

## تعیین ضرایب معادله غیر خطی جریان در پی‌های آبرفتی درشت دانه

جلال بازرگان\* و حبیب اله بیات\*\*

دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۷۹/۳/۲۸ - دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۱۲/۵)

چکیده - به دلیل محدودیت کاربری قانون دارسی ( $V=ki$ ) برای رژیمهای جریان آرام - خطی در محیطهای متخلخل با عنایت به این حقیقت که در آبرفتهای درشت دانه عدد رینولدز از مقدار بحرانی خود تجاوز می‌کند، از معادله معروف به لاپلاس برای تحلیل دقیق پی‌های درشت دانه نمی‌توان استفاده کرد. لذا رابطه عمومیتری برای چنان مواردی لازم است. یکی از روابط مطرح بین گرادیان پیزومتريک ( $i$ ) و سرعت ظاهری ( $V$ ) در محیطهای متخلخل که عموماً به صورت  $i = mV^n$  نشان داده می‌شود، به معضل ضرورت انجام آزمایشهای پیچیده‌ای برای تعیین  $m$ ,  $n$  منجر می‌شود. نشان داده می‌شود که از ترکیب رابطه یاد شده و معادله پیوستگی، معادله دیفرانسیلی قابل حصول است که ارتفاع پیزومتري و تابع پتانسیل  $\phi$  را به دست دهد که متعاقباً منجر به توزیع زیر فشار و مقادیر نشت در محیطهای متخلخل شوند. برای مقابله با مشکلات مرتبط با برآورد  $m$ ,  $n$  در مدل ریاضی و در پی انجام یک برنامه پژوهشی گسترده، روشی جدید و قابل اعتماد برای تعیین آنها با بهره‌گیری از آزمایش ساده پمپاژ پله‌ای توسعه داده و تشریح شده است. کاربرد مقایسه‌ای روش مذکور برای سفره بسته مفروضی نیز آزموده شده است. یافته‌ها حاکی از آن هستند که روش پیشنهادی اولاً امکان استفاده از یک معادله دیفرانسیلی برای جریانهای آشفته در محیطهای متخلخل را فراهم آورده، ثانیاً تعیین پارامترهای معادله غیر خطی ( $m, n$ ) را با دقت مناسبی میسر می‌سازد. مقادیر محاسبه شده پارامترهای یاد شده نیز ارائه شده‌اند.

واژگان کلیدی: جریان آشفته، سنگریز، پی آبرفتی، عدد رینولدز، سفره

## Determination of the Nonlinear Equation Coefficients for Flow through Coarse Alluvium Foundations

J. Bazargan and H. Bayat

Department of Civil Engineering, Amirkabir University of Technology

**Abstract:** As a result of the limitations in the application of Darcy Law ( $V=ki$ ) to linear-laminar flow regimes through porous media and due to the fact that in coarse alluviums, the Reynolds number may exceed its critical value, the so-called Laplas equation can not be used for precise analyses of coarse granular foundations. A more general relationship is, therefore, required for such cases. However, a common relationship between piezometric gradient "i" and the approach velocity "v" within porous media shown as  $i=mV^n$  leads to major difficulties in undertaking complicated tests to determine the values of m and n. It is shown that by combining the above-mentioned relationship with the continuity equation, a differential equation may be obtained to give piezometric head and a potential function  $\phi$ , which, in turn, leads to the uplift force distributions and the seepage quantities

\*\* - دانشیار

\* - استادیار

through porous media. To overcome difficulties associated with  $m$  and  $n$  estimations in the model and as a result of fulfilling an extensive research programme, a fresh and reliable procedure has been developed and explained to assess  $m$  and  $n$  by means of a simple stepped pump-out test. The practical applicability of the method for a given confined aquifer is also examined. Findings indicates that the proposed procedure a) makes the use of the differential equation for turbulent flow in porous media possible, and b) provides means to determine the nonlinear equation parameters ( $m$  &  $n$ ) at an acceptable precision. The computed values of the parameters are also submitted.

**Keywords:** Turbulent flow, Rock fill, Alluvium foundation, Reynolds number, Aquifer

## فهرست علائم

a	پارامتر خطی	m	ثابت
b	پارامتر غیر خطی	n	توان
B	ضخامت سفره بسته	$N=l/n$	
c	ثابت مصالح	Q	دبی
d	مشخصه طول مصالح	Re	عدد رینولدز
Fr	عدد فرود	$Re_c$	عدد رینولدز بحرانی
f	ضریب اصطکاک	$Re_t$	عدد رینولدز در آستانه وضعیت کاملاً آشفته
g	شتاب ثقل	$r_j$	فاصله پیزومتر زام از چاه اصلی
H	رابطه ریاضی به دست آمده از رگرسیون برای ارتفاع پیزومتری	V	سرعت ماکروسکوپی جریان
$h_j$	ارتفاع مشاهده شده در پیزومتر زام	$\mu$	گرانروی دینامیکی سیال
h	ارتفاع پیزومتری	v	گرانروی سینماتیکی سیال
i	گرادیان هیدرولیکی	$\rho$	جرم مخصوص سیال
K	ضریب نفوذپذیری	$\phi$	تابع اسکالری که معادل است با $h(l/m)$
k	نفوذپذیری ذاتی مصالح		

## ۱- مقدمه

هر چند رابطه داری در برخی از کارهای مهندسی عمران کاربرد دارد [۱۰] ولی محدوده اعتبار آن چندان هم گسترده نیست. در شرایطی که سرعت جریان در داخل حفره‌های بین سنگدانه‌ها افزایش یابد، جریان از حالت آرام خارج شده و به صورت انتقالی و یا آشفته در می‌آید. در چنین شرایطی عدد رینولدز از مقدار بحرانی خود تجاوز کرده و قانون داری اعتبار خود را از دست می‌دهد [۱-۶]. نتایج آزمایشات متعدد انجام شده توسط محققان مختلف و نگارندگان این مقاله [۱۱]، نشان می‌دهند که جریان آب در درون بسترهای آبرفتی درشت دانه و همچنین پی‌های سنگی و با درز و شکافهای بزرگ و همگن می‌تواند ناآرام شده و رفتار هیدرولیکی جریان از قانون داری

پیروی نکند. تعدادی دیگر از موارد کاربرد جریان آشفته در داخل مصالح درشت دانه (یا مصالح سنگی با درز و شکافهای بزرگ و زیاد) در زیر سطح زمین عبارت‌اند از:

- ۱- جریان به طرف چاههای آب، بالاخص در نزدیکی جداره چاهها.
- ۲- جریان نفت و یا گاز به طرف چاههای نفت.
- ۳- جریان گاز به طرف چاههای گاز.
- ۴- جریان در سفره‌های زیر زمینی بسته و در سازنده‌های سخت و درشت دانه که تحلیل منطقی از کلیه این موارد معمولاً مورد نیاز است.

از آنجایی که مصالح پی سدها به صورت دست نخورده و در زیر سطح زمین باقی می‌مانند، لذا برای تعیین پارامترهای معادله

هیدرولیکی و  $V$  سرعت ظاهری جریان در داخل مصالح متخلخل است.

ب- معادله نمایی لی و همکاران<sup>۲</sup>

$$i = mV^n \quad (2)$$

که در آن  $n, m$  توسط محققان مختلف به شکلهای گوناگونی تعریف شده اند. در حالت کلی می توان گفت که  $n, m$  به خصوصیات مصالح و سیال و سرعت جریان (یا عدد رینولدز) بستگی دارند و در هر مصالح خاص و برای محدوده نسبتا مشخصی از عدد رینولدز با تقریب مناسبی می توان ضریب  $n, m$  را ثابت در نظر گرفت [۱۲].

نتایج تحقیقات مختلف نشان [۲] داده است که معادله (۱) برای تمامی مقادیر اعداد رینولدز، جامعتر و دقیقتر است. در صورتی که معادله (۲) فقط برای دامنه محدودی از اعداد رینولدز دارای دقت کافی است.

وارد<sup>۳</sup> با تحلیل ابعادی و احمد و سونادا<sup>۴</sup> نیز با استفاده از معادله ناویر استوکس برای جریانهای ماکروسکوپی یک بعدی نشان دادند که پارامتر خطی  $a$  و پارامتر غیر خطی  $b$  معادله (۱) را می توان به صورت زیر نوشت [۲، ۳ و ۵]:

$$a = \frac{\mu}{\rho g k} \quad (3)$$

$$b = \frac{1}{g\sqrt{ck}} \quad (4)$$

که  $\mu$  گرانیوی دینامیکی سیال،  $\rho$  جرم مخصوص سیال،  $g$  شتاب ثقل،  $k$  نفوذپذیری ذاتی مصالح،  $c$  ثابت بی بعد مصالح و  $d$  پارامتر مشخصه طول مصالح است که بیانگر قطر موثر حفرات است که توسط معادله  $k = cd^2$  به همدیگر مرتبطاند. بنابراین دیمانسیون  $k$  برابر  $L^2$  است. می توان تعریف زیر را برای عدد رینولدز پیشنهاد کرد:

$$Re = \frac{V.d}{\nu} \quad (5)$$

که در آن  $\nu$  گرانیوی سینماتیکی سیال است. معادله (۱) را با توجه به معادلات (۳) و (۴) به صورت زیر می توان مرتب کرد.

$$i = \frac{V^2}{gcd} \left(1 + \frac{1}{Re}\right) \quad (6)$$

جریان غیر داری لازم است که پس از حفر گمانه های شناسایی و چاهکهای مشاهداتی (پیزومترها)، آزمایشات صحرایی مناسبی طراحی و انجام شوند. این آزمایشها دامنه نسبتا وسیعی از اعداد رینولدز را پوشش داده و رابطه بین گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان را با دقت مناسبی تعیین می کنند.

از طرفی تعاریف متفاوتی از عدد رینولدز توسط محققان مختلف ارائه شده و مقدار عدد رینولدز بحرانی برای مصالح گوناگون به طور متفاوتی گزارش شده است. تحقیقات اخیر [۲] و نتایج آزمایشات انجام شده (به عنوان بخشی از پژوهشهای دوره دکترا) توسط نگارندگان این مقاله، نشان می دهند که عدد رینولدز بحرانی تابعی از جنس سیال و خصوصیات مصالح متخلخل از قبیل: قطر و شکل سنگدانه ها، منحنی دانه بندی، تخلخل، پیچ و خم مسیر جریان در داخل مصالح متخلخل و... است.

بنابراین آزمایشاتی که برای تعیین پارامترهای جریان غیر داری در هر مصالح خاص در پی سازی، طراحی و انجام می شوند، بایستی چنان باشند که بتوان عدد رینولدز بحرانی خاص آن مصالح را نیز تعیین کنند.

## ۲- مبانی نظری

### ۲-۱- معادله بین گرادیان هیدرولیکی (i) و سرعت متوسط جریان (V)

برای تحلیل جریان در درون سنگدانه ها و حل معادله انرژی لازم است که افت اصطکاکی جریان در طول مسیر را تعیین کرد. معادلات مختلفی برای برآورد گرادیان هیدرولیکی (i)، (یا افت انرژی در واحد طول مسیر جریان) بر حسب سرعت جریان (V)، (مشابه جریان در درون لوله ها و کانالها) توصیه شده است که در حالت کلی معادلات توصیه شده را به صورت زیر می توان نشان داد [۲-۱۲]:

الف- معادله دو جمله ای فرش هایمر<sup>۱</sup>

$$i = aV + bV^2 \quad (1)$$

که در آن  $a, b$  ضرایب ثابت مربوط به مصالح،  $i$  گرادیان

می‌دهند. معادله فوق با معلوم بودن شرایط مرزی و مقدار  $n$  قابل حل بوده و با داشتن  $m, n$ ، مقادیر ارتفاع پیزومتری در نقاط مختلف جریان (گره‌های تعریف شده در محدوده اشباع محیط متخلخل) به راحتی قابل محاسبه است. هم‌نه‌های بردار سرعت ظاهری جریان در جهات  $y, x$  توسط معادلات زیر بیان می‌شوند [۷-۸]:

$$V_x = \varphi_x (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{(N-0.5)} \quad (13)$$

$$V_y = \varphi_y (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{(N-0.5)} \quad (14)$$

لازم به ذکر است که تحقیقات انجام شده نشان می‌دهند که برای هر دامنه محدودی از اعداد رینولدز می‌توان با تعریف  $n, m$  متناسب (با آن دامنه اعداد رینولدز) معادلات (۱۲) تا (۱۴) را حل کرده و جوابهای بسیار امیدوارکننده‌ای را به دست آورد [۸]. معادلات (۱۲) تا (۱۴) با استفاده از روشهای عددی قابل حل‌اند. با حل معادله (۱۲) می‌توان مقادیر  $\varphi$  و سپس  $h$  را در گره‌های مختلف پیدا کرد و آن‌گاه مقدار نیروی زیر فشار را در هر بخش مورد نظر به دست آورد. همچنین با داشتن بردارهای سرعت در نقاط مختلف جریان (گره‌های تعریف شده در محدوده اشباع محیط متخلخل) می‌توان علاوه بر محاسبه دبی جریان، خطوط جریان را نیز به دست آورد. هرچند که حل معادلات (۱۲) تا (۱۴) با استفاده از روش اجزای محدود (F.E.M) نیز امکانپذیر است [۹]، ولی در اینجا برای اختصار فقط خلاصه‌ای از فرمولبندی لازم در روش تفاضلهای محدود (F.D.M) بیان می‌شود.

### ۳- مدل‌سازی ریاضی در روش (F.D.M)

روش مناسبی برای حل معادله (۱۲) در یک سیستم مربعی با به کار بردن تقریب متوالی وجود دارد. در این روش مشتقات تابع  $\varphi$  به صورت تقریبی ذیل محاسبه می‌شوند [۷ و ۱۳]:

$$\varphi_x = (\partial\varphi / \partial x) = \frac{(\varphi_1 - \varphi_5)}{(2S)} \quad (15)$$

$$\varphi_y = (\partial\varphi / \partial y) = \frac{(\varphi_3 - \varphi_7)}{(2S)} \quad (16)$$

$$\varphi_y \text{ at } 5 = (\partial\varphi / \partial y) = \frac{(\varphi_4 - \varphi_6)}{(2S)} \quad (17)$$

و با تعریف عدد فرود (Fr) یعنی:

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gcd} \quad (7)$$

می‌توان نوشت:

$$i = (Fr^2) \cdot (1 + \frac{1}{Re}) \quad (8)$$

و با تعریف ضریب اصطکاک ( $f$ ) جریان به صورت:

$$f = 1 + \frac{1}{Re} \quad (9)$$

معادله (۸) را به صورت زیر می‌توان مرتب کرد:

$$i = (Fr^2) \cdot f \quad (10)$$

و یا به عبارتی داریم:

$$i = f \cdot (\frac{V^2}{gcd}) \quad (11)$$

معادله (۱۱) که همان شکل پارامتری معادله (۲) است را با دقت بسیار مناسبی می‌توان برای تمام محدوده اعداد رینولدز و برای تعیین پارامترهای  $m, n$  به کار برد. برای تعیین ضرایب  $a, b$  و یا  $k, c$  بایستی با استفاده از آزمایشات لازم، مقادیر مختلف گرادیان هیدرولیکی ( $i$ ) ایجاد شده در درون مصالح مورد نظر و سرعت متوسط جریان ( $V$ ) متناظر آن را اندازه‌گیری کرد. سپس با برازش منحنی دو جمله‌ای معادله (۱) از بین داده‌های زوجهای مرتب ( $i, V$ )، مقادیر  $a, b$  و آن‌گاه  $k, c$  را به دست آورد.

### ۲-۲- تحلیل جریان غیرداری در داخل مصالح متخلخل

پارکین<sup>۰</sup> برای اولین بار با استفاده از معادله (۲) و معادله پیوستگی معادله زیر را به عنوان جانشین معادله لاپلاس برای تحلیل جریانهای غیر داری به دست آورد [۷ و ۸]:

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + (N-1)\{(\varphi_x^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (\varphi_y^2)\varphi_{yy}\} = 0 \quad (12)$$

که در آن  $N = \frac{1}{n}$  و  $\varphi$  یک تابع اسکالری است که طبق معادله  $\varphi = (\frac{1}{m})h$  بیان می‌شود که در آن  $h$  ارتفاع پیزومتری است.  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  مشتقات تابع  $\varphi$  را به ترتیب در جهات  $x, y$  نشان

هشت نقطه اطراف آن معلوم باشد. لذا لازم است مقادیر اولیه  $\varphi$  برای تمام نقاط جریان به صورت فرضی در نظر گرفته شوند. برای تخمین مقادیر فرضی  $\varphi$  در نقاط مورد نظر، می توان شبکه جریان را به صورت دستی رسم کرد و پس از تعیین مقادیر ارتفاع پیرومتری در هر نقطه به صورت تقریبی، مقادیر  $\varphi$  را از معادله  $\varphi = \left(\frac{1}{m}\right)h$  تخمین زد و سپس معادله (۲۲) را به صورت تکراری تا رسیدن به جوابهای قابل قبول حل کرد.

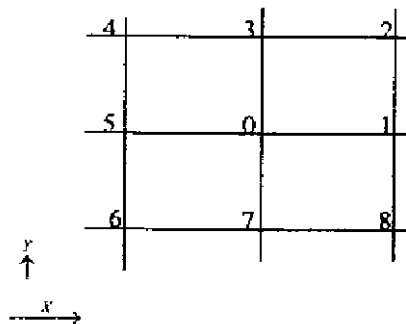
در مورد شرایط مرزی درون پی های درشت دانه های سدها لازم است به نکات زیر توجه کرد:

۱- در سراب و پایاب بدنه سد و در فواصل نسبتاً دور از محور آن، با رعایت تراز سطح آب در بالادست و پایین دست و توزیع فشار هیدروستاتیک، مقادیر  $\varphi$  گره ها را از معادله  $\varphi = \left(\frac{1}{m}\right)h$  می توان به دست آورد.

۲- برای مرز بین آبرفت درشت دانه و سطح نفوذ ناپذیر زیرین پی، به علت صفر بودن هم‌نه عمودی سرعت ( $V_y = 0$ ) و با استفاده از معادله (۱۴) می توان از شرط  $(\partial\phi/\partial y=0)$  استفاده کرد. همچنین در فصل مشترک هسته رسی در سدهای خاکی - سنگریزه های و یا سطح زیرین بدنه سدهای بتنی، با مصالح درشت دانه پی نیز، می توان از شرط  $(\partial\phi/\partial y=0)$  استفاده کرد.

#### ۴- تعیین پارامترهای $m, n$ بر حسب ضرایب $k, c$

با استفاده از معادله پیوستگی و معادله (۱)، مستقیماً معادله ای مشابه معادله (۱۲) برای تحلیل جریانهای غیر داریسی توسعه داده نشده است. لیکن به جای آن از شکل پارامتریک معادله (۲) که به صورت معادله (۱۱) به دست آمده و دارای دقت قابل قبولی در تمامی محدوده اعداد رینولدز می باشد، می توان استفاده کرد. در این صورت لازم است که به ازای مقادیر متفاوت سرعت (یا عدد رینولدز) پارامترهای  $m, n$  را از معادله (۱۱) محاسبه کرد. اگر  $Re_c$  عدد رینولدز بحرانی و  $Re_f$  عدد رینولدز نظیر شروع حالت جریان کاملاً آشفته باشد، می توان سه حالت مختلف را به صورت زیر دسته بندی نموده و در



شکل ۱- نمایش شماتیک شبکه و وضعیت گره ها برای استفاده در روش تفاضلهای محدود  
توجه:  $S =$  فاصله بین گره ها است.

$$\varphi_y \text{ at } 1 = (\partial\varphi / \partial y) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_8)}{(2S)} \quad (18)$$

$$\varphi_{xy} \text{ at } 0 = (\partial^2\varphi / \partial x \partial y) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_8 - \varphi_4 + \varphi_6)}{(4S^2)} \quad (19)$$

$$\varphi_{xx} = (\partial^2\varphi / \partial x^2) = \frac{(\varphi_1 - \varphi_0 - \varphi_0 + \varphi_5)}{(4S^2)} \quad (20)$$

$$\varphi_{yy} = (\partial^2\varphi / \partial y^2) = \frac{(\varphi_3 - \varphi_0 - \varphi_0 + \varphi_7)}{(4S^2)} \quad (21)$$

با جایگذاری معادلات (۱۵) تا (۲۱) در معادله (۱۲)، معادله ای بین  $\varphi_0$  و مقادیر  $\varphi$  در هشت نقطه اطراف آن به صورت زیر به دست می آید [۷ و ۱۳]:

$$\varphi_0 = T_1(\varphi_1 + \varphi_5 + \varphi_3 + \varphi_7) + T_2 \times T_3 \quad (22)$$

در جایی که:

$$T_1 = \frac{1}{2(N+1)} \quad (22\text{-الف})$$

$$T_2 = \frac{(N-1)}{2(N+1)} \quad (22\text{-ب})$$

و

$$T_3 = \{(\varphi_1 + \varphi_5)(\varphi_1 - \varphi_5)^2 + 0.5(\varphi_1 - \varphi_5)(\varphi_3 - \varphi_7) \times (\varphi_2 + \varphi_6 - \varphi_4 - \varphi_8) + (\varphi_3 + \varphi_7)(\varphi_3 - \varphi_7)^2\} / \{(\varphi_1 - \varphi_5)^2 + (\varphi_3 - \varphi_7)^2\} \quad (22\text{-ج})$$

پس از تعیین مقادیر  $\varphi$  در نقاط مختلف جریان و ضمن استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶) مقادیر  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  را می توان محاسبه کرد. همچنین با به کار بردن معادلات (۱۳) و (۱۴) مقادیر  $V_x$  و  $V_y$  در نهایت  $V$  قابل محاسبه خواهند بود. با توجه به معادله (۲۲) برای محاسبه مقادیر  $\varphi$  در هر نقطه، بایستی مقدار  $\varphi$  در

معادله (۱۲) است. لذا محاسبات بایستی به صورت سعی و خطا تکرار شوند. به عبارتی بایستی ابتدا با استفاده پارامترهای  $m, n$  فرضی، معادله (۱۲) را حل کرده و سرعت جریان در نقاط مختلف محیط را به دست آورد. سپس  $m, n$  را با توجه به مقادیر به دست آمده سرعت جریان، محاسبه کرده و این سعی و خطا تا رسیدن به همگرایی قابل قبول ادامه داده شود (مانند روش سعی و خطایی که در تعیین ظرفیت لوله مرتبط بین دو مخزن، برای محاسبه ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ انجام می شود).

### ۵- تعیین ضرایب $k, c$ با استفاده از آزمایشات صحرائی پمپاژ در گمانه‌های شناسایی

برای محاسبه ضرایب  $k, c$  کافی است که پارامتر خطی  $a$  و پارامتر غیر خطی  $b$  در معادلات (۳) و (۴) محاسبه شود. بدین منظور باید معادله (۱) از بین داده‌های مختلف  $(i, V)$  برازش داده شود. لذا کافی است، مقادیر مختلف  $i$  و  $V$  متنظر با دبی‌های متفاوت در آزمایش پمپاژ و در حالت جریان پایدار، اندازه‌گیری شود. روش اندازه‌گیری  $i$  و  $V$  در آزمایشات پمپاژ، از چاههای حفر شده در سفره‌های آزاد و سفره‌های بسته نیز ذیلا به اختصار توضیح داده می‌شود.

### ۵-۱- اندازه‌گیری مقادیر مختلف $(i, V)$ در سفره‌های آزاد<sup>۱</sup>

فرض می‌شود مصالح متخلخل سفره همگن و ایزوتروپ و جریان دو بعدی است. پس از حفر گمانه اصلی پمپاژ و چاهکهای مشاهداتی (پیزومترها)، برای اندازه‌گیری زوجهای مرتب  $(i$  و  $V)$  آزمایش پمپاژ پله‌ای را به شرح ذیل انجام می‌دهند:

با بستی توجه داشت که مقادیر  $i, V$  در نزدیکیهای گمانه نسبتا زیاد و در فواصل دورتر کوچک‌اند، با رعایت نکته مذکور در هر دبی خاص، پس از آنکه سطح آب در چاه اصلی و پیزومترها ثابت شد (جریان پایدار شد) تراز سطح آب در چاه اصلی و تمامی پیزومترها قرائت و یادداشت شده و با استفاده

هریک از حالات پارامترهای  $m, n$  را به دست آورد.

الف- اگر  $Re \leq Re_c$  باشد، آن گاه جریان آرام بوده و  $f = \frac{1}{Re}$  و در نتیجه:

$$i = \frac{Fr^2}{Re} \quad (23)$$

با جایگزینی معادلات (۵) و (۷) در معادله (۳) می‌توان نوشت:

$$i = \frac{V^2}{gcd} \cdot \frac{1}{Vd} = \frac{v \cdot V}{gcd^2} = \frac{v}{gk} V \quad (24)$$

از طرفی اگر داشته باشیم:

$$m = \frac{v}{gk} \quad (25)$$

در این صورت  $n=1$  خواهد بود و توجه شود که معادله (۲۴) همان معادله دارسی است.

ب- اگر  $Re_c < Re < Re_t$  باشد، آن گاه جریان در حالت انتقالی بوده و  $f = 1 + \frac{1}{Re}$  و در نتیجه:

$$i = (Fr^2) \cdot (1 + \frac{1}{Re}) = (\frac{V^2}{gcd}) \cdot (\frac{v}{Vd} + 1) \quad (26)$$

و لذا در این حالت  $m=2$  و  $m$  تابعی از  $V$  می‌شود. یعنی:

$$m = (\frac{1}{gcd}) \cdot (\frac{v}{Vd} + 1) \quad (27)$$

ج- اگر  $Re \geq Re_t$  آن گاه  $f \approx 1$  بوده و  $i \approx Fr^2$  است و لذا:

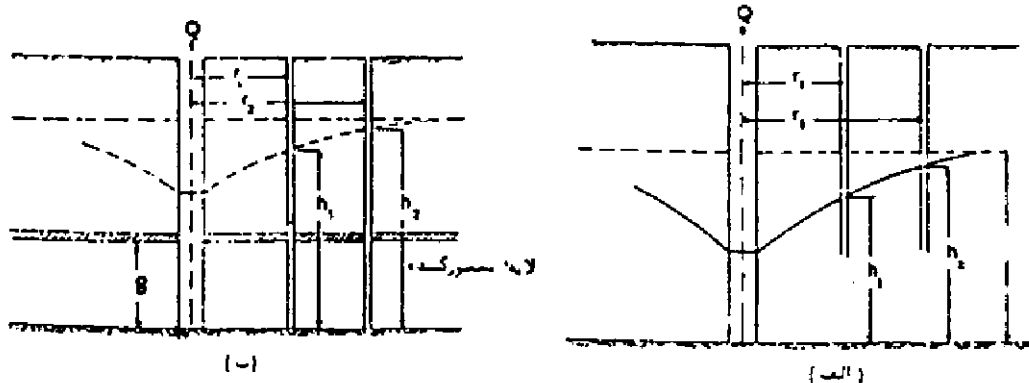
$$i = \frac{V^2}{gcd} \quad (28)$$

که اگر:

$$m \approx \frac{1}{gcd} \quad (29)$$

باشد، در این حالت نیز  $n=2$  خواهد بود.

بدین ترتیب با به دست آمدن ضرایب  $k, c$  پارامترهای  $m, n$  به صورت دقیق قابل محاسبه خواهند بود. عملا در زمان حل معادله (۱۲) توسط رایانه، می‌توان سابروتین جداگانه‌ای برای محاسبه پارامترهای  $m, n$  با استفاده از معادلات (۲۵)، (۲۷) و (۲۹) تدوین کرد تا به ازای مقادیر مختلف سرعت، این پارامترها را با دقت مناسبی محاسبه کرد. از طرفی برای حل معادله (۱۲) و برای محاسبه پارامترهای  $m, n$ ، لازم است که مقدار سرعت  $(V)$  معلوم باشد که خود در گروهی حل



شکل ۲- اندازه گیری  $i$  و  $V$  در سفره‌های آزاد، (ب) در سفره‌های بسته

شرایط پایدار، مقادیر مختلف  $i$  و  $V$  با استفاده از معادلات زیر بدست می‌آیند.

$$i \approx \frac{(h_{j+1} - h_{j-1})}{(r_{j+1} - r_{j-1})} \quad (31)$$

چون سطح مقطع جریان در پیژومتری به شعاع  $r_j$  معادل سطح جانبی استوانه‌ای به قطر  $2r_j$  و ارتفاع  $B$  است. لذا سرعت متوسط قابل محاسبه خواهد بود، (شکل ۲-ب)، یعنی:

$$V_j = \frac{Q}{2\pi B r_j} \quad (33)$$

که در آن  $B$  ضخامت سفره بسته است.

## ۶- مثال موردی از تعیین ضرایب $k, c$ ، برای محاسبه

### پارامترهای $m, n$

برای نشان دادن چگونگی استفاده از روش توسعه داده شده در این پژوهش از توسعه مشاهدات صحرائی حوضچه آرامش سد کرخه بهره‌گیری به عمل آمده است. سفره از نوع بسته و شرایط انجام آزمایش (منتشر نشده) قابل تطبیق برای اهداف نوشتار حاضر بوده است. با استفاده از معادلات (۳۱) و (۳۲) مقادیر گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان، به شرح جدول (۱) زیر به دست آمده است.

برای تعیین ضرایب  $k, c$  ابتدا معادله  $i = aV + bV^2$  از بین داده‌های فوق برازش داده شده تا مقادیر  $a, b$  به دست آیند:

$$a = 170.141 \text{ (s/m)} \quad , \quad b = 2000.75 \text{ (s/m)}^2$$

از معادلات زیر مقادیر  $i$  و  $V$  محاسبه می‌شوند، (شکل ۲- الف)

$$i = \frac{dh}{dr} \approx \frac{(h_{j+1} - h_{j-1})}{(r_{j+1} - r_{j-1})} \quad (30)$$

$$i \approx \frac{(h_{j+1} - h_{j-1})}{(r_{j+1} - r_{j-1})} \quad (31)$$

در پیژومتر  $\lambda$ م سطح مقطع جریان، سطح جانبی استوانه‌ای به قطر  $2r_j$  و ارتفاع  $h_j$  است. از آنجا سرعت متوسط قابل محاسبه خواهد بود. یعنی:

$$V_j = \frac{Q}{2h_j \pi r_j} \quad (32)$$

برای افزایش دقت، می‌توان تعداد پیژومترها را بیشتر و فاصله آنها را کمتر انتخاب کرد و یا در صورتی که تعداد پیژومترها کم باشد، برای افزایش دقت  $i$  و  $V$  می‌توان ابتدا با استفاده از عمق و فاصله پیژومترهای موجود، رابطه ریاضی بین  $r$ ،  $h$  را بصورت  $h(r) = H(r)$  از طریق رگرسیون غیر خطی به دست آورد. سپس مقادیر  $i$  و  $V$  را از رابطه رگرسیونی مذکور تعیین کرد.  $H$  رابطه ریاضی به دست آمده از رگرسیون و  $h$  مقادیر عمقهای مشاهده شده در پیژومترهاست. لازم به ذکر است که توسعه رابطه‌ای ریاضی بین عمق و فاصله پیژومترها در هر دبی خاص و برای سفره‌های بسته<sup>۷</sup> نیز امکانپذیر است.

## ۲-۵- اندازه گیری مقادیر مختلف $(i, V)$ در سفره‌های بسته

مشابه حالت قبلی با اندازه گیری سطح آب در گمانه اصلی و تمامی پیژومترها در دبی‌های مختلف و پس از برقراری

جدول ۱- مقادیر مختلف گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان به دست آمده از آزمایشات صحرائی

i	V	i	V	i	V
m/m	m/s	m/m	m/s	m/m	m/s
۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۰۰۵۳۹	۰/۲۷۲	۰/۰۰۰۱۵۴	۸/۰۸	۰/۰۳۴۱۰
۰/۰۳۱۶	۰/۰۰۰۰۸۰۳	۰/۳۵۲	۰/۰۰۲۰۹	۱۵/۱۲	۰/۰۵۴۳۴
۰/۰۲۸۰	۰/۰۰۰۱۲۱۰	۰/۶۴۸	۰/۰۰۳۷۴	۲۰/۸۸	۰/۰۶۸۲۰
۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۰۱۹۸۰	۰/۹۸۴	۰/۰۰۵۵۰	۳۰/۷۲	۰/۰۸۸۵۵
۰/۰۴۸۰	۰/۰۰۰۲۸۶۰	۱/۴۵۶	۰/۰۰۷۹۲	۴۲/۱۶	۰/۱۰۸۷۰
۰/۰۹۴۰	۰/۰۰۰۵۳۹۰	۱/۹۵۲	۰/۰۱۰۳۴	۵۶/۰۸	۰/۱۲۹۸۰
۰/۱۲۸	۰/۰۰۰۷۴۸۰	۲/۳۴۴	۰/۰۱۲۲۱	۸۲/۴۰	۰/۱۶۵۰۰
۰/۲۰۸	۰/۰۰۱۲۱۰۰	۳/۳۶۸	۰/۰۱۶۸۳	-	-

که در آن  $f_{total}$  و  $f_{laminar}$  به ترتیب ضریب اصطکاک کلی و ضریب اصطکاک جریان آرام‌اند. از آنجا عدد رینولدز بحرانی  $Re_c$  قابل تعریف است:

$$\left(\frac{1}{Re_c} + 1\right) - \frac{1}{Re_c} = 0.02 * \left(\frac{1}{Re_c} + 1\right) \quad (35)$$

که برای مثال پیش رو  $Re_c = 0.020408$  به دست می‌آید. برای محاسبه  $Re_{turbulent}$  یا مقدار عدد رینولدز در حالت شروع وضعیت کاملاً آشفته نیز مشابه حالت قبلی، می‌توان به شرح ذیل عمل کرد:

$$f_{total} - f_{turbulent} = 0.02f_{total} \quad (36)$$

و لذا در مرز ۲٪ بیرونتر از ناحیه انتقالی، عدد رینولدز در شروع جریان کاملاً آشفته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{Re_t} + 1\right) - 1 = 0.02 * \left(\frac{1}{Re_t} + 1\right) \quad (37)$$

و از آنجا عدد رینولدز در شروع حالت آشفتگی جریان  $Re_t = 49$  به دست می‌آید. اگر در مرز ۱٪ بیرونتر از ناحیه انتقالی، عدد رینولدز محاسبه شود، مقدار آن  $Re_t = 99$  به دست می‌آید. شایان ذکر است که مقادیر به دست آمده برای  $Re_c$  و  $Re_t$  در بالا، در انواع مختلف مصالح متخلخل، به شرطی که تعریف عدد رینولدز مطابق معادله (۵) باشد، صادق است. متعاقباً و با بهره‌گیری از یافته‌های یاد شده، تعیین حدود اعتبار قانون داریسی و جریان آشفته امکانپذیر می‌شود. یعنی

با به کارگیری معادلات (۳) و (۴) و با عنایت به اینکه دمای آب سفره ۲۰ درجه سانتیگراد بوده، که گرانیروی سینیماتیکی آب  $\nu = 1.007 * 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$  می‌شود، ضرایب  $k, c$  محاسبه می‌شوند:

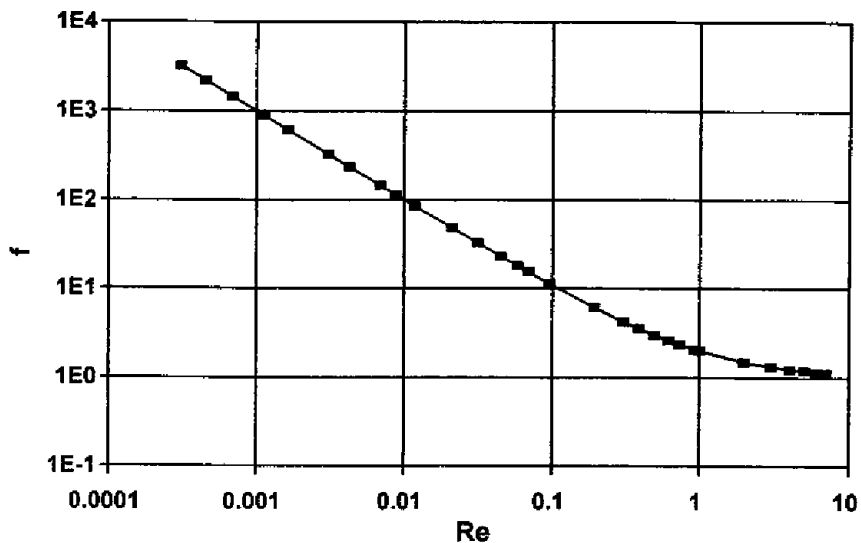
$$k = \frac{\nu}{g.a} = 6.033 * 10^{-6} \text{ m}^2, \quad c = \frac{1}{k.g.b} = 4.302$$

$$\Rightarrow d = 0.0118 \text{ mm}$$

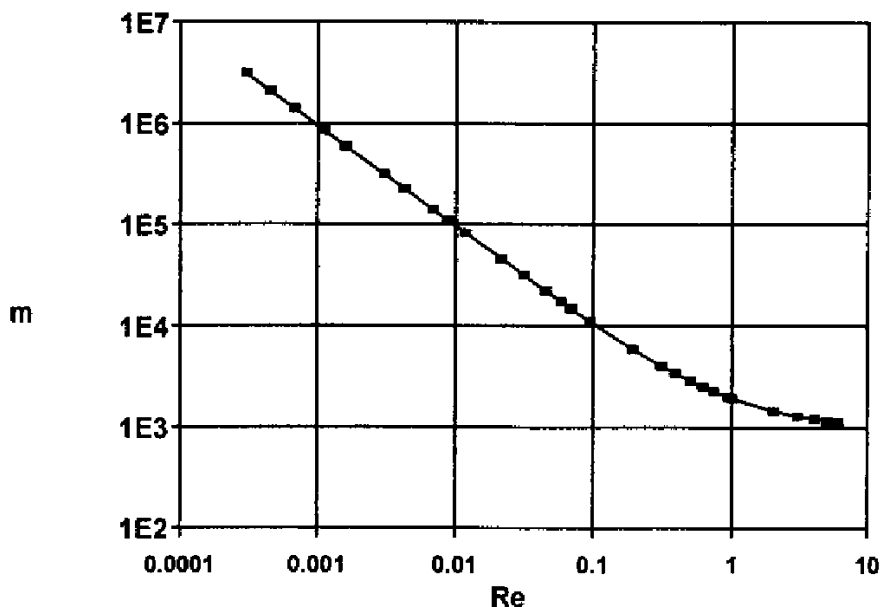
اینک با در دست داشتن  $k, c$  عدد رینولدز جریان در این مصالح متخلخل به شکل  $Re = \frac{Vd}{\nu} = 11.718 * V$  قابل تعریف است. همچنین ضریب اصطکاک نیز به صورت  $f = 1 + \frac{0.085338}{V}$  خواهد بود. منحنی تغییرات  $f$  در مقابل  $Re$  برای داده‌های یاد شده در شکل (۳) نشان داده شده است. ضمناً اگر برای تمامی اعداد رینولدز،  $n=2$  در نظر گرفته شود آن گاه، تغییرات پارامتر  $m$  در مقابل  $Re$  مطابق شکل (۴) خواهد بود. در شکل (۳)، (تغییرات ضریب اصطکاک در مقابل عدد رینولدز) با عنایت به تعمیم‌پذیری رابطه  $f = 1 + \frac{1}{Re}$ ، منحنی واحدی برای انواع مختلف مصالح متخلخل به دست آمده است [۳]. اگر مرز انحراف از معادله داریسی فقط ۲٪ فراتر از آن در نظر گرفته شود، می‌توان عدد رینولدز بحرانی  $Re_c$  بحرانی را به صورت زیر بدست آورد:

$$f_{total} - f_{laminar} = 0.02f_{total} \quad (38)$$





شکل ۳- تغییرات ضریب اصطکاک در مقابل عدد رینولدز (استخراج شده از مثال ارائه شده)



شکل ۴- تغییرات پارامتر m در مقابل عدد رینولدز (استخراج شده از مثال ارائه شده)

$$n=1, \quad m = \frac{v}{gk} = 0.017015 \text{ s/m}$$

در این حالت اگر  $n=2$  در نظر گرفته شود، آن گاه:

$$m = \frac{0.017015}{V} \text{ خواهد بود.}$$

ب- اگر  $0.020408 < Re < 99$ ، آن گاه

$$0.017015 < V < 8.44856 \text{ m/s} \text{ بوده و جریان در حالت}$$

انتقالی است یعنی:

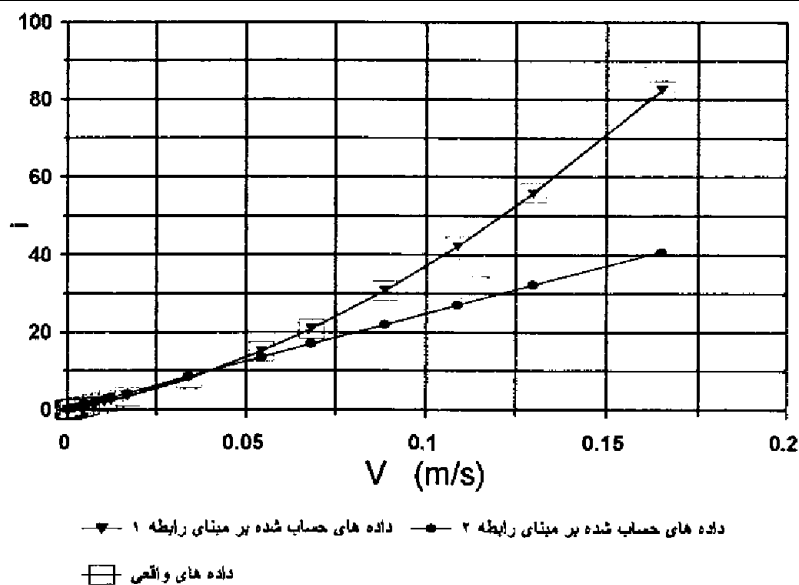
$$n=2, \quad m = \frac{1}{gk} \left( \frac{1}{Re} + 1 \right) = 2008.069 \left( \frac{0.085339}{V} + 1 \right)$$

چون داریم  $Re_c = 0.020408$  و  $Re_t = 99$ ، لذا سرعت بحرانی  $V_c = 0.00174 \text{ m/s}$  و سرعت جریان در شروع حالت آشفتگی  $V_t = 8.44856 \text{ m/s}$  به دست می آید. پارامترهای  $n, m$  برای مصالح متخلخل این سفره نیز در سه حالت مجزا به شرح ذیل به دست می آید:

الف- اگر  $Re \leq 0.020408$ ، آن گاه  $V \leq 0.00174 \text{ m/s}$  بوده و جریان آرام است. یعنی:

جدول ۲- مقادیر سرعت و گرادیان هیدرولیکی واقعی و محاسباتی با استفاده از معادلات (۱) و (۲)

$i$ حساب شده از معادله (۲)	$i$ حساب شده از معادله (۱)	$i$ واقعی	V (m/s)
۰/۰۱۵۰۰۸۷	۰/۰۰۹۱۸۹۰	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۰۰۵۳۹
۰/۰۲۲۲۲۹۲	۰/۰۱۳۶۹۴۰	۰/۰۱۳۶	۰/۰۰۰۰۸۰۳
۰/۰۳۳۲۹۴۸	۰/۰۲۰۶۴۴۶	۰/۰۲۰۸	۰/۰۰۰۱۲۱
۰/۰۵۴۰۸۹۴	۰/۰۳۳۸۱۲۶	۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۰۱۹۸
۰/۰۷۷۷۰۸۰	۰/۰۴۸۸۹۰۸	۰/۰۴۸۰	۰/۰۰۰۲۸۶
۰/۱۴۵۰۹۱۷	۰/۰۹۲۴۱۲۹	۰/۰۹۴۰	۰/۰۰۰۵۳۹
۰/۲۰۰۳۸۴۱	۰/۱۲۸۵۵۹۱	۰/۱۲۸۰	۰/۰۰۰۷۴۸
۰/۳۲۱۸۶۷۰	۰/۲۰۹۰۸۰۸	۰/۲۰۸۰	۰/۰۰۱۲۱
۰/۴۰۸۱۹۹۲	۰/۲۶۷۱۱۸۹	۰/۲۷۲	۰/۰۰۱۵۴
۰/۵۵۱۵۰۳۴	۰/۳۶۴۸۱۶۵	۰/۳۵۲	۰/۰۰۲۰۹
۰/۹۷۸۴۹۶۴	۰/۶۶۵۱۶۶۸	۰/۶۴۸	۰/۰۰۳۷۴
۱/۴۳۰۸۲۷۹	۰/۹۹۷۵۳۸۹	۰/۹۸۴	۰/۰۰۵۵۰
۲/۰۴۹۳۷۷۵	۱/۴۷۴۷۷۳۹	۱/۴۵۶	۰/۰۰۷۹۲
۲/۶۶۵۱۰۹۹	۱/۹۷۵۴۲۵۳	۱/۹۵۲	۰/۰۱۰۳۴
۳/۱۳۹۴۱۶۸	۲/۳۷۸۳۳۰۷	۲/۳۴۴	۰/۰۱۲۲۱
۴/۳۰۶۹۳۸۹	۳/۴۳۳۶۸۸۱	۳/۳۶۸	۰/۰۱۶۸۳
۸/۶۳۶۳۶۳۷	۸/۱۳۴۵۰۰۵	۸/۰۸	۰/۰۳۴۱۰
۱۳/۶۶۸۵۱۷۳	۱۵/۱۶۱۵۴۵۵	۱۵/۱۲	۰/۰۵۴۳۴
۱۷/۰۹۷۶۲۴۶	۲۰/۹۱۸۴۲۷۰	۲۰/۸۸	۰/۰۶۸۲۰
۲۲/۱۱۴۲۸۶۲	۳۰/۷۶۲۷۹۵۲	۳۰/۷۲	۰/۰۸۸۵۵
۲۷/۰۸۶۸۹۰۴	۴۲/۱۹۶۳۹۲۹	۴۲/۱۶	۰/۱۰۸۷۹
۳۲/۲۳۴۲۵۱۳	۵۵/۷۹۷۶۱۳۵	۵۶/۰۸	۰/۱۲۹۸۰
۴۰/۸۳۱۴۶۵۰	۸۲/۵۴۰۶۳۹۵	۸۲/۴۰	۰/۱۶۵۰۰



شکل ۵- مقایسه تغییرات  $i$  در مقابل  $V$  برای مشاهدات مستخرج از مثال و معادلات (۱) و (۲)

خواهد بود.

ج- اگر  $Re \geq 99$  آن گاه  $V \geq 8.44856$  m/s بوده و جریان کاملاً آشفته است. یعنی:

$$n=2, \quad m = \frac{1}{\gcd} = 2008.069 \text{ (s/m)}^2$$

خواهد بود. چنانچه در شکل شماره (۴) دیده می‌شود، دامنه تغییرات پارامتر  $m$  بسیار وسیع است و لذا انجام محاسبات افت انرژی و مقدار گرادیان هیدرولیکی  $i$  و محاسبه پارامتر  $m$  بایستی به صورت سعی و خطا صورت گیرد.

### ۷- تفسیر تطبیقی مدل ریاضی با مشاهدات صحرائی

برای ارزیابی نتایج به دست آمده از مثال موردی ارائه شده، نوعی مقایسه تطبیقی ضرورت دارد. می‌توان از منحنی تغییرات گرادیان هیدرولیکی در مقابل سرعت جریان در این رابطه استفاده کرد. با انجام محاسبات لازم، ابتدا جدول (۲) برای ارائه مقادیر سرعت و گرادیان هیدرولیکی تنظیم شده است.

با استفاده از داده‌های جدول (۲)، شکل (۵) ترسیم شده که تغییرات  $i$  را در مقابل  $V$  برای هر سه گروه داده‌ها نشان می‌دهد. به طوری که در شکل مذکور مشاهده می‌شود، گرادیان هیدرولیکی محاسبه شده بر مبنای معادله (۱) بسیار نزدیک به داده‌های واقعی گرادیان هیدرولیکی است. ولسی گرادیان هیدرولیکی محاسبه شده بر مبنای معادله (۲) دارای خطای قابل توجهی (بالاخص در سرعت‌های بالا) است. به عنوان مثال در شرایطی که سرعت جریان  $0.13$  متر بر ثانیه است، خطای معادله (۱)،  $0.5\%$  و خطای معادله (۲)،  $42.5\%$  است. بنابراین می‌توان دقت معادله (۱) برای تحلیل جریان آشفته در محیط‌های متخلخل درشت دانه را "بسیار خوب" تلقی کرد. برعکس،

معادله (۲) علی‌رغم سهولت کاربریهای متعارف آن، از دقت مناسبی برخوردار نیست.

### ۸- نتیجه گیری

روش بحث شده در این مقاله می‌تواند برای رفع معضل تعیین پارامترهای  $n, m$  که مورد استفاده در حل معادله دیفرانسیل جریان آب در آبرفت‌های درشت دانه (که معادله داری در آنها حاکم نخواهد بود) هستند، به کار گرفته شود. یافته‌های پژوهش حاضر حاکی از آن است که:

الف- در صورتی که از شکل پارامتریک  $m, n$  در قالب معادلات (۲۵) تا (۲۹) استفاده شود، اولاً امکان استفاده از معادله دیفرانسیلی (۱۲)، برای تحلیل جریانهای غیر داری در داخل مصالح متخلخل فراهم می‌شود. ثانياً دقت معادله (۲)، تا حد دقت معادله (۱) بالا خواهد رفت.

ب- چون معادله (۱) هم با استفاده از معادله ناویر استوکس و هم با کمک تحلیل ابعادی قابل بیان است، و در حالی که معادله (۲) صرفاً یک معادله تجربی است لذا، می‌توان معادله (۱) را بر معادله (۲) از لحاظ داشتن "پایه تحلیلی" و دقت بسیار بیشتری ترجیح داد. چنانچه از شکل (۵) و جدول (۲) بر می‌آید به ازای سرعتی مفروض در حالی که خطای ناشی از استفاده معادله (۱) محدود به کمتر از  $1\%$  است، خطای بهره‌گیری از معادله (۲) بالغ بر  $42.5\%$  است.

ج- اگر پارامترهای  $n, m$  مستقیماً از داده‌های جدول (۱) و برزش معادله (۲) به صورت ضرایب ثابتی به دست آیند، تقریب بسیار زیادی خواهند داشت.

د- با برزش معادله (۲)، به داده‌های جدول (۱)، مقادیر پارامترهای مذکور به ترتیب  $m=240.995$  و  $n=0.9853$  به دست آمده‌اند.

### واژه نامه

- |                |                       |                     |
|----------------|-----------------------|---------------------|
| 1. Forchheimer | 4. Ahmed & Sunada     | 7. confined aquifer |
| 2. Lee et al   | 5. Parkin             |                     |
| 3. Ward        | 6. unconfined aquifer |                     |

1. Aravin, V. I., and Numerov, N., *Theory of Fluid Flow in Undeformable Porous Media*, Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
2. McWhorter, D. B., and Sunada, D. K., *Groundwater Hydrology and Hydraulics*, Water Resources Publication, Fort Collins, Colorado, USA, 1977.
3. Venkataraman, P. and Rama Mohan Rao, P. "Darcian, Transitional, and Turbulent Flow Through Porous Media," *J. Hydr. Engineering., ASCE*, Vol. 124, No. 8, pp. 840-846, 1998.
4. Ahmed, N. and Sunada, D. K., "Nonlinear Flow in Porous Media," *J. Hydr. Div., ASCE*, Vol. 95, No. 6, pp. 1847-1857, 1969.
5. Martins, R., "Turbulent Seepage Flow Through Rockfill Structures," *Water Power & Dam Cons*, Vol. 40, No. 3, pp. 41-45, 1990.
6. Ward, J. C., "Turbulent Flow in Porous Media," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 90, No. 5, pp. 1-11, 1984.
7. Arbhahirama, A. and Dinoy, A. A., "Friction Factor and Reynolds Number in Porous Media Flow," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 99, No. 6, pp. 901-915, 1973.
8. Scheidegger, A. E., *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto press, Toronto, Canada, 1963.
9. George, G.H. and Hansen, D., "Conversion Between Quadratic and Power Law for Non-Darcy Flow," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 118, No. 5, pp. 792-797, 1992.
10. Li, B., Garga, V. K., and Davis, M. H., "Relationships for Non-Darcy Flow in Rockfill," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 124, No. 2, pp. 206-212, 1998.
11. Miller, D. S., "Discharge Characteristics," *IAHR*, The Netherlands, 1994.
12. Curtis, R. P., and Lawson, J. D., "Flow Over and Through Rockfill Banks," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 93, No. 9, pp. 1-21, 1969.
13. Volker, R. E., "Analysis of Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements," *J. Hydr. Div. ASCE*, Vol. 95, No. 6, pp. 2093-2114, 1969.
14. Zangar, C. N., "Theory and Problems of Water Percolation," Engineering Monograph No. 8, US Dept. of the Interior, USBR, Denver, Colorado, USA, 1953.
15. Ronald D., Townsend, Vinod K. Garga, and David Hansen, "Finite Difference Modelling of the Variation in Piezometric Head Within a Rockfill Embankment," *CAN. J. CIV. ENG.*, Vol. 18, 1991.