpha-1})} \quad (۱۱)$$

پارامترهای a و b را به صورت $a = \frac{\beta A(1-\alpha)(1-\theta-qn)}{n\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)}$ و $b = \frac{\theta A(1-\alpha)}{\pi\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)}$ تعریف کرده و

در نتیجه رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$ak^{*\alpha-1} - \frac{bk^{*\alpha-1}}{1 + A\alpha k^*} = 1 \quad (۱۲)$$

با حل معادله فوق مقدار سرمایه سرانه تعادلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$k^* = \left(\frac{\sqrt{(a-b-A\alpha)^2 + 4aA\alpha} - a + b + A\alpha}{2aA\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (۱۳)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۹) مقدار پرداخت بازنشستگی تعادلی به صورت زیر به دست می‌آید:

1- Steady State

$$P^* = \frac{\theta n A (1 - \alpha)}{\pi} k^{*\alpha} \quad (14)$$

با قرارداد سرمایه سرانه تعادلی از رابطه (۱۳) در رابطه (۱۴) رابطه زیر برای پرداخت بازنشستگی تعادلی به دست می‌آید:

$$P^* = \frac{\theta n A (1 - \alpha)}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(a - b - A\alpha)^2 + 4aA\alpha} - a + b + A\alpha}{2aA\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad (15)$$

برای بررسی تأثیر نرخ زاد و ولد بر پرداخت بازنشستگی تعادلی، در رابطه (۱۵) از P^* نسبت به n مشتق گرفته و رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = \frac{1}{2a^2 n \alpha (1 + \pi \beta) V} [\theta \beta (1 - \alpha) M^{\alpha-1} [WV(A(1 - \alpha)(1 - \theta - qn) - \alpha(1 - \theta)) - a\alpha(1 - \theta)(W - 2A\alpha)]] \quad (16)$$

که در رابطه فوق، پارامترهای V ، W ، و M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \sqrt{(a - b - A\alpha)^2 + 4aA\alpha} \quad (17)$$

$$W = V - a + b + A\alpha \quad (18)$$

$$M = \frac{W}{2aA\alpha} \quad (19)$$

۴- کالیبراسیون (مقداردهی) الگو

در این بخش با استفاده از آمارهای موجود و نتایج تحقیقات انجام شده در مورد ایران، به دنبال تعیین علامت عبارت سمت راست رابطه (۱۶) هستیم تا از این طریق تأثیر نرخ زاد و ولد را بر پایداری سیستم بازنشستگی کشور بررسی کنیم.

۴-۱- محاسبه احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری (π)

در الگوی تحقیق، افراد در دوره پیری کار نمی‌کنند. بنابراین، شروع دوره پیری زمانی است که افراد بازنشسته می‌شوند. اگر سن شروع به کار را ۲۵ سالگی و تعداد

۱۷۰ تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی در قالب الگوی نسل‌های همپوشان دودوره‌ای: ...

سال‌های کار افراد را ۳۰ سال فرض کنیم، سن بازنشستگی ۵۵ سالگی خواهد بود. در این بخش برای محاسبه احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری از دو روش مختلف استفاده می‌شود.

در روش اول برای محاسبه π ، با استفاده از آمار جمعیت کشور در سال‌ها و رده‌های سنی مختلف که در جدول (۱) ارائه شده، احتمال زنده ماندن افراد جوانی که در سال ۱۳۵۵ در رده سنی ۲۵-۳۴ سال قرار داشته‌اند را تا سال ۱۳۸۵ محاسبه می‌کنیم.^۱ بر اساس اطلاعات ارائه شده در جدول (۱) تعداد افراد جوان در رده سنی ۲۵-۳۴ سال در سال ۱۳۵۵ برابر با مجموع جمعیت رده‌های سنی ۲۵-۲۹ سال و ۳۰-۳۴ سال یعنی ۳۸۱۸ است.

افرادی که در سال ۱۳۵۵ در رده سنی ۲۵-۲۹ سال قرار داشته‌اند بعد از گذشت ۳۰ سال در صورت زنده ماندن در سال ۱۳۸۵ در رده سنی ۵۵-۵۹ سال قرار داشته و به همین ترتیب افرادی که در سال ۱۳۵۵ در رده سنی ۳۰-۳۴ سال قرار داشته‌اند بعد از گذشت ۳۰ سال در صورت زنده ماندن در سال ۱۳۸۵ در رده سنی ۶۰-۶۴ سال قرار داشته‌اند.

جدول ۱- آمار جمعیت کشور در سال‌ها و رده‌های سنی مختلف

سال	رده سنی	جمعیت (برحسب هزار نفر)
۱۳۵۵	۲۵-۲۹	۲۱۱۱
۱۳۵۵	۳۰-۳۴	۱۷۰۷
۱۳۸۵	۵۵-۵۹	۱۸۸۷
۱۳۸۵	۶۰-۶۴	۱۴۶۴

مأخذ: مرکز آمار ایران (۱۳۹۴-الف)

بنابراین، از کل افراد جوان در رده سنی ۲۵-۳۴ سال، تعداد افرادی که تا سال ۱۳۸۵ زنده مانده‌اند برابر با مجموع جمعیت دو رده سنی ۵۵-۵۹ سال و ۶۰-۶۴ سال در سال ۱۳۸۵ یعنی

۱- البته تفاوت در جمعیت گروه‌های سنی در طول زمان علاوه بر مرگ و میر، ممکن است به دلیل مهاجرت هم باشد که از آن صرف نظر شده است.

۳۳۵۱ هزار نفر است. بنابراین، احتمال زنده ماندن افراد جوان در رده سنی ۲۵-۳۴ سال در سال ۱۳۵۵ تا سال ۱۳۸۵ برابر نسبت دو عدد به دست آمده در بالا یعنی ۰/۸۸ است. نقطه ضعف این روش این است که احتمال مذکور برای جوانان دهه‌های گذشته محاسبه شده و این احتمال ممکن است در سال‌های اخیر تغییر کرده باشد. برای برطرف کردن این نقطه ضعف، در روش دوم احتمال مذکور با داده‌های سال‌های اخیر محاسبه می‌شود.

در روش دوم مطابق جدول (۲) با استفاده از اطلاعات سال‌نامه‌های آماری سازمان ثبت احوال کشور (۱۳۹۴ الف) مربوط به سال‌های ۱۳۹۰، ۱۳۹۱ و ۱۳۹۲ نسبت تعداد فوت ثبت شده در سنین ۵۵ سال و بالاتر به تعداد فوت ثبت شده در سنین ۲۵ سال و بالاتر را در هر سال به عنوان تخمینی از π در نظر گرفته که به ترتیب برای سال‌های یاد شده برابر ۰/۷۸۶، ۰/۷۸۸ و ۰/۷۹۸ است و میانگین این سه عدد یعنی ۰/۷۹ را می‌توان به عنوان π در نظر گرفت.

جدول ۲- آمار فوت ثبت شده کشور در سال‌ها و رده‌های سنی مختلف

سال	تعداد فوت در سنین ۵۵ سال و بالاتر	تعداد فوت در سنین ۲۵ سال و بالاتر	احتمال π
۱۳۹۰	۲۲۷۱۱۰	۲۸۸۹۴۱	۰/۷۸۶
۱۳۹۱	۲۲۱۴۰۷	۲۸۰۷۷۸	۰/۷۸۸
۱۳۹۲	۲۳۸۱۷۸	۲۹۸۵۸۵	۰/۷۹۸

مأخذ: محاسبات تحقیق

نتیجه اینکه مقدار π بر اساس دو روش مختلف، دو مقدار ۰/۸۸ و ۰/۷۹ به دست می‌آید و برای اطمینان بیشتر بهتر است مقدار آن در محدوده ۰/۷۹ تا ۰/۸۸ فرض شود و از میانگین این دو عدد یعنی تقریباً ۰/۸۴ به عنوان تقریبی برای احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری استفاده شود.

۲-۴- محاسبه ضریب هزینه نگهداری فرزند

ضریب هزینه نگهداری فرزند در الگوی ارائه شده در این تحقیق، نسبتی از دستمزد فرد جوان است که برای نگهداری هر فرزند هزینه می‌شود. در برخی از تحقیقات این ضریب

برابر ۰/۰۳ (ژائو، ۲۰۱۱، ص ۱۱-۱۰)، و در برخی از تحقیقات برای کشورهای توسعه‌یافته برابر ۰/۳ فرض شده است (فانتی و گوری، ۲۰۱۲، ص ۷). برای محاسبه این ضریب برای ایران، ابتدا با استفاده از اطلاعات هزینه‌های مصرفی خانوار، که از سوی مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ب) به تفکیک خانوارهای شهری و روستایی و تعداد نفرات خانوار در سال ۱۳۹۰ ارائه شده است، و همین‌طور با استفاده از اطلاعات ارائه‌شده مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ج) در مورد درصد خانوارهای شهری و روستایی برحسب وسعت خانوار، متوسط نسبت هزینه هر فرزند به هزینه خانوار برای خانوارهای روستایی و خانوارهای شهری به‌طور جداگانه به‌دست آمده و نتایج آن در جدول (۳) آورده شده است.

در این محاسبه فرض شده که تمام خانوارها دارای پدر و مادرند و از احتمال تک‌والدی‌بودن و یا بدون والدین بودن خانوارها صرف‌نظر شده است. همچنین، از اطلاعات خانوارهای ۱۰ نفری و بیشتر به‌خاطر مشخص‌نبودن اطلاعات مربوط به تعداد نفرات آنها صرف‌نظر شده است. همچنین، با استفاده از اطلاعات مربوط به تعداد خانوارهای شهری و روستایی کشور در سال ۱۳۹۰ (مرکز آمار ایران، ۱۳۹۴د) درصد خانوارهای شهری و روستایی از کل خانوارهای کشور به‌دست آمده و نتایج آن در جدول (۳) ارائه شده است.

بر اساس نتایج جدول (۳) متوسط نسبت هزینه هر فرزند به هزینه خانوار در کل کشور برابر ۰/۱۱۵ به‌دست می‌آید.

جدول ۳- محاسبه نسبت هزینه هر فرزند به هزینه خانوار در سال ۱۳۹۰

کل	خانوارهای شهری	خانوارهای روستایی	
۱۰۰	۷۲/۸۶۸	۲۷/۱۳۲	درصد خانوارها از کل خانوارهای کشور
۰/۱۱۵	۰/۰۹۶	۰/۱۶۹	متوسط نسبت هزینه هر فرزند به هزینه خانوار
۰/۰۳۳	۰/۰۲۰	۰/۰۵۴	انحراف معیار نسبت هزینه هر فرزند به هزینه خانوار

مأخذ: محاسبات تحقیق

باید توجه شود که تمام دستمزد فرد جوان صرف هزینه‌ها نمی‌شود. در الگوی تحقیق نسبتی از دستمزد به عنوان کسورات بازنشستگی کسر می‌شود و علاوه بر آن، فرد جوان بخشی از دستمزد را پس‌انداز می‌کند. بر اساس آمار بانک مرکزی (۱۳۹۴) میانگین نسبت پس‌انداز ناخالص ملی به درآمد ناخالص ملی در سال‌های ۸۶-۱۳۷۵ برابر ۰/۴ است. به دلایلی که در ادامه مقاله توضیح داده خواهد شد، فرض می‌شود که از کل دستمزد فرد جوان (W_t) به طور متوسط ۸ درصد آن ($0.08W_t$) صرف کسورات بازنشستگی می‌شود. بنابراین، درآمد فرد جوان پس از کسر کسورات بازنشستگی برابر $0.92W_t$ خواهد بود. از این مقدار ۴۰ درصد پس‌انداز و مابقی یعنی ۶۰ درصد صرف هزینه‌های خانوار می‌شود. بنابراین، هزینه‌های مصرفی خانوار برابر است با:

$$0.6 \times 0.92W_t = 0.552W_t$$

بر اساس نتیجه به دست آمده از جدول (۳) به طور متوسط ۰/۱۱۵ هزینه‌های هر خانوار صرف نگهداری هر فرزند می‌شود. بنابراین، هزینه نگهداری هر فرزند برابر است با:

$$0.115 \times 0.552W_t = 0.063W_t$$

بنابراین، ضریب هزینه نگهداری فرزند به صورت تقریبی برابر ۰/۰۶ به دست می‌آید. البته با توجه به اینکه انحراف معیار محاسبه شده در جدول (۳) برابر ۰/۰۳۳ است، برای کسب اطمینان بیشتر از نتایج تحقیق فرض می‌کنیم که ضریب هزینه نگهداری فرزند در بازه [۰/۰۳, ۰/۰۹] قرار دارد.

۴-۳- سایر پارامترهای الگو

میزان کسور بازنشستگی در مورد مشترکان صندوق بازنشستگی کشوری در حال حاضر به موجب ماده ۱۲ قانون اصلاح پاره‌ای از مقررات مربوط به حقوق بازنشستگی مصوب ۱۳۷۹/۰۲/۱۳ و مصوبه مورخ ۱۳۷۹/۱۲/۰۷ هیئت وزیران برابر ۹ درصد حقوق و مزایای مستخدمان (کارکنان) است. همچنین، سهم پرداختی مشمولان بیمه تأمین اجتماعی برای بازنشستگی و سایر خدمات بیمه‌ای، ۷ درصد حقوق و دستمزد آنهاست. بنابراین، در الگوی این تحقیق سهم پرداختی فرد جوان برای بازنشستگی (θ) را به طور تقریبی برابر میانگین دو مقدار نام برده یعنی ۰/۰۸ فرض می‌کنیم.

مقدار A در تابع تولید برابر یک فرض می‌شود. همچنین، سهم سرمایه در تولید (α) برای اقتصاد ایران در تحقیقات گوناگون در حدود $0/3$ تا $0/4$ فرض شده است (تقوی و صفرزاده، ۱۳۸۸؛ بهرامی و قریشی، ۱۳۹۰). از این رو، در این تحقیق مقدار آن $0/35$ فرض شده است. مقدار ضریب تنزیل ذهنی سالانه مصرف‌کننده هم در حدود $0/97$ فرض می‌شود (همان). مقادیر مربوط به پارامترهای مختلف به کار رفته در الگوی تحقیق در جدول (۴) خلاصه شده است.

آخرین موردی که باید به آن توجه شود مقدار نرخ زاد و ولد نسل جوان است که در الگوی این تحقیق به صورت نسبت تعداد متولدین هر دوره به جمعیت افراد جوان آن دوره تعریف شده است.

جدول ۴- مقادیر مربوط به پارامترهای مختلف الگوی تحقیق

عنوان پارامتر	حرف لاتین	محدوده تغییرات	مقدار متوسط	منبع یا منابع استفاده‌شده
احتمال زنده‌ماندن فرد تا دوره پیری	π	$0/79$ تا $0/88$	$0/84$	محاسبات تحقیق
ضریب هزینه نگهداری فرزند	q	$0/03$ تا $0/09$	$0/06$	محاسبات تحقیق
سهم پرداختی فرد برای بازنشتگی	θ	$0/07$ تا $0/09$	$0/08$	مقررات صندوق بازنشتگی کشوری و سازمان تأمین اجتماعی
سهم سرمایه در تولید	α	$0/3$ تا $0/4$	$0/35$	تقوی و صفرزاده، ۱۳۸۸؛ بهرامی و قریشی، ۱۳۹۰
ضریب تنزیل ذهنی سالانه مصرف‌کننده	β	$0/97$	$0/97$	تقوی و صفرزاده، ۱۳۸۸؛ بهرامی و قریشی، ۱۳۹۰

مأخذ: محاسبات تحقیق

در حالی که تعریف متداول نرخ زاد و ولد، نسبت تعداد متولدین در یک سال به کل جمعیت یک کشور است، بنابراین بین این دو نرخ زاد و ولد رابطه زیر برقرار است:

$$(20) \quad (\text{نسبت وابستگی} + 1) \times \text{نرخ زاد و ولد} = \text{نرخ زاد و ولد نسل جوان}$$

اثبات رابطه (۲۰) در ضمیمه (۱) آورده شده است. در رابطه فوق نسبت وابستگی برابر نسبت جمعیت غیرفعال به جمعیت فعال است. بر اساس الگوی تحقیق، افراد جوان همان افراد فعال و سایر افراد، افراد غیرفعال‌اند. بر اساس آمار ارائه شده از سوی مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ه) نسبت وابستگی در سال ۱۳۹۰ برابر با ۰/۴۱۰۵ بوده است. با استفاده از رابطه (۲۰) نرخ زاد و ولد نسل جوان به‌ازای مقادیر مختلف نرخ زاد و ولد به‌دست می‌آید.

۴-۴- نتایج کالیبراسیون الگو

نرخ زاد و ولد معمولاً عدد مثبتی کمتر از ۰/۰۵ است و در مورد ایران بر اساس آمار مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ه) فقط در برخی سال‌ها مثل سال‌های ۱۳۵۹ و ۱۳۶۰ به حدود ۰/۰۷ رسیده است، از این رو برای اطمینان بیشتر در این تحقیق در بازه [۰, ۰/۱] فرض می‌شود. با استفاده از برنامه اکسل^۱ عبارت به‌دست آمده در رابطه (۱۶) به‌ازای مقادیر مختلف نرخ زاد و ولد در بازه [۰, ۰/۱] به‌دست می‌آید، به این صورت که از $n = 0$ شروع کرده و هر بار به اندازه ۰/۰۰۰۱ به n اضافه شده و به‌ازای حدود ۱۰۰۰ مقدار مختلف n در بازه [۰, ۰/۱] مشتق به‌دست آمده در رابطه (۱۶) محاسبه می‌شود.

نتایج این محاسبات نشان می‌دهد که با افزایش نرخ زاد و ولد، علامت مشتق به‌دست آمده در رابطه (۱۶) به‌ازای مقادیر نرخ زاد و ولد تا یک مقدار بحرانی، مثبت بوده و پس از آن با افزایش n علامت مشتق، منفی به‌دست می‌آید. اگر نرخ بحرانی زاد و ولد را با n^* نشان دهیم می‌توان نتیجه گرفت که تا وقتی که نرخ زاد و ولد کوچک‌تر از n^* باشد، افزایش نرخ زاد و ولد تأثیر مثبتی بر مقدار پرداخت بازنشستگی تعادلی دارد.

بر اساس نتایج مقداردهی الگو، نرخ بحرانی زاد و ولد برابر ۰/۰۶۱۵ است. یعنی با افزایش نرخ زاد و ولد از صفر تا ۰/۰۶۱۵ علامت مشتق به‌دست آمده در رابطه (۱۶) مثبت به‌دست می‌آید و با افزایش نرخ زاد و ولد از ۰/۰۶۱۵ تا ۰/۱ علامت مشتق منفی به‌دست می‌آید. بنابراین، افزایش نرخ زاد و ولد تا ۶/۱۵ درصد تأثیر مثبتی بر مقدار پرداخت

1- Excel

بازنشتگی تعادلی دارد. البته در بخش بعدی با تحلیل حساسیت نتایج تحقیق مقدار مطمئن تری برای نرخ بحرانی زاد و ولد به دست خواهد آمد.

۴-۵- تحلیل حساسیت الگو

در بخش قبل از مقادیر تقریبی برای مقداردهی به الگو استفاده شد. در این بخش تأثیر تغییر مقدار پارامترهای الگو در جواب به دست آمده بررسی می‌شود.

ضریب هزینه نگهداری فرزند به صورت تقریبی برابر $0/06$ به دست آمد. همچنین، انحراف معیار این ضریب در جدول (۳) برابر $0/033$ به دست آمده است. برای کسب اطمینان بیشتر از نتایج تحقیق فرض می‌کنیم که ضریب هزینه نگهداری فرزند در بازه $[0/09, 0/03]$ قرار دارد و نتایج تحقیق را در حالت‌های مختلف این ضریب به دست می‌آوریم. به ازای مقادیر مختلف این ضریب، مقدار π^* مطابق جدول (۵) به دست می‌آید.

با افزایش مقدار ضریب هزینه نگهداری فرزند (q) نرخ زاد و ولد بحرانی کاهش می‌یابد. این مسئله با توجه به بهینه‌یابی افراد قابل توجه است. با افزایش هزینه نگهداری فرزند، تمایل افراد به زاد و ولد کمتر شده و مقدار π^* کاهش می‌یابد. هزینه‌های نگهداری فرزند قید مهمی برای مصرف و پس‌انداز فرد است. بر اساس رابطه (۲) هزینه‌های نگهداری فرزند بر پس‌انداز فرد در دوره جوانی اثر منفی گذاشته و از این طریق بر سرمایه سرانه و در نتیجه تولید و درآمد نسل جوان در دوره بعد و در نتیجه پرداخت بازنشتگی تأثیر می‌گذارد. بنابراین، مقدار هزینه‌های نگهداری فرزند عامل مهمی در تعیین میزان پرداخت بازنشتگی است.

همان‌طور که گفته شد، سهم سرمایه در تولید (α) برای اقتصاد ایران در تحقیقات گوناگون در حدود $0/3$ تا $0/4$ فرض شده است (تقوی و صفرزاده، ۱۳۸۸؛ بهرامی و قریشی، ۱۳۹۰) و در این تحقیق مقدار آن $0/35$ فرض شد. برای اطمینان بیشتر از نتایج تحقیق، حساسیت نتایج نسبت به تغییرات α بررسی، و نتایج آن در جدول (۶) ارائه شده است.

جدول ۵- نرخ بحرانی زاد و ولد به‌ازای مقادیر مختلف ضریب هزینه نگهداری فرزند

n*	q
۰/۰۸۳۲	۰/۰۳
۰/۰۷۳۹	۰/۰۴
۰/۰۶۷۰	۰/۰۵
۰/۰۶۱۵	۰/۰۶
۰/۰۵۷۰	۰/۰۷
۰/۰۵۳۲	۰/۰۸
۰/۰۵۰۰	۰/۰۹

مأخذ: محاسبات تحقیق

جدول ۶- نرخ بحرانی زاد و ولد به‌ازای مقادیر مختلف سهم سرمایه در تولید

n*	α
۰/۰۶۸۰	۰/۳
۰/۰۶۵۶	۰/۳۲
۰/۰۶۱۵	۰/۳۵
۰/۰۵۸۲	۰/۳۷
۰/۰۵۲۱	۰/۴

مأخذ: محاسبات تحقیق

بر اساس نتایج جدول (۶) نرخ بحرانی زاد و ولد با تغییر مقدار α کمی تغییر می‌کند، به‌طوری که با افزایش مقدار α نرخ بحرانی زاد و ولد کاهش می‌یابد. همان‌طور که توضیح داده شد، سهم پرداختی مشمولان صندوق بازنشستگی کشوری ۹ درصد، و سهم پرداختی مشمولان بیمه تأمین اجتماعی برای بازنشستگی و سایر خدمات بیمه‌ای ۷ درصد حقوق و دستمزد آنهاست. بنابراین، سهم پرداختی فرد جوان برای بازنشستگی (θ) را می‌توان بین ۰/۰۷ و ۰/۰۹ متغیر فرض کرد و حساسیت نتایج تحقیق را نسبت به تغییرات θ بررسی کرد. نتایج این تحلیل در جدول (۷) ارائه شده است. بر اساس نتایج این جدول با افزایش مقدار θ از ۰/۰۷ تا ۰/۰۹ نرخ بحرانی زاد و ولد کمی کاهش

می‌یابد. این مسئله را می‌توان به این صورت توجیه کرد که افزایش کسور بازنشستگی، موجب کاهش درآمد قابل تصرف افراد جوان شده و تمایل افراد را به زاد و ولد تا حدودی کاهش می‌دهد.

جدول ۷- نرخ بحرانی زاد و ولد به‌ازای مقادیر مختلف سهم پرداختی برای بازنشستگی

n^*	θ
۰/۰۶۱۸	۰/۰۷
۰/۰۶۱۵	۰/۰۸
۰/۰۶۱۲	۰/۰۹

مأخذ: محاسبات تحقیق

همچنین، تحلیل حساسیت نتایج تحقیق نسبت به تغییرات دو متغیر ضریب تنزیل ذهنی مصرف‌کننده (β) و احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری (π) انجام و تأثیر تغییر این دو متغیر بر نتایج تحقیق بررسی شد. نتیجه این بررسی نشان داد که با تغییر دو متغیر مذکور، نرخ بحرانی زاد و ولد تغییر محسوسی نمی‌کند.

اولین یافته تحقیق حاضر این است که در شرایط پایین بودن نرخ زاد و ولد، افزایش این نرخ، تأثیر مثبتی بر پرداخت بازنشستگی تعادلی دارد. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که این تأثیر مثبت تا یک نرخ بحرانی زاد و ولد ادامه خواهد داشت. بنابراین، پیدا کردن این نرخ بحرانی از اهمیت زیادی برخوردار است. با توجه به اینکه نرخ محاسبه شده در این تحقیق تا حدودی متأثر از تغییرات متغیرهای q ، θ و α است، برای اطمینان از نتیجه نهایی تحقیق، کمترین نرخ بحرانی زاد و ولد ممکن محاسبه و ارائه می‌شود. با ارائه این نرخ، با اطمینان زیادی می‌توان گفت که افزایش نرخ زاد و ولد تا نرخ مذکور تأثیر مثبتی بر پرداخت بازنشستگی تعادلی دارد.

با توجه به نتایج به دست آمده در جدول‌های (۵) و (۶) و (۷) با افزایش مقدار هر یک از متغیرهای q و θ و α نرخ بحرانی زاد و ولد کاهش می‌یابد. در نتیجه، کمترین نرخ بحرانی زاد و ولد در شرایطی اتفاق می‌افتد که مقادیر سه متغیر مذکور به ترتیب برابر با ۰/۰۹، ۰/۰۹ و ۰/۴ باشد. در این حالت، بر اساس محاسبات تحقیق، کمترین نرخ بحرانی

زاد و ولد برابر ۴/۱۲ به دست می‌آید. البته نرخ بحرانی زاد و ولد در بخش ۴-۴ برابر با ۰/۰۶۱۵ به دست آمد. بنابراین، اگر نرخ زاد و ولد بین ۴/۱۲ و ۶/۱۵ درصد باشد، باز هم تأثیر مثبت افزایش نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی محتمل است. نتیجه دیگری که از جدول (۵) به دست می‌آید این است که با افزایش ضریب هزینه نگهداری فرزند، نرخ بحرانی زاد و ولد کاهش می‌یابد. بنابراین، اگر به هر دلیلی در آینده سهم هزینه‌های نگهداری فرزند در سبد هزینه‌های خانوار و همین‌طور نرخ زاد و ولد هر دو افزایش فوق‌العاده‌ای داشته باشند، افزایش نرخ زاد و ولد می‌تواند موجب کاهش پرداخت بازنشستگی تعادلی و بدتر شدن پایداری سیستم بازنشستگی شود. به‌طور مثال، بر اساس محاسبات این تحقیق اگر در آینده ضریب هزینه نگهداری فرزند برابر ۰/۲ شود، با فرض عدم تغییر سایر شرایط، نرخ بحرانی زاد و ولد ۳/۰۸ درصد خواهد بود و در آن شرایط اگر نرخ زاد و ولد در کشور بیشتر از ۳/۰۸ درصد باشد، افزایش نرخ زاد و ولد موجب کاهش پرداخت بازنشستگی تعادلی و بدتر شدن پایداری سیستم بازنشستگی خواهد شد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

هدف این تحقیق، بررسی تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی با استفاده از الگوی نسل‌های همپوشان است. در این تحقیق از شاخص پرداخت بازنشستگی برای پایداری سیستم بازنشستگی استفاده شد. هرچه پرداخت بازنشستگی که سیستم بازنشستگی می‌تواند در حالت تعادل پرداخت کند کاهش یابد، این مسئله نشان‌دهنده کاهش توانایی مالی سیستم و ضعف آن در انجام تعهدات آن در قبال افراد بازنشسته است که به معنای ناپایداری سیستم بازنشستگی است. یکی از نتایج مهم این تحقیق در مورد ایران که می‌تواند برای سایر کشورها هم بررسی شود، وجود یک مقدار نرخ زاد و ولد بحرانی است که تا زمانی که نرخ زاد و ولد به آن حد نرسیده است، تأثیر افزایش نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی مثبت است و پس از رسیدن نرخ زاد و ولد به این حد، شرایط تغییر می‌کند و افزایش نرخ زاد و ولد از آنجا به بعد تأثیر منفی بر پایداری سیستم بازنشستگی خواهد داشت.

افزایش نرخ زاد و ولد اثرات مختلفی بر پایداری سیستم بازنشستگی دارد. از یک سو بر اساس اثر انتقال بین‌نسلی با افزایش نرخ زاد و ولد، تعداد افرادی که از درآمد خود، کسورات بازنشستگی را پرداخت می‌کنند افزایش می‌یابد و از طرفی با افزایش نرخ زاد و ولد بر اساس اثر رقیق‌شدن سرمایه، سرمایه سرانه و در نتیجه درآمد سرانه و میزان کسورات بازنشستگی کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش نرخ زاد و ولد، افزایش هزینه‌های نگهداری فرزندان می‌تواند بر رفتارهای اقتصادی افراد در مورد مصرف و پس‌انداز، و در نتیجه سرمایه سرانه تأثیر گذارد. تا زمانی که نرخ زاد و ولد در یک محدوده متعارف قرار دارد اثر انتقال بین‌نسلی غالب بوده و افزایش نرخ زاد و ولد تأثیر مثبت بر پایداری سیستم بازنشستگی دارد، ولی در شرایط خاصی که نرخ زاد و ولد از حد معینی بالاتر رود (که به‌ندرت برای کشورها اتفاق می‌افتد) اثرات منفی افزایش نرخ زاد و ولد بر پرداخت‌های بازنشستگی بروز پیدا می‌کند.

بر اساس نتایج این تحقیق، تأثیر نرخ زاد و ولد بر پایداری سیستم بازنشستگی بیش از همه متأثر از نسبت هزینه‌های نگهداری فرزند به درآمد خانوار است. هزینه‌های نگهداری فرزند یکی از متغیرهای مهم الگوی تحقیق است؛ زیرا قید مهمی برای مصرف و پس‌انداز فرد است. بنابراین، مقدار هزینه‌های نگهداری فرزند عامل مهمی در تعیین میزان پرداخت بازنشستگی است.

بر اساس نتایج به‌دست‌آمده، به‌ازای مقادیر مختلف ضریب هزینه نگهداری فرزند مقادیر گوناگونی برای نرخ بحرانی زاد و ولد به‌دست می‌آید. علاوه بر این، نتیجه تحقیق تا حدودی متأثر از تغییرات سهم پرداختی برای بازنشستگی و سهم سرمایه در تولید نیز است و در مجموع با در نظر گرفتن تغییرات متغیرها، کمترین نرخ بحرانی زاد و ولد ۴/۱۲ درصد به‌دست آمد. بنابراین، در شرایط کنونی کشور تا زمانی که نرخ زاد و ولد کمتر از ۴/۱۲ درصد باشد با اطمینان زیادی می‌توان گفت که تغییر نرخ زاد و ولد تأثیر مستقیمی بر پرداخت بازنشستگی تعادلی و پایداری سیستم بازنشستگی خواهد شد. متأسفانه همان‌طور که اشاره شد، بر اساس پیش‌بینی‌های انجام‌شده در مورد زاد و ولد

در دهه‌های پیش‌رو بدون اجرای سیاست‌های تشویقی زاد و ولد، نرخ زاد و ولد کاهش یافته و در این صورت، پدیده سالمندی جمعیت آثار مخربی بر پایداری سیستم بازنشستگی خواهد داشت. از این رو، اجرای سیاست‌های تشویقی زاد و ولد در سال‌های آینده بسیار ضروری است.

منابع

- بانک مرکزی (۱۳۹۴)، حساب‌های ملی سالانه، پایگاه اینترنتی بانک مرکزی به نشانی:
<http://www.cbi.ir/simplelist/2054.aspx>
- بهرامی، جاوید و نیره سادات قریشی (۱۳۹۰)، «تحلیل سیاست پولی در اقتصاد ایران با استفاده از یک مدل تعادل عمومی پویای تصادفی»، فصل‌نامه مدل‌سازی اقتصادی، ۱ (۱۳): ۱-۲۲.
- تقوی، مهدی و اسماعیل صفرزاده (۱۳۸۸)، «نرخ بهینه رشد نقدینگی در اقتصاد ایران در چارچوب الگوهای تعادل عمومی پویای تصادفی کینزی جدید (DSGE)»، فصل‌نامه مدل‌سازی اقتصادی، ۳ (۹): ۱۰۴-۷۷.
- دشتیان فاروجی، مجید؛ صمدی، سعید؛ دلالی اصفهانی، رحیم؛ فخار، مجید و مهنوش عبدالله میلانی (۱۳۸۹)، «شبیه‌سازی یک الگوی نسل‌های همپوشان ۵۵ دوره‌ای با رویکرد بهسازی نظام بازنشتگی ایران»، فصل‌نامه تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی، ۲: ۲۰۳-۱۷۳.
- دشتیان، مجید و امیر جباری (۱۳۹۳)، «ارائه نظام بازنشتگی اندوخته جزئی به‌عنوان یک نهاد مالی در قالب یک الگوی نسل‌های همپوشان ۵۵ دوره‌ای»، دو فصل‌نامه اقتصاد و توسعه منطقه‌ای، ۷: ۱۹۳-۱۶۳.
- روغنی‌زاده، مصطفی (۱۳۸۴)، تحلیل ریاضی بر وضعیت صندوق‌های بازنشتگی ایران و طراحی سیستم بهینه برای صندوق‌های یادشده، قم: انتشارات صحفی، ۱۳۵ صفحه.
- سازمان ثبت‌احوال کشور (۱۳۹۴ الف)، سال‌نامه‌های آماری ۱۳۹۰، ۱۳۹۱، ۱۳۹۲، ۱۳۹۳، پایگاه اینترنتی سازمان ثبت‌احوال کشور به نشانی:
<https://www.sabteahval.ir/avej/default-1499.aspx>
- مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ الف)، سرشماری نفوس و مسکن سال‌های ۱۳۵۵، ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰، پایگاه اینترنتی نشریات مرکز آمار ایران به نشانی:
<http://amar.sci.org.ir/PlanList.aspx>

مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ب)، جداول متوسط انواع هزینه‌های خوراکی و غیر خوراکی سالانه خانوارهای شهری و روستایی برحسب وسعت خانوار در سال ۱۳۹۰، پایگاه اینترنتی شبکه ملی آمار به نشانی:

http://www.sci.org.ir/SitePages/report_90/amar.aspx

مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ج)، درصد خانوارهای شهری و روستایی برحسب وسعت خانوار در هر یک از گروه‌های هزینه سالانه - سال ۱۳۹۰، پایگاه اینترنتی شبکه ملی آمار به نشانی:

http://www.sci.org.ir/SitePages/report_90/amar.aspx

مرکز آمار ایران (۱۳۹۴د)، تعداد خانوارهای کشور برحسب نقاط شهری و روستایی به تفکیک استان - ۱۳۹۰، پایگاه اینترنتی شبکه ملی آمار به نشانی:

http://www.sci.org.ir/SitePages/report_90/amar.aspx

مرکز آمار ایران (۱۳۹۴ه)، نسبت وابستگی جمعیت کشور، پایگاه اینترنتی درگاه ملی آمار به نشانی:

<http://www.amar.org.ir>

مرکز آمار ایران (۱۳۹۴و)، ولادت ثبت شده کشور برحسب جنس متولدین از سال ۱۳۴۴ تا ۱۳۸۵، پایگاه اینترنتی درگاه ملی آمار به نشانی:

<http://www.amar.org.ir>

مشفق، محمود؛ محمودی، محمدجواد و نادر مطیع حق شناس (۱۳۹۱)، «چشم‌انداز تحولات جمعیتی ایران: لزوم تجدیدنظر در سیاست‌های جمعیتی»، *مطالعات راهبردی زنان*، ۵۵: ۱۷۲-۱۵۱.

نیرومند، محمدرضا (۱۳۸۶)، *معرفی طرح‌های بازنشستگی: طرح‌های کارفرما - پشتیبان*، تهران، سازمان بازنشستگی کشوری، ۲۸ صفحه.

Artige, Lionel & Cavenaile, Laurent & Pestieau, Pierre (2014), "The Macroeconomics of PAYG Pension Schemes in an Aging Society," CORE Discussion Papers 2014033, Université Catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE).

Cerda R. (2003), "Social Security Financial Crises," *Documentos de Trabajo* 252, Instituto de Economía. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Cerda R. (2005), "On Social Security Financial Crises," *Journal of Population Economics*, 18: 509-517.

- Cipriani, G. P. (2014), "Population Aging and PAYG Pensions in the OLG Model", *J Popul Econ*, 27: 251–256.
- Fanti L., Gori L. (2012), "Fertility and PAYG Pensions in the Overlapping Generations Model", *J Popul Econ*, 25: 955–961.
- Verbic M., Spruk R. (2011), "Aging Population and Public Pensions: Theory and Evidence", Institute for Economic Research: Working Paper No. 58.
- Yoon, Y. & Talmain, G. (2001), "Endogenous Fertility, Endogenous Growth and Public Pension System: Should We Switch from a Pay-As-You-Go to a Fully Funded System", *The Manchester School*, 69(5): 586–605.
- Zhao J. K. (2011), "Social Security, Differential Fertility and the Dynamics of the Earnings Distribution", *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 11(1): 1-31.

ضمیمه (۱): توضیح و اثبات روابط الگوی تحقیق

توضیح و اثبات رابطه (۲): مطابق رابطه (۲) نسبت θ از دستمزد فرد جوان به عنوان کسورات بازنشستگی کسر می‌شود و مقدار qw_t صرف هزینه‌های هر یک از فرزندان و در مجموع مقدار $qw_t n$ صرف هزینه‌های تمام فرزندان می‌شود و همین‌طور فرد جوان بخشی از دستمزد (S_t) را پس‌انداز می‌کند و مابقی در آمد خود را در دوره جوانی مصرف می‌کند. بنابراین، مصرف فرد در دوره جوانی به صورت رابطه زیر است:

$$c_a^t = w_t(1-\theta) - s_t - qw_t n$$

توضیح و اثبات رابطه (۳): هر فرد در دوره پیری، اصل پس‌انداز دوره جوانی و سود حاصل از سرمایه‌گذاری آن در دوره پیری و همین‌طور حقوق بازنشستگی خود را مصرف می‌کند. اگر تعداد افراد جوان دوره t را با N_t نشان دهیم، مجموع اصل پس‌انداز و سود حاصل از سرمایه‌گذاری این افراد در دوره پیری برابر با $N_t(1 + R_{t+1})S_t$ است. اما چون احتمال زنده ماندن افراد جوان تا دوره پیری π فرض شده، از این تعداد فقط $N_t\pi$ نفر به دوره پیری می‌رسد و چون هیچ مکانیزم ارثی در الگو وجود ندارد فرض می‌شود که مجموع اصل پس‌انداز و سود حاصل از سرمایه‌گذاری آن به‌طور یکسان میان افراد پیر دوره $t+1$ تقسیم می‌شود و در نتیجه سهم هر یک از افراد پیر دوره $t+1$ برابر با $(1 + R_{t+1})S_t/\pi$ است. بنابراین، مصرف فرد در دوره پیری به صورت رابطه زیر است:

$$c_o^t = (1 + R_{t+1})S_t/\pi + P_{t+1}$$

توضیح و اثبات رابطه (۴): با جای‌گذاری مقادیر مصرف فرد در دوره‌های جوانی و پیری از روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱)، مطلوبیت انتظاری طول‌عمر یک جوان متولد در دوره t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U^t = \ln(w_t(1-\theta) - s_t - qw_t n) + \beta\pi \ln((1 + R_{t+1})S_t/\pi + P_{t+1})$$

مشتق جزئی تابع فوق را نسبت به S_t گرفته و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-1}{w_t(1-\theta) - s_t - qw_t n} + \frac{\beta(1 + R_{t+1})}{(1 + R_{t+1})S_t/\pi + P_{t+1}} = 0$$

با حل معادله به دست آمده، تابع پس‌انداز فرد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_t = \frac{\beta w_t (1 - \theta - qn)}{\frac{1}{\pi} + \beta} - \frac{P_{t+1}^e}{\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)(1 + R_{t+1}^e)}$$

توضیح و اثبات رابطه (۵): اگر تعداد افراد جوان دوره t را با N_t نشان دهیم، کل دریافتی‌ها از جمعیت جوان دوره t برابر است با $N_t \theta w_t$ که باید به افراد پیر دوره t به عنوان پرداخت بازنشستگی پرداخت شود. از طرفی افراد پیر دوره t همان افراد جوان دوره $t-1$ هستند که تا دوره پیری زنده مانده‌اند و بنابراین تعداد آنها برابر با $N_{t-1} \pi$ است. بنابراین داریم:

$$P_t N_{t-1} \pi = N_t \theta w_t$$

با توجه به اینکه نرخ زاد و ولد نسل جوان به صورت نسبت تعداد متولدین در هر دوره به جمعیت افراد جوان آن دوره تعریف شد، رابطه زیر برقرار است:

$$N_t = n N_{t-1}$$

به صورت زیر از دو رابطه اخیر مقدار پرداخت بازنشستگی به هر یک از افراد پیر دوره به دست می‌آید:

$$P_t = \frac{\theta n w_t}{\pi}$$

توضیح و اثبات رابطه (۶): بر اساس الگوی تحقیق، مجموع پس‌انداز جوانان هر دوره به سرمایه دوره بعد تبدیل می‌شود. بنابراین، پس‌انداز دوره t ($N_t s_t$) برابر با سرمایه دوره $t+1$ ($N_{t+1} k_{t+1}$) می‌شود. بنابراین، رابطه زیر برقرار است:

$$N_t s_t = N_{t+1} k_{t+1}$$

از طرفی بین جمعیت جوانان دوره‌های t و $t+1$ رابطه زیر برقرار است:

$$N_{t+1} = n N_t$$

با استفاده از دو رابطه اخیر، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$s_t = n k_{t+1}$$

توضیح و اثبات رابطه (۷): مقدار P_{t+1}^e از رابطه (۵) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_{t+1}^e = \frac{\theta n w_{t+1}^e}{\pi}$$

با قراردادن مقدار P_{t+1}^e از رابطه فوق در رابطه (۴)، تابع پس‌انداز فرد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_t = \frac{\beta w_t (1 - \theta - qn)}{\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)} - \frac{\theta n w_{t+1}^e}{\pi \left(\frac{1}{\pi} + \beta\right) (1 + R_{t+1}^e)}$$

با قراردادن مقدار S_t از رابطه فوق در رابطه (۶)، سرمایه سرانه در دوره $t+1$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$k_{t+1} = \frac{\beta w_t (1 - \theta - qn)}{n \left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)} - \frac{\theta w_{t+1}^e}{\pi \left(\frac{1}{\pi} + \beta\right) (1 + R_{t+1}^e)}$$

توضیح و اثبات روابط (۸) و (۹): با فرض تابع تولید کاب - داگلاس به صورت $Y_t = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$ و همین‌طور با فرض اینکه در بازارهای عوامل تولید، شرایط رقابت کامل برقرار است، سود حاصل از تولید هر بنگاه به صورت زیر است:

$$\varphi = Y_t - R_t K_t - w_t N_t$$

که در رابطه فوق، R_t نرخ بازدهی سرمایه‌گذاری (نرخ بهره) و w_t نرخ دستمزد است. با قراردادن تابع تولید در رابطه فوق، سود بنگاه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha} - R_t K_t - w_t N_t$$

با فرض اینکه هر بنگاه به دنبال حداکثر کردن سود خود است، برای یافتن شرایط بهینه بنگاه، از رابطه فوق، یک‌بار نسبت به K_t و بار دیگر نسبت به N_t مشتق گرفته و هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم و به این ترتیب روابط زیر به دست می‌آید:

$$A\alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} - R_t = 0$$

$$A(1-\alpha)k_t^\alpha N_t^{-\alpha} - w_t = 0$$

و از روابط فوق، شرایط بهینه بنگاه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_t = A\alpha k_t^{\alpha-1} \quad (۸)$$

$$w_t = A(1-\alpha)k_t^\alpha \quad (۹)$$

توضیح و اثبات رابطه (۱۰): از روابط (۸) و (۹) مقادیر دستمزد را در دوره‌های t و $t+1$ و مقدار نرخ بهره را در دوره $t+1$ به دست آورده و در رابطه (۷) قرار می‌دهیم و به رابطه زیر می‌رسیم:

$$k_{t+1} = \frac{\beta A(1-\alpha)k_t^\alpha(1-\theta-qn)}{n\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)} - \frac{\theta A(1-\alpha)k_{t+1}^\alpha}{\pi\left(\frac{1}{\pi} + \beta\right)(1 + A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})}$$

توضیح و اثبات رابطه (۲۰):

$$\text{نرخ زاد و ولد نسل جوان} = \frac{\text{تعداد متولدین}}{\text{تعداد افراد جوان}} = \frac{\text{تعداد متولدین}}{\text{کل جمعیت}} \times \frac{\text{کل جمعیت}}{\text{تعداد افراد جوان}} =$$

$$= \left(1 + \frac{\text{جمعیت غیر فعال}}{\text{جمعیت فعال}}\right) \times \text{نرخ زاد و ولد} = \text{نسبت وابستگی} \times \left(1 + \frac{\text{جمعیت غیر فعال}}{\text{جمعیت فعال}}\right)$$