

## تمرکز سیلان به واسطه نرم شدن ناشی از تغییر شکل در فشردن جانبی استوانه

اصغر شیروانی کرچگانی\* و محمود فرزین\*\*

انستیتو مکانیک، مرکز آموزش فنی شهید مهاجر اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله ۸۰/۱۲/۱۵ - دریافت نسخه نهایی ۸۱/۱۱/۷)

چکیده - در این مقاله تمرکز سیلان به واسطه نرم شدن (کار نرمی) ناشی از تغییر شکل در فشردن جانبی استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. تمرکز سیلان منجر به تشکیل نوارهای برشی قابل رویت با چشم می شود که می توان آنها را پس از متالوگرافی سطح مقطع رویت کرد. در این مقاله برای اولین بار با استفاده از مدل ساده، دو برشه روشی برای پیش بینی تشکیل یا عدم تشکیل نوارهای برشی ارائه شده و با نتایج تجربی موجود برای آلیاژ تیتانیوم Ti-6242Si با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  مقایسه شده که کاملاً مطابقت دارد. همچنین یک روش پیشنهادی برای تعیین درصد کاهش ارتفاعی که در آن نوارهای برشی شروع می شود نیز ارائه شده است که این مورد با نتایج تجربی با حداکثر ۵ درصد خطا مطابقت دارد.

واژگان کلیدی: تمرکز سیلان، نوارهای برشی، مدل دو برشه، آلیاژ تیتانیوم Ti-6242Si

## Shear Localization due to Strain Softening in Side Pressed Cylinders

A. Shirvani and M. Farzin

Institute of mechanic of Engineering, Isfahan Mohajer Technical College  
Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** *In this paper, shear localization due to strain softening in sidepressed cylinders, is investigated. Shear localization causes formation of macroscopic shear bands which can be observed in the metallographic cross-section. In this paper, for the first time a method is presented in which a simple two-slice model is used to study the formation of shear bands. The results obtained from this model are in perfect agreement with the results obtained from experimental works for  $\alpha + \beta$  and  $\beta$  microstructures in Ti-6242Si alloy.*

**Keywords:** *shear Localization, shear Bands, Two-Slice Model, Titanium Alloy Ti-6242Si*

\*\* دانشیار

\* مربی

فهرست علائم

$\Delta t$	نمو زمان	A	سطح مقطع لحظه ای
x	فاصله پای مماس تا مبدا	$d_0$	قطر اولیه
$\alpha$	پارامتر تمرکز سیلان	F	نیرو
$\gamma'$	نرخ شدن در تغییر شکل	h	ضخامت لحظه ای
$\varepsilon$	کرنش	$h_0$	ضخامت اولیه
$\varepsilon_0$	کرنش اولیه	$h_{unif}$	ضخامت لحظه ای ناحیه یکنواخت
$\varepsilon^0$	نرخ کرنش	$h_{def}$	ضخامت لحظه ای ناحیه ای معیوب
$\varepsilon_{unif}$	کرنش ناحیه یکنواخت	$(h_0)_{unif}$	ضخامت اولیه ناحیه یکنواخت
$\varepsilon_{def}$	کرنش ناحیه معیوب	$(h_0)_{def}$	ضخامت اولیه ناحیه معیوب
$\varepsilon^0_{unif}$	نرخ کرنش ناحیه یکنواخت	m	پارامتر حساسیت نرخ کرنش
$\varepsilon^0_{def}$	کرنش ناحیه معیوب	R	کاهش ضخامت
$\varepsilon_{ave}$	کرنش متوسط	SL	شیب منحنی کرنش معیوب- کرنش یکنواخت
$\bar{\varepsilon}$	کرنش موثر	T	دما
$\sigma$	تنش	t	زمان

۱- مقدمه

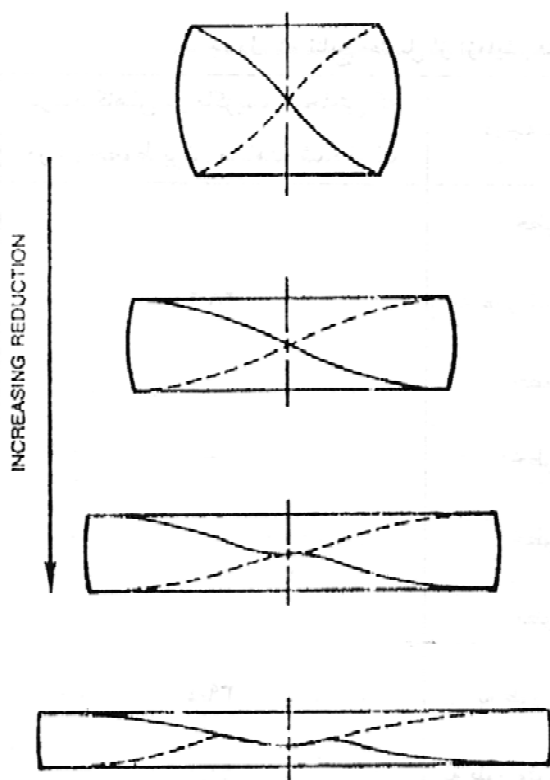
ایجاد می شود جلوگیری شده است. مولفین روشی ارائه کرده اند که بصورت نظری تشکیل یا عدم تشکیل نوارهای برشی را برای حالت فوق الذکر پیش بینی می کنند. نتایج حاصل از این روش با نتایج تجربی موجود برای آلیاژ Ti-6242Si مقایسه شده و کاملاً مطابقت دارد. نکته قابل توجه آنکه یک روش پیشنهادی برای تعیین درصد کاهش ارتفاعی که در آن نوارهای برشی شروع می شود با حداکثر ۵ درصد خطا نسبت به نتایج تجربی نیز ارائه شده است.

۲- پدیده تمرکز سیلان

در طی شکل دهی حجمی تحت شرایط کرنش صفحه ای، تمرکز سیلان برخلاف تغییر شکل تقارن محوری که در ناحیه کوچکی به شکل شکمهای تمرکز یافته در می آید، آزاد است و منجر به تشکیل نوارهای برشی قابل رویت با چشم می شود. این نوارهای برشی در واقع نواحی باریکی در درون فلز و در

تمرکز سیلان تحت شرایط اسمی دما ثابت ممکن است در اثر نرم شدن ناشی از تغییر شکل باشد، که در بعضی از مواقع به آن کار نرمی [۱] نیز گفته می شود. این نوع تمرکز سیلان بیشتر اوقات تحت شرایط تغییر شکل داغ دیده شده است. این نرم شدن سیلانی یا به عبارت دیگر نرم شدن در اثر تغییر شکل، ممکن است به واسطه یک نوع منشا متالورژیکی و فیزیکی باشد. البته ممکن است نرم شدن سیلان در دمای کار سرد نیز رخ دهد که عمومی ترین عامل این نرم شدن سیلانی، گرمای تغییر شکل است.

تمرکز سیلان در طی شکل دهی حجمی تحت شرایط کرنش صفحه ای منجر به تشکیل نوارهای برشی (که یک عیب داخلی است) می شود. لذا در صورتی که بتوان تشکیل نوارهای برشی را قبل از شکل دهی پیش بینی کرد و از آن جلوگیری کرد، در واقع از بسیاری از عیوب که در شکل دهی کرنش صفحه ای



شکل ۱- شکل شماتیک مکانیزم تشکیل خطوط برش در فشردن جانبی استوانه با دمای ثابت [۲]

می‌شوند ولی در دماهای  $913^{\circ}\text{C}$  هیچ گونه خطوط برشی مشاهده نمی‌شود. ولی در مقابل برای ساختار میکروسکوپی  $\beta$ ، شکل (۳) نشان می‌دهد که در نرخ کرنش تقریبی  $10^{-1} \text{ S}^{-1}$  و در هر دو دمای  $843^{\circ}\text{C}$  و  $913^{\circ}\text{C}$  نوارهای برشی با شدت بیشتری ظاهر می‌شوند. نتایج آزمایشهای سیمیتین و لاهوتی برای آلیاژ Ti-6242Si با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  در شروع ظاهر شدن نوارهای برشی در جدول (۱) آورده شده است.

#### ۴- تحلیل ناپایداری

تحلیل ناپایداری سیلان و تمرکز سیلان در فشردن جانبی کرنش صفحه‌ای استوانه توسط سیمیتین و لاهوتی [۳] براساس تحلیلی که توسط جونز، هالت و کالمن [۵] و دادرس و توماس [۶] برای پیشگویی کردن شروع ناپایداری بشکهای شدن در فشار تک محوری به کار برده شده انجام شده است.

برگیرنده تعدادی از دانه‌های کریستالی فلز هستند که در این نواحی تغییر شکل پلاستیکی تمرکز یافته و تمرکز کرنش بیشتر از دیگر قسمت‌های فلز است. لازم به ذکر است که نوارهای برشی ایجاد شده در اثر نرم شدن ناشی از تغییر شکل کرنش صفحه‌ای را می‌توان بعد از متالوگرافی سطح مقطع رویت کرد. برای آنکه تغییر شکل تحت شرایط کرنش صفحه‌ای باشد آزمایش فشردن جانبی استوانه در نظر گرفته می‌شود.

#### ۳- تشکیل نوارهای برشی

از مشاهده نوارهای برشی در متالوگرافی سطوح فلزات آزمایش شده [۲]، مشخص می‌شود که شکل نوارهای برشی از الگویی یکسان که تابع کاهش در ارتفاع است پیروی می‌کنند. این الگو در شکل (۱) به طور شماتیک نشان داده شده است. در کاهش ارتفاعهای کمی که نوارهای برشی ظاهر می‌شوند شکل نوارهای برشی به شکل X است که این نوارهای برشی به طور تقریبی برهم عمودند. در این کاهش ارتفاع، شکل عمومی باندهای برش یادآوری کننده حلهای میدان خطوط لغزش برای فشردن جانبی استوانه است. هر چند که با افزایش کاهش در ارتفاع، پالهای (ساقهای) X حول محور فشار اولیه می‌چرخند ولی نوارهای برشی فقط روی صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم تشکیل می‌شوند. با تغییر شکل بیشتر، تقاطع نوارهای برشی به سمت تشکیل یک ناحیه تخت تحت تغییر شکل شدید در مرکز نمونه سوق داده شده و در نهایت با افزایش کاهش ارتفاع بیشتر این ناحیه تخت به یک طرف از سطح قالب خم می‌شود.

برای مثال می‌توان به آزمایش‌های سیمیتین و لاهوتی [۲-۴] اشاره کرد، دو نتیجه از این آزمایشها که بر روی آلیاژ تیتانیوم  $(\text{Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo-0.1Si})$  با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  انجام شده در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است. شکل (۲) مربوط به آلیاژ فوق با ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  در نرخ کرنش تقریبی  $10^{-1} \text{ S}^{-1}$  است. این شکل نشان می‌دهد که در دمای  $843^{\circ}\text{C}$  نوارهای برشی مشاهده

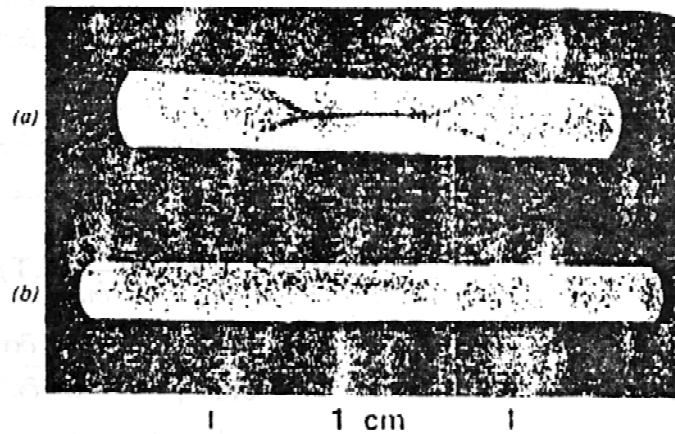
جدول ۱- نتایج حاصل از آزمایش فشردن جانبی استوانه با دمای ثابت برای Ti-6242Si [۴-۲]

ساختار میکروسکوپی	دمای آزمایش °C	نرخ کرنش تقریبی S <sup>-1</sup>	درجه بندی تمرکز خطوط برش	درصد کاهش در ماکزیمم ضخامتی که در آن خطوط برش مشاهده شده است
α + β	۸۴۳	۰/۰۱	خطوط برش مشاهده نشد	-
α + β	۸۴۳	۱۰	به طور شدید تمرکز یافته مشاهده شد	۲۸/۲
α + β	۹۱۳	۰/۰۱	خطوط برش مشاهده نشد	-
α + β	۹۱۳	۱۰	خطوط برش مشاهده نشد	-
α + β	۹۸۲	۰/۰۱	خطوط برش مشاهده نشد	-
α + β	۹۸۲	۱۰	خطوط برش مشاهده نشد	-
β	۸۴۳	۰/۰۱	به طور پراکنده شده مشاهده شد	۳۹/۴
β	۸۴۳	۱	به طور متوسط تمرکز یافته مشاهده شد	۴۲/۲
β	۸۴۳	۱۰	به طور شدید تمرکز یافته مشاهده شد	۲۹/۶
β	۹۱۳	۰/۰۱	به طور پراکنده شده مشاهده شد	۳۹/۴
β	۹۱۳	۱	به طور متوسط تمرکز یافته مشاهده شد	۳۵/۲
β	۹۱۳	۱۰	به طور متوسط تمرکز یافته مشاهده شد	۲۹/۶
β	۹۸۲	۰/۰۱	خطوط برش مشاهده نشد	-
β	۹۸۲	۱	به طور پراکنده مشاهده شد	۴۰/۸
β	۹۸۲	۱۰	به طور پراکنده شده مشاهده شد	۴۰/۸

ناپایداری،  $d\sigma = 0$  است چون در این حالت  $dA = 0$  است [۷].

اگر تنش سیلان  $\sigma$  تابع کرنش  $\epsilon$ ، نرخ کرنش  $\dot{\epsilon}$  و دما  $T$  در نظر گرفته شود، شرط ناپایداری به صورت زیر می‌شود:

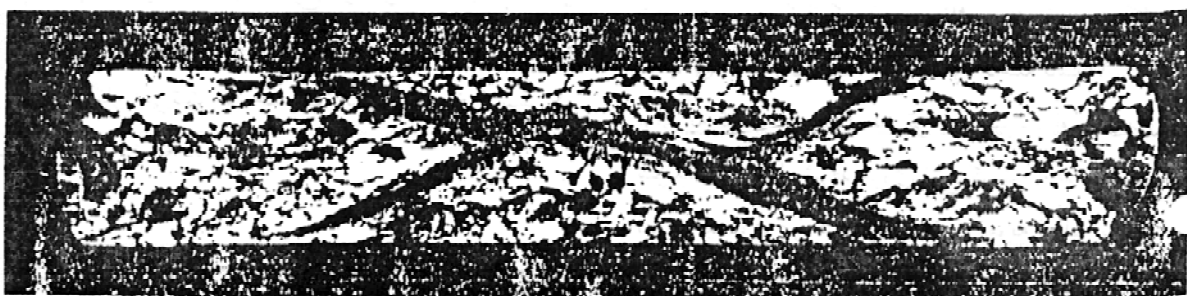
برای ناپایداری تغییر شکل در فشار، شرط ناپایداری به صورت  $dF = \sigma dA + Ad\sigma = 0$  است که در آن  $A$  سطح مقطع لحظه‌ای نمونه است. از طرف دیگر، برای تمرکز در طول یک امتداد برش خالص استنباط می‌شود که شرط لازم برای



شکل ۲- متالوگرافی سطح مقطع استوانه‌های Ti-6242 Si با ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  در فشردن جانبی به طور دما ثابت در  $\dot{\epsilon} \approx 10s^{-1}$  و در دمای (a) 843°C و (b) 913°C [۳]



الف-

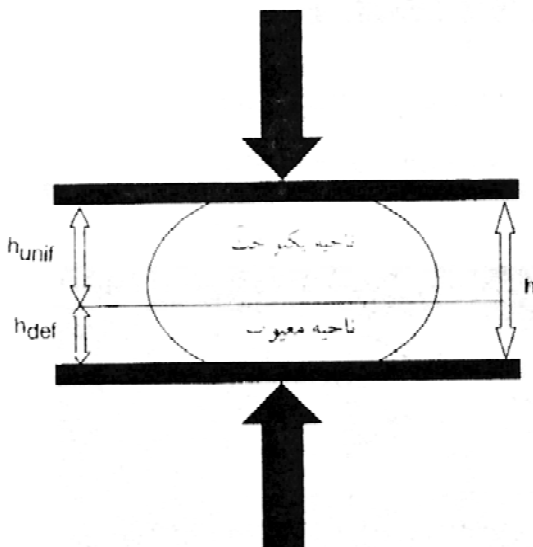


ب-

شکل ۳- متالوگرافی سطح مقطع استوانه‌های Ti-6242 Si با ساختار میکروسکوپی  $\beta$  در فشردن جانبی به طور دما ثابت در  $\dot{\epsilon} \approx 10s^{-1}$  و در دمای الف- 843°C و ب- 913°C [۳]



شکل (الف) قبل از تغییر شکل



شکل (ب) بعد از تغییر شکل

شکل ۴- مدل دو پرشه در فشردن جانبی استوانه

شامل عیب مکانیکی (عیب ناشی از تغییر شکل) است و ناحیه‌ای که بدون عیب است وجود داشته باشد [۸]. برای به کار بردن چنین عبارتی باید شرایط اولیه و مرزی معلوم شوند. برای مثال شرط مرزی نرخ کرنش حقیقی ثابت در ناحیه بدون عیب، فرض می‌شود. بعلاوه، نمونه مطابق با دو ناحیه با عیب و بدون عیب فقط در دو برش (مدل دو پرشه) [۵] بریده خواهد شد، شکل (۴). با به کار بردن شرایط مرزی حقیقیتر (مثل نرخ کرنش حقیقی ثابت در تمام قسمتهای نمونه) و تقسیم نمونه به چند برش (مدل چند پرشه)، ممکن است نتایج به دست آمده دقیقتر باشد. ولی این دقت جزئی می‌باشد زیرا وقتی اختلاف کرنش بین قسمتهای مجاور هم (در مدل چند پرشه)

$$d\sigma = 0 = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon^{\circ}, T}d\varepsilon + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon^{\circ}}\right)_{\varepsilon, T}d\varepsilon^{\circ} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_{\varepsilon, \varepsilon^{\circ}}dT \quad (1)$$

نرخ نرم شدن در اثر تغییر شکل و  $m$ ، پارامتر حساسیت نرخ کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود [۴].

$$\gamma' \equiv \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\circ}} = \left\{ \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon^{\circ}, T}d\varepsilon + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_{\varepsilon, \varepsilon^{\circ}}dT \right\} / \sigma d\varepsilon$$

$$m \equiv \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \varepsilon^{\circ}}\right)_{\varepsilon, T} = \frac{\varepsilon^{\circ}}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^{\circ}}\right)_{\varepsilon, T}$$

و با تعریف فوق معادله (۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\gamma' d\varepsilon + \frac{m}{\varepsilon^{\circ}} d\varepsilon^{\circ} = 0 \quad (2)$$

$\alpha$ ، پارامتر تمرکز سیلان به صورت  $\alpha \equiv -\frac{1}{\varepsilon^{\circ}} \frac{d\varepsilon^{\circ}}{d\varepsilon}$  تعریف می‌شود. در آن صورت با توجه به معادله (۲)،  $\alpha$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{\gamma'}{m} \quad (3)$$

کمیت  $\frac{1}{\varepsilon^{\circ}} \frac{d\varepsilon^{\circ}}{d\varepsilon}$ ، تغییر جزئی نرخ کرنش با کرنش، پارامتری است که اگر ماده مستعد برای ناپایداری باشد، بیشتر اوقات برای سنجش تمایل ماده به تمرکز سیلان به کار برده می‌شود که با نرخ نرم شدن در اثر تغییر شکل نرمال شده،  $\gamma'$ ، نسبت مستقیم و با پارامتر حساسیت نرخ کرنش،  $m$ ، نسبت عکس دارد.  $\gamma'$  مستقیماً از منحنی تنش - کرنش در نرخ کرنش ثابت و  $m$  از منحنی لگاریتمی تنش بر حسب لگاریتم نرخ کرنش در کرنش و دمای ثابت به دست می‌آیند.

## ۵- نحوه ایجاد تمرکز سیلان در فشردن جانبی

### استوانه و مدل دو پرشه

معادله (۲) که معرف شرط ناپایداری سیلان در فشردن جانبی استوانه است، نشان می‌دهد که برای برقرار بودن تعادل نیرو در هر لحظه داده شده در طی تغییر شکل لازم است که اختلاف در کرنش و نرخ کرنش بین ناحیه‌هایی از نمونه که

بعد از یک نمو زمان به قدر کوچک با استفاده از بسط سری تیلور، کرنش در دو ناحیه از نرخهای کرنش در زمان  $t=0$  محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon(t = \Delta t) = \varepsilon(t = 0) + \varepsilon^{\circ}(t = 0)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\varepsilon^{\circ\circ}(t = 0) + \dots \quad (11)$$

بنابراین با معلوم شدن  $\delta\varepsilon = \varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def}$  و با داشتن پارامترهای  $m$  و  $\gamma'$  و شرط مرزی نرخ کرنش در ناحیه یکنواخت معلوم، می‌توان با استفاده از معادله (9) نرخ کرنش ناحیه معیوب را در زمان  $t = \Delta t$   $[\varepsilon^{\circ}_{def}(t = \Delta t)]$  به دست آورد و به همین صورت این روند ادامه پیدا می‌کند و نرخ کرنش در ناحیه معیوب و کرنشها در دو ناحیه معیوب و یکنواخت بدست می‌آیند.

با رسم منحنی کرنش در ناحیه معیوب بر حسب کرنش در ناحیه یکنواخت (غیر معیوب) می‌توان چگونگی تمرکز کرنش در طی تغییر شکل کرنش صفحه‌ای که توسط مدل دو برشه تخمین زده می‌شود را مشاهده کرد.

با توجه به آنکه  $\gamma'$  تابع کرنش است، برای بهتر شدن نتایج در عبارت مربوط به  $\gamma'$  از کرنش متوسط در دو ناحیه یکنواخت و معیوب استفاده می‌شود. کرنش متوسط و موثر در فشردن

جانبی استوانه به ترتیب  $\varepsilon_{ave} = \text{Ln}\left(\frac{h}{do}\right)$  و

$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left(\frac{h}{do}\right)$  هستند که  $h$  ضخامت لحظه‌ای نمونه و

$do$  قطر اولیه استوانه است، شکل (4)، و با توجه به آنکه

$\varepsilon_{unif} = \text{Ln}\frac{h_{unif}}{(h_o)_{unif}}$  و  $\varepsilon_{def} = \text{Ln}\frac{h_{def}}{(h_o)_{def}}$  است و با

فرض آنکه ضخامت اولیه دو برش مساوی باشند در آن صورت  $h = h_{unif} + h_{def}$  و  $do = (h_o)_{unif} + (h_o)_{def}$ ، که کرنش

متوسط بر حسب کرنش در دو ناحیه معیوب و یکنواخت به صورت زیر می‌شود:

$$\varepsilon_{ave} = \text{Ln}\left[\frac{(h_o)_{unif} \cdot \exp(\varepsilon_{unif}) + (h_o)_{def} \cdot \exp(\varepsilon_{def})}{(h_o)_{unif} + (h_o)_{def}}\right] \quad (12)$$

کوچک است در انتخاب مقدار  $\gamma'$  برای استفاده در معادله (2) ابهام کوچکی وجود دارد. از طرف دیگر وقتی یک مدل دو برشه انتخاب می‌شود معمولاً بهتر است که برای محاسبه  $\gamma'$  در کرنشهای مختلف از مقدار متوسط کرنش در دو ناحیه یکنواخت و معیوب استفاده شود.

با توجه به مدل ساده دو برشه، می‌توان گرادینهای به کار برده شده در معادله (2) را به صورت اختلاف بین دو ناحیه یکنواخت (بدون عیب) و ناحیه معیوب نوشت، که برای این کار معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m\delta\text{Ln}\varepsilon^{\circ} + \gamma'\delta\varepsilon = 0 \quad (4)$$

بنابراین:

$$m(\text{Ln}\varepsilon^{\circ}_{unif} - \text{Ln}\varepsilon^{\circ}_{def}) + \gamma'(\varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def}) = 0 \quad (5)$$

و یا به صورت ساده زیر:

$$m\text{Ln}\frac{\varepsilon^{\circ}_{unif}}{\varepsilon^{\circ}_{def}} = -\gamma'(\varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def}) \quad (6)$$

بنابر فرض انجام شده که  $\varepsilon^{\circ}_{unif}$  ثابت است.  $\varepsilon^{\circ}_{def}$  از معادله (6) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{Ln}\frac{\varepsilon^{\circ}_{unif}}{\varepsilon^{\circ}_{def}} = \frac{\gamma'}{m}(\varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def}) \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon^{\circ}_{unif}}{\varepsilon^{\circ}_{def}} = \exp[-\gamma'(\varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def})/m] \quad (8)$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\varepsilon^{\circ}_{def} = \varepsilon^{\circ}_{unif} \cdot \exp[\gamma'(\varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def})/m] \quad (9)$$

در مبدا زمان، زمان  $t=0$ ، (در آغاز تغییر شکل) به واسطه داشتن

عیب ناشی از تغییر شکل  $\delta\varepsilon^{\circ} = \varepsilon_{unif} - \varepsilon_{def} \neq 0$  است و

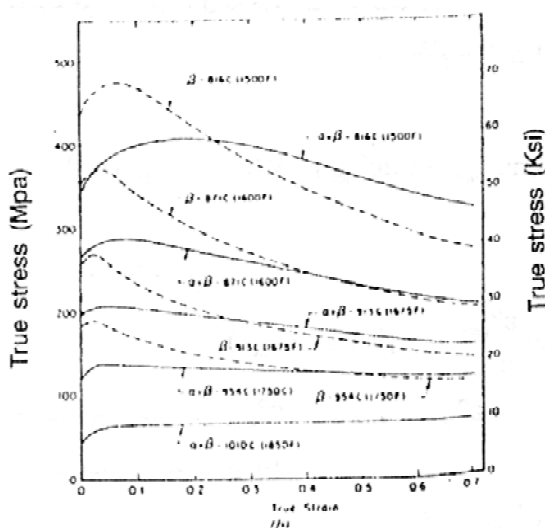
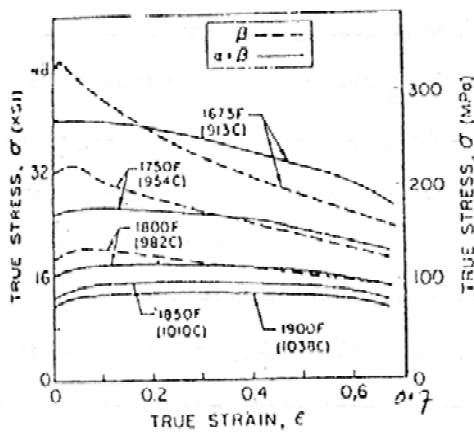
مقدار آن تابع عیب مکانیکی اولیه است که باعث ایجاد یک

مقدار اولیه برای  $\varepsilon_{def}$  می‌شود. چون در  $t=0$ ، کرنش در ناحیه

یکنواخت صفر است ( $\varepsilon_{unif} = 0$ ). بنابراین در زمان  $t=0$  مقدار

نرخ کرنش در ناحیه معیوب به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\varepsilon^{\circ}_{def}(t = 0) = \varepsilon^{\circ}_{unif} \cdot \exp[-\gamma'\varepsilon_{def}/m] \quad (10)$$



شکل ۵- منحنیهای تنش حقیقی - کرنش حقیقی آلیاژ

Ti-6242 Si در  $\dot{\epsilon} \approx 10s^{-1}$  (a) و  $\dot{\epsilon} \approx 1.0s^{-1}$  (b)

مقدار کاهش ارتفاع در فشردن جانبی استوانه

بصورت  $R = 1 - \frac{h}{do}$  است. از طرفی کرنش متوسط در این

حالت به صورت  $\epsilon_{ave} = \ln\left(\frac{h}{do}\right)$  است که  $\epsilon_{ave}$  براساس

مدل دو برشه توسط معادله (۱۳) به دست می آید. بنابراین مقدار کاهش به درصد به صورت زیر به دست می آید:

$$R = \left(1 - \frac{\exp(\epsilon_{unif}) + \exp(\epsilon_{exp})}{2}\right) 100 \quad (14)$$

از شکل (۷) به خوبی مشخص می شود که تمرکز کرنش برای

ساختار میکروسکوپی  $\beta$  به مراتب بیشتر از ساختار  $\alpha + \beta$

بنابراین فرض مساوی بودن ضخامت اولیه دو برش  $(h_o)_{unif} = (h_o)_{def}$ ، عبارت فوق به صورت زیر ساده می شود:

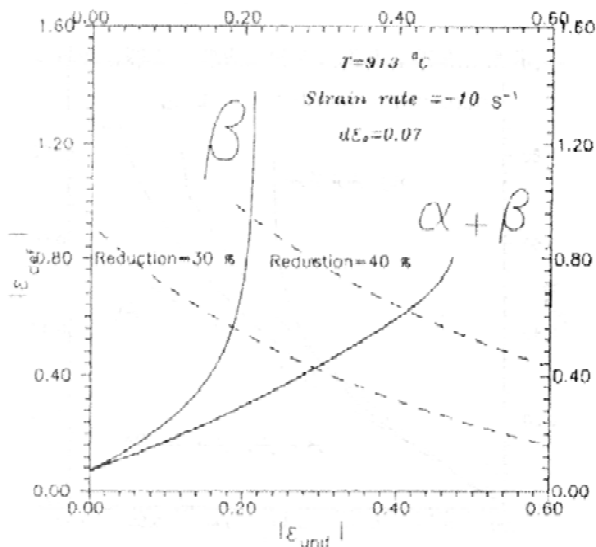
$$\epsilon_{ave} = \ln \frac{\exp(\epsilon_{unif}) + \exp(\epsilon_{exp})}{2} \quad (13)$$

بنابر داشتن  $\gamma'$ ،  $m$  (خواص ماده) برای یک ماده مشخص و یک مقدار فرضی برای  $\delta\epsilon^0$  (عیب مکانیکی اولیه) و همچنین  $\epsilon^0_{unif}$ ، می توان تمرکز سیلان کرنش یا تمرکز کرنش در طی تغییر شکل کرنش صفحه ای را برای ماده فوق بر اساس مدل ساده دو برشه به دست آورد.

برای آنکه بتوان نتایج نظری مدل دو برشه را با نتایج تجربی مقایسه کرد، نظری مدل دو برشه برای آلیاژ تیتانیوم Ti-6242Si با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  به کار برده می شود که برای این آلیاژ همان گونه که قبلا نیز بدان اشاره شد آزمایشهای زیادی توسط سمیتین و لاهوتی [۲-۴] انجام شده است. برای این آلیاژ منحنیهای تنش - کرنش به صورت شکل (۵) و پارامتر حساسیت نرخ کرنش،  $m$ ، برای هر دو ساختار میکروسکوپی در شکل (۶) نشان داده شده است که برای محاسبه  $\gamma'$  از منحنیهای تنش - کرنش استفاده می شود.

برای مثال اگر آلیاژ Ti-6242Si در نرخ کرنش  $10s^{-1}$  و دمای  $913^{\circ}C$  با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  در نظر گرفته شود. شکلهای (۲) و (۳) به ترتیب نشان می دهند که تحت شرایط فوق برای آلیاژ فوق با ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  هیچ گونه نوارهای برشی مشاهده نمی شود در حالی که در ساختار میکروسکوپی  $\beta$  نوارهای برشی نسبتا شدیدی ظاهر می شود. نتایج مدل دو برشه برای ماده فوق با دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  در شرایط فوق الذکر در شکل (۷) نشان داده شده است. در این شکل منحنی  $\epsilon_{def}$  (کرنش در ناحیه معیوب) برحسب  $\epsilon_{unif}$  (کرنش در ناحیه غیر معیوب) نشان داده شده است و منحنیهای خط چین معرف کاهش ارتفاعهای مختلف نسبت به قطر اولیه استوانه ای است که به طور جانبی فشرده شده است.

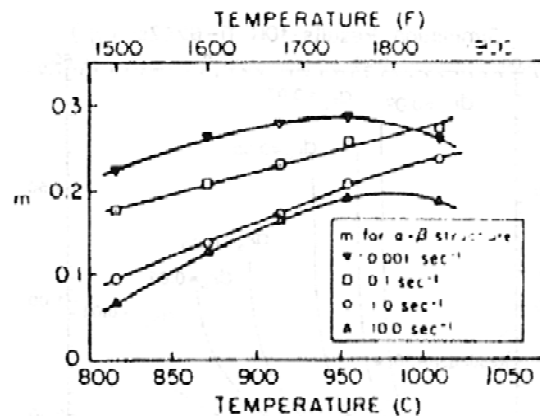




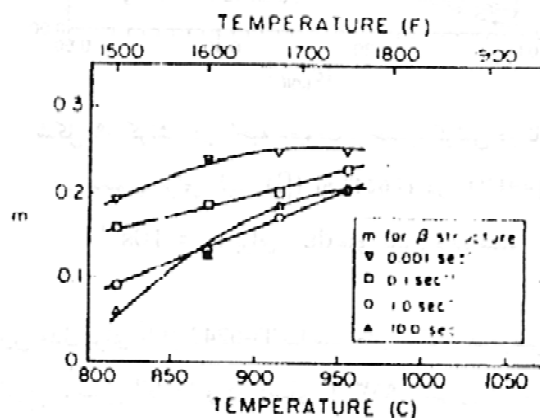
شکل ۷- کرنش در ناحیه معیوب بر حسب کرنش در ناحیه غیر معیوب برای آلیاژ Ti-6242 Si با دو ساختار میکروسکوپی مختلف در شرایط نشان داده شده

مدل دو برشه در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای است. و با فرض یک مقدار معقول برای عیب مکانیکی اولیه و با داشتن نرخ کرنش تغییر شکل  $(\epsilon_{unif})$ ، می‌توان توزیع کرنش در دو ناحیه معیوب و غیر معیوب (یکنواخت) را به دست آورد. به عبارت دیگر می‌توان نحوه ایجاد تمرکز سیلان یا تمرکز کرنش برای هر ماده دلخواه را براساس مدل دو برشه تخمین زد که برای این کار منحنی  $(\epsilon_{def})$  بر حسب  $\epsilon_{unif}$  به دست می‌آید. با توجه به آنکه برای این تخمین نیاز به داشتن خواص ماده یعنی  $M$ ،  $\gamma'$  است که در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای  $m = (\delta \ln \bar{\sigma} / \delta \ln \bar{\epsilon}^0) |_{\bar{\epsilon}, T}$  از منحنی لگاریتمی تنش موثر بر حسب نرخ کرنش موثر و  $(\gamma' = -(\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}) |_{\bar{\epsilon}^0}) \gamma'$  از منحنی تنش موثر بر حسب کرنش موثر در نرخ کرنش ثابت و در دماهای مختلف به دست می‌آید.

همان طوری که قبلاً نیز ذکر شد عیب مکانیکی اولیه در واقع تمرکز کرنش اولیه و یا به عبارت دیگر مقدار کرنش در ناحیه معیوب  $(\epsilon_{def})$  قبل از تغییر شکل است، چون قبل تغییر شکل  $\epsilon_{unif} = 0$  است. در نتیجه قبل از شروع تغییر شکل یک اختلاف کرنش اولیه (اختلاف کرنش بین دو ناحیه معیوب و



الف -



ب -

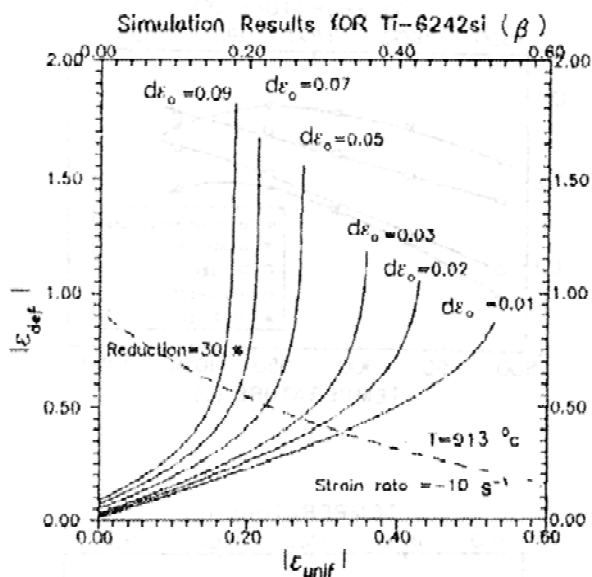
شکل ۶- پارامترهای حساسیت نرخ کرنش،  $m$ ، برای ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  (الف) و ساختار میکروسکوپی  $\beta$  (ب) [۳]

است که بعد از کاهش ارتفاعهای بیشتر از ۳۰ درصد این تمرکز کرنش به مراتب بیشتر می‌شود. بنابراین براساس این مدل می‌توان گفت امکان تشکیل نوارهای برشی در ساختار میکروسکوپی  $\beta$  وجود دارد در حالی که این امکان برای ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  وجود ندارد.

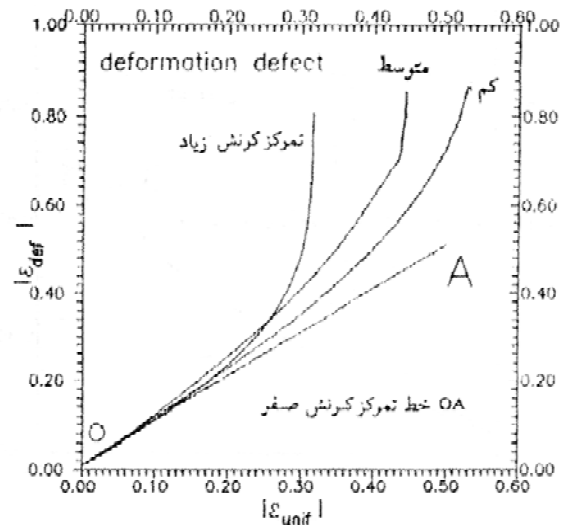
## ۶- تخمین نوارهای برشی توسط مدل دو برشه با

روش پیشنهادی

با در نظر گرفتن معادلات (۶) تا (۱۴) که مربوط به نظریه



شکل ۹- کرنش در ناحیه معیوب بر حسب کرنش در ناحیه غیر معیوب برای آلیاژ (β) Ti 6242 Si در T=913°C و  $\dot{\epsilon}_0 = 10s^{-1}$  برای  $d\epsilon_0$  های نشان داده شده



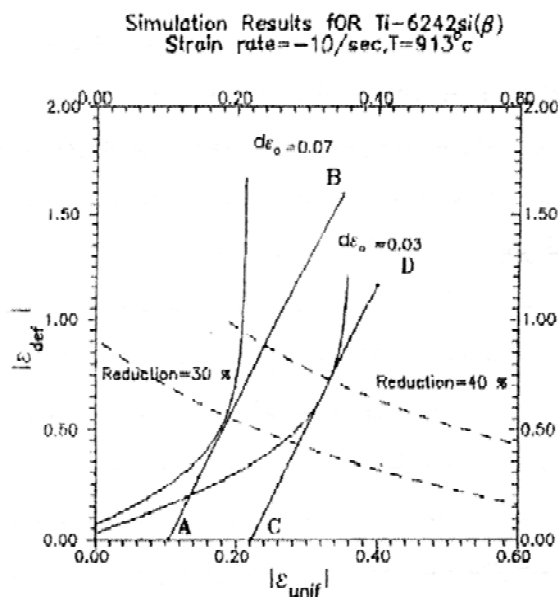
شکل ۸- روند تمرکز کرنش در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای

این مدل برای آلیاژ Ti-6242 با ساختار میکروسکوپی β در نرخ کرنش  $10 S^{-1}$  و در دمای  $913^{\circ}C$  و برای شش مقدار مختلف در شکل (۹) آورده شده است. از این شکل مشخص می‌شود که هر چه  $d\epsilon_0$  (مقدار اختلاف کرنش یا عیب مکانیکی فرضی اولیه) بزرگتر باشد تمرکز کرنش شدیدتر و به عبارت دیگر شیب منحنی بیشتر می‌شود. بنابراین تخمین مقدار  $d\epsilon_0$  برای هر ماده قبل از تغییر شکل دارای اهمیت ویژه‌ای است.

با توجه به جدول (۱) که نتایج حاصل از آزمایشهای سیمیتین و لاهوتی را نشان می‌دهد مشخص می‌شود که برای ماده مذکور و در شرایط فوق، شروع ظاهر شدن نوارهای برشی در کاهش ارتفاع (نسبت به ضخامت اولیه) تقریباً ۳۰ درصد است. شکل (۹) نشان می‌دهد که در کاهش ۳۰ درصد، در  $d\epsilon_0$  های کوچک تمرکز کرنش کم و در  $d\epsilon_0$  های بزرگتر تمرکز کرنش شدیدتر است. بنابراین انتخاب یکی معیار برای مدل دو برشه که توسط آن شروع آشکار شدن نوارهای برشی تخمین زده شود، الزامی است.

یکنواخت) فرض می‌شود. بنابراین قبل از شروع تغییر شکل یک نقطه از منحنی کرنش در ناحیه معیوب بر حسب کرنش در ناحیه یکنواخت به دست می‌آید. مطابق شکل (۸)، چنانچه تغییر شکل بدون هیچ گونه اختلاف کرنش ادامه پیدا کند همواره کرنش در ناحیه معیوب به اندازه اختلاف کرنشی فرضی ( $d\epsilon_0$ ) بیشتر از کرنش در ناحیه غیر معیوب است، در نتیجه منحنی  $\epsilon_{def}$  بر حسب  $\epsilon_{unif}$  یک خط راست (خط OA) با زاویه  $45^{\circ}$  درجه می‌شود که محور مربوط به  $\epsilon_{def}$  را در مقدار  $d\epsilon_0$  قطع می‌کند. در واقع این خط نشان دهنده تغییر شکل بدون تمرکز سیلان است و خط تمرکز کرنش صفر نامیده می‌شود. در صورتی که تغییر شکل همراه تمرکز کرنش باشد منحنی  $\epsilon_{def} - \epsilon_{unif}$  یک خط راست یک منحنی می‌شود که از خط تمرکز کرنش صفر (خط OA) انحراف پیدا می‌کند و هر چه در حین تغییر شکل تمرکز کرنش بیشتر باشد این انحراف بیشتر و بیشتر می‌شود. در واقع زاویه شیب منحنی از  $45^{\circ}$  درجه شروع و به سمت  $90^{\circ}$  درجه میل می‌کند شکل (۸).

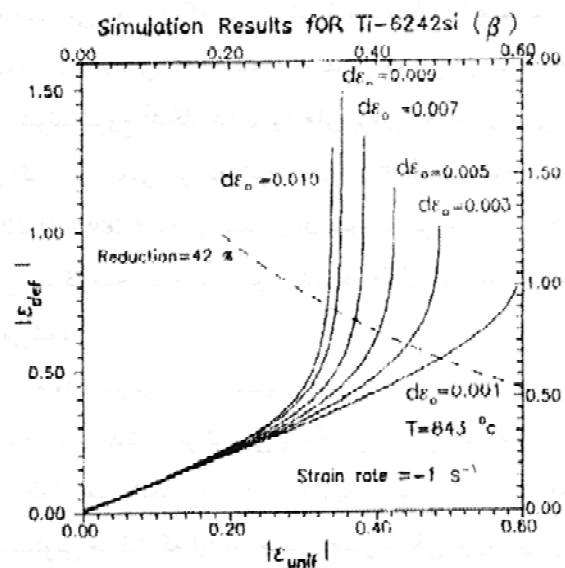
به نظر می‌رسد که مقدار اختلاف کرنشی فرضی اولیه ( $d\epsilon_0$ ) روی نتایج حاصل از مدل دو برشه، نظیر مقدار ناهمگنی اولیه،  $f_0$  در مدل مارسینیاک و کوزینسکی [۹] نقش به سزایی داشته باشد. برای پی بردن به اهمیت  $d\epsilon_0$  در مدل ارائه شده، نتایج



شکل ۱۱- اهمیت شیب و  $d\epsilon_0$  در تعیین معیاری برای تخمین شروع ظاهر شدن خطوط برش در مدل دو برشه برای حالت نشان داده شده

زاویه شیب از ۴۵ درجه به سمت ۹۰ درجه میل می‌کند، بنابراین شیب می‌تواند یک معیار خوبی برای تخمین شروع ظاهر شدن نوارهای برشی در مدل دو برشه باشد.

شکل (۱۱) نشان می‌دهد که شیب تنها نمی‌تواند جوابگو باشد زیرا در این شکل نشان داده شده است که برای یک شیب معلوم و ثابت می‌توان در کاهش ارتفاعهای مختلف به جواب مورد نیاز دست یافت. حال آنکه فقط در یک کاهش ارتفاع است که نوارهای برشی شروع به ظاهر شدن می‌کنند. در این شکل شیب دو خط AB، CD برابر است که خط مماس بر منحنی در کاهش ارتفاع ۳۰ درصد و مربوط به  $d\epsilon_0 = 0/07$  و خط CD مماس بر منحنی در کاهش ارتفاع نزدیک به ۴۰ درصد و مربوط به  $d\epsilon_0 = 0.03$  باشد. به عبارت دیگر امکان وجود هر شیب انتخابی، مثلاً شیبی برابر با شیب خط AB، در هر کاهشی هست. مثلاً اگر شیب خط AB در نظر گرفته شود با توجه به شکل (۱۱) مشخص می‌شود که برای  $d\epsilon_0$  های کوچکتر از ۰/۰۷ این شیب در کاهش ارتفاعهای بزرگتر از ۳۰ درصد و برای  $d\epsilon_0$  های بزرگتر ۰/۰۷ این شیب در کاهش



شکل ۱۰- کرنش در ناحیه معیوب بر حسب کرنش در ناحیه غیر معیوب برای آلیاژ Ti 6242 Si (β) در  $T=843^\circ\text{C}$  و  $\epsilon_0 = 1\text{ s}^{-1}$  برای  $d\epsilon_0$  های نشان داده شده

اگر مدل دو برشه برای همین آلیاژ و با همین ساختار میکروسکوپی، ولی در نرخ کرنش  $1\text{ s}^{-1}$  و در دمای  $843^\circ\text{C}$  به کار برده شود، شکل (۱۰)، با توجه به آنکه آزمایش تحت شرایط فوق نشان می‌دهد که ظاهر شدن نوارهای برشی در کاهش ارتفاع ۴۲ درصد است، مشخص می‌شود که نمی‌توان یک  $d\epsilon_0$  برای یک ماده در تمام شرایط به دست آورد چرا که محدوده  $d\epsilon_0$  که در آن تمرکز کرنش از مقدار کم به مقدار زیاد می‌رسد، برای حالت اول از ۰/۰۱ تا ۰/۰۹ (شکل ۹) است، در حالی که برای حالت دوم این محدوده از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ (شکل ۱۰) است.

با کمی تامل در شکل‌های (۸) تا (۱۰)، استنباط می‌شود که فاکتورهای مهم روی تعیین شروع ظاهر شدن نوارهای برشی، بجز عیب مکانیکی اولیه ( $d\epsilon_0$ )، شیب منحنی  $\epsilon_{def}$  بر حسب  $\epsilon_{unif}$  نیز هست و این شیب با افزایش  $d\epsilon_0$  افزایش می‌یابد. با توجه به آنکه برای شیب برابر با یک هیچ گونه تمرکز کرنشی وجود ندارد (خط تمرکز کرنش صفر در شکل ۸) و با افزایش تمرکز کرنش این شیب مرتباً افزایش می‌یابد و به عبارت دیگر

افزایش می‌یابد تا اینکه این دو شرط همزمان با هم برقرار شوند، در آن صورت در کاهش ارتفاعی که این دو شرط برقرار می‌شوند شروع آشکار شدن نوارهای برشی تخمین زده می‌شود و اگر برای حالتی این دو شرط حتی با  $d\varepsilon^0 = 0.25$  برقرار نشد در آن صورت این مدل پیش‌گویی می‌کند که هیچ‌گونه نوارهای برشی در طول تغییر شکل ظاهر نمی‌شود.

نظریه مدل دو برشه به تنهایی یعنی بدون در نظر گرفته دو شرط فوق‌الذکر، نیز توانایی پیشگویی تشکیل نوارهای برشی در طول تغییر شکل را دارد و برای یک ماده با شرایط معلوم، پیشگویی می‌کند که آیا در حین تغییر شکل نوارهای برشی مشاهده می‌شود یا نه. بدین صورت که با مشاهده منحنی  $\varepsilon_{def}$  بر حسب  $\varepsilon_{unif}$  برای چند  $d\varepsilon^0$  مختلف، مشخص می‌شود که تمرکز کرنش در آن ماده شدید است یا خیر، به عبارت دیگر انحراف منحنی فوق از خط تمرکز کرنش صفر شکل (۸)، مقدار تمرکز کرنش را مشخص می‌کند، شکل (۷).

## ۷- بحث

در قسمت قبل دیده شد که نظریه مدل دو برشه برای پیشگویی تشکیل نوارهای برشی در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای مفید است و برای هر ماده‌ای قابل استفاده است. ولی لازم است که شروع ظاهر شدن نوارهای برشی توسط این نظریه پیشگویی شود، برای این منظور باید معیاری برای شروع ظاهر شدن آنها در دسترس باشد که این معیار توسط شیب منحنی (SL) و عبارت  $\sqrt{d\varepsilon^0} \cdot R \cdot X$  به دست آورده شد. حال با این دو شرط که باید همزمان با هم برقرار باشند و با استفاده از نظریه مدل دو برشه، شروع نوارهای برشی چند حالت از آلیاژ Ti6242Si که توسط آزمایش به دست آورده شده است تخمین زده می‌شود و با نتایج حاصل از آزمایش در جدول (۱) مقایسه می‌شود و خطای تخمین مدل دوم برشه محاسبه می‌شود که نتیجه این مقایسه در جدول (۲) آورده شده است.

ارتفاعهای کمتر از ۳۰ درصد ایجاد می‌شود.

بنابراین علی‌رغم مفید بودن معیار شیب منحنی برای به دست آوردن معیاری برای تخمین شروع ظاهر شدن نوارهای برشی، شیب به تنهایی کافی نیست. در صورتی که فاصله پای مماس بر منحنی تا مبدا (مثلاً فاصله A تا مبدا یا C تا مبدا) در نظر گرفته شود و با توجه به نتایج حاصل از آزمایش جدول (۱) که مثلاً برای حالت نشان داده شده در شکل (۱۱) شروع ظاهر شدن نوارهای برشی در کاهش ۳۰ درصد اتفاق افتاده است و با توجه به مقدار  $d\varepsilon^0$ ، ممکن است بتوان به معیار مورد نظر رسید. فاصله پای مماس بر هر نقطه از منحنی در شکل (۱۱) تا مبدا بر اساس شیب منحنی و کرنشهای نواحی معیوب و یکنواخت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$X = \varepsilon_{unif} - \frac{\varepsilon_{def}}{SL} \quad (15)$$

در این فرمول X معرف فاصله محل تلاقی مماس بر منحنی و محور افقی  $\varepsilon_{unif}$  تا مبدا مختصات (فاصله پای مماس تا مبدا) و SL نشان دهنده شیب منحنی در هر نقطه است.

حال اگر با  $d\varepsilon^0$ های مختلف، مقادیر SL، X در کاهش ارتفاعهایی که توسط آزمایش شروع آشکار شدن نوارهای برشی در آنها ثابت شده است برای حالات موجود در جدول (۱) محاسبه شود با کمی سعی و خطا این نتیجه حاصل می‌شود که وقتی شیب منحنی در محدوده  $7/5$  تا  $7/8$  قرار دارد. عبارت  $X \cdot R \cdot \sqrt{d\varepsilon^0}$  که R درصد کاهش ارتفاع است. در کاهشی که نوارهای برشی ظاهر می‌شود در محدوده  $0/93$  تا  $0/95$  قرار می‌گیرد.

بنابراین این دو شرط یعنی دو شرط  $6.5 \leq SL \leq 6.8$  و  $0.93 \leq \sqrt{d\varepsilon^0} \cdot R \cdot X \leq 0.93$  باشد. برای تخمین شروع آشکار شدن نوارهای برشی در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای به کار برده می‌شود.

روند کار بدین صورت است که از یک  $d\varepsilon^0$  بسیار کوچک (مثلاً  $d\varepsilon^0 = 0.0001$ ) که در آن تمرکز کرنش بسیار کوچک است شروع می‌شود و مرتباً  $d\varepsilon^0$  با نرخ نسبتاً کوچک

جدول ۲- نتایج حاصل از نظریه مدل دوبرشه و آزمایش، در فشردن جانبی استوانه با دمای ثابت برای Ti-6242Si

ساختار میکروسکوپی	دمای آزمایش °C	نرخ کرنش تقریبی S <sup>-1</sup>	درصد کاهش ارتفاعی که شروع خطوط برش در آن است توسط		درصد خطای مدل دوبرشه
			آزمایش	مدل دوبرشه	
$\alpha + \beta$	۸۴۳	۱۰	۲۸/۲	۲۸/۱	۰/۳۵
$\alpha + \beta$	۹۱۳	۱۰	خطوط برش مشاهده نمی‌شود	خطوط برش مشاهده نمی‌شوند	-
$\alpha + \beta$	۹۸۲	۱۰	خطوط برش مشاهده نمی‌شوند	خطوط برش مشاهده نمی‌شوند	-
$\beta$	۸۴۳	۱	۴۲/۲	۴۳/۸	۳/۸
$\beta$	۹۱۳	۱	۳۵/۲	۳۵/۹	۲
$\beta$	۹۱۳	۱۰	۲۹/۶	۳۱/۱	۵/۱

تمام مواد به همین صورت است که برای آلیاژ Ti-6242Si ذکر شد.

نظریه مدل دو برشه علاوه بر اینکه تشکیل نوارهای برشی و یا عدم تشکیل نوارهای برشی را پیشگویی می‌کند، شروع ظاهر شدن نوارهای برشی را نیز پیشگویی می‌کند. به عبارت دیگر این مدل پیشگویی می‌کند که آیا نوارهای برشی ظاهر می‌شود یا خیر و اگر ظاهر می‌شود شروع ظاهر شدن آنها در چه درصدی از کاهش ارتفاع است.

نوارهای برشی یک عیب داخلی است که منشا بسیاری از عیوبی است که در شکل دهی حجمی مانند نورد تختالها و پروفیلها ایجاد می‌شود. چنانچه منحنی لگاریتمی تنش موثر ( $\ln \bar{\sigma}$ ) برحسب نرخ کرنش موثر ( $\ln \bar{\epsilon}^o$ ) و منحنی تنش موثر بر حسب کرنش موثر در نرخ کرنشهای ثابت و در دماهای مختلف کاری برای فولادها در دسترس باشد می‌توان از نتیجه این مقاله و با روش پیشنهادی، تشکیل یا عدم تشکیل نوارهای برشی را تخمین زد و با روشی مشابه که در این مقاله برای آلیاژ Ti-6242Si عنوان شده است می‌توان درصد کاهش ارتفاعی که در آن نوارهای برشی شروع می‌شود را نیز تخمین زد و کاهش ارتفاع بحرانی یا دمای بحرانی که در آن این عیب ایجاد می‌شود را به دست آورد. حال با تغییر دادن این پارامترها می‌توان از ایجاد این عیب جلوگیری کرد. مثلاً با حذف دمای بحرانی در محدوده دمای کاری (دمای شروع نورد تا دمای پایان نورد) با

در این جدول نتایج حاصل از نظریه مدل دو برشه برای شش حالت با آزمایشهای مربوط به آلیاژ Ti-6242Si در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای مقایسه شده است. برای دو حالت آزمایش نشان می‌دهد که نوارهای برشی تشکیل نمی‌شوند و نظریه مدل دوبرشه نیز عدم تشکیل نوارهای برشی در این دو حالت را پیشگویی می‌کند و در چهار حالتی که آزمایش ثابت کرده است که نوارهای برشی مشاهده می‌شوند، در صد کاهش که در آن نوارهای برشی شروع می‌شود توسط آزمایش بدست آورده شده است و نظریه مدل دوبرشه برای این چهار حالت با حداکثر خطای ۵ درصد، درصد کاهش ارتفاعی که نوارهای برشی در آن شروع می‌شود را پیشگویی می‌کند. بنابراین نظریه مدل دوبرشه با حداکثر خطای ۵ درصد، قادر است شروع شدن نوارهای برشی در تغییر شکل کرنش صفحه‌ای را پیشگویی کند.

#### ۸- نتیجه گیری

معیار شروع آشکار شدن نوارهای برشی از روی آزمایشهای مربوط به آلیاژ Ti-6242Si به دست آورده شد و برای هر دو ساختار میکروسکوپی  $\alpha + \beta$  و  $\beta$  قابل قبول است، ولی لازم به ذکر است که این معیار یعنی دو شرط  $6.5 \leq SL \leq 6.8$  و  $0.93 \leq \sqrt{d\epsilon} \cdot R.X \leq 0.95$  ممکن است برای مواد دیگر متفاوت باشد ولی روند کار برای

که سر چشمه بسیاری از عیوب است جلوگیری کرد.

حذف درصد کاهش ارتفاع بحرانی (با تغییر دادن درصد کاهش ارتفاع یا تعداد مراحل نورد) می‌توان از تشکیل نوارهای برشی

### مراجع

1. Jonas, J. J, and Luton, M.J, *Advances in Deformation processing*, Burke, J.J. and Weiss, V.cds., P. 215, Plenum Press, NewYork, 1978.
2. Semiatin, S.L, and Lahoti, G.O., The Occurrence of Shear Bands in is Othermal, Hot Forging, *Met. Trans. A*. Vol. 13A, P.275, 1982.
3. Semiatin, S.L. and Lahoti, G.D. Deformation and Unstable Flow in Hot Forging of Ti-6AL-2Sn-4Zr-Zmo-0.1Si, *Met. Trans. A*, Vol 12A., P.1705, 1981.
4. Semiatin, S.L., Lahoti, G.D., and oh, S.L., *Material Behavior under high Stress and Ultrahigh Loading Rates*, Plenum Press, Newyork, P.119, 1983.
5. Jonas, J. J, Holt, R.A, and Coleman, C. E., Plastic Stability in Tension and Compression, *Acta Met*, Vol. 24, P. 911, 1976.
6. Dadras, P, and Thomas, J. F, *Res Mechanica Letters*, Vol.1, P. 97, 1981.
7. Chakraborti, A.K, and Spretmak, J.W., Instability of plastic flow in the Directions of pure shear: L. Theory, *Metall. Trans. A*, Vol. 6A, P, 733, 1975.
8. Semiatin, S.L, and Jonas, J. J., *Formability and Workability of Metal*, American Society for Metals, America, 1984
9. Marciniak, Z., and Kuczynski, K. *Int. J. Mech. Sci*, Vol. 9, P. 609, 1967.