

مدلسازی ارتفاع سیال ویسکوالاستیک حول میله گردان به وسیله معادله قانونمند لیانوف

Archive of SID

Leonov Constitutive Equation for modeling of rod climbing in viscoelastic Fluid

محمدحسین نوید فانیلی^۱، مهرداد مرتضایی^{۲*}، مهرداد لطیفی^۱

۱- تهران، دانشگاه تربیت مدرس، گروه بسفر، صندوق پستی: ۱۹۱۱۵/۱۱۱-۲، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مواد و مهندسی شیمی،

صندوق پستی: ۱۷۷۴/۱۵۸۷۵

دریافت: ۱۳۹۰/۰۳/۰۸، پذیرش: ۱۳۹۰/۰۹/۰۸

چکیده

برای شناسایی خواص سیالات ویسکوالاستیک به شما باید خاصیت گرانیروی که متأثر از تنشهای برشی است بررسی شود، بلکه خاصیت کشسانی که به وسیله تنشهای عمودی نشان داده می شود بر باید مورد تجربه و تحلیل قرار گیرد.

در این مقاله، تفاوت تنشهای عمودی سیال ویسکوالاستیک بر اساس اثر وایزبرگ محاسبه می شود. بدینجهت بالا آمدن سطح آزاد سیال در همسایگی یک میله گردان در سیالات ویسکوالاستیک را به نام اثر وایزبرگ می شناسند. ارتفاع سطح آزاد سیال به وسیله معادله قانونمند لیانوف برای جریان برشی ساده در سیستم استوئهای مدلسازی شده و به صورت عددی و غیر یکدخت حل می شود. سپس، با انجام آزمایشها، ارتفاع سطح آزاد سیال اندازه گیری شده و با نتایج بدست آمده از مدل نظری مقایسه می شود تا مدل نظری درجه بندی شود. پس از اینکه دستگاه با یک سیال معلوم درجه بندی شده، می توان با اندازه گیری ارتفاع بالا آمده هر سیال حول میله گردان، تنشهای عمودی آن را که شاخص خاصیت کشسانی سیال است محاسبه کرد. از آنجا که زمان رسیدن ارتفاع به حالت پایدار به دلیل چرخش میله گردان ممکن است طولانی باشد، حل غیر یکدخت مسئله ای امکان را فراهم می سازد که در هر زمان بتوان ارتفاع سطح آزاد سیال را محاسبه کرد و آزمایشهای تجربی را در زمان کوتاهی انجام داد.

واژه های کلیدی: ویسکوالاستیک، اثر وایزبرگ، مدل لیانوف، گرانیوی، تنشهای عمودی

Key Words: viscoelastic, weissenberg effect, leonov model, viscosity, normal stresses

سیالات ویسکوالاستیک، علاوه بر گرانیروی، خاصیت کشسانی نیز از اهمیت ویژه ای برخوردار است که با بررسی ارتباط بین رفتار سیال با تنشهای عمودی قابل محاسبه است [۱، ۲].

در حال حاضر برای بدست آوردن تنشهای عمودی از تجهیزات پیچیده و گرانقیمت استفاده می شود و با توجه به اینکه روابط

مقدمه

پیش بینی و تحلیل رفتار سیالات مستلزم شناسایی و بررسی گرانیروی، چگالی و خواص دیگر آنهاست. محاسبه گرانیروی سیالات با تجربه و تحلیل رفتار آنها در هنگام تحمل تنشهای برشی مبسر می شود. در مورد

*مسئول مکاتبات، نام نگار: M-Mortezaei@hotmail.com

استفاده شود.

معادلات قانونمند لیانوف [۸]

برای یک جریان برشی ساده در سیستم استواری معادلات رتولوژیکی زیر انتخاب شده‌اند:

Archive of SID

$$VU = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial t} + \frac{V_{\theta}}{r} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$c = \frac{\tau}{r} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{11k} & C_{1rk} & \cdot \\ C_{1rk} & C_{rrk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{dC_{11k}}{dt} + \frac{1}{r\theta_k} (C_{11k}^* + C_{1rk}^* - 1) = \tau \dot{\gamma} C_{1rk} \quad (4)$$

$$C_{11k} \frac{dC_{1rk}}{dt} + \frac{1}{r\theta_k} C_{1rk} (C_{11k}^* + C_{1rk}^* + 1) = \tau (1 + C_{1rk}^*) \quad (4)$$

$$C_{rrk} = \frac{1 + C_{1rk}^*}{C_{11k}}$$

$$S = \tau \eta \dot{\gamma} e + \tau \sum_{k=1}^n \mu_k C_k \quad (5)$$

$$S_{rr} = \tau \sum \mu_k C_{11k} \quad (6)$$

$$S_{\theta\theta} = \tau \sum \mu_k C_{rrk} \quad (7)$$

$$S_{zz} = \tau \sum \mu_k \quad (8)$$

$$S_{r\theta} = \eta \dot{\gamma} + \tau \sum \mu_k C_{1rk} \quad (9)$$

در این معادلات $\dot{\gamma}$ بردار سرعت، V_{θ} مولفه زاویه‌ای سرعت، τ سرعت برش، S تانسور تنش، c تانسور کرنش و θ زمان آسایش است.

معادلات حاکم

فرض بر این است که بک میله با طول l ، شعاع a و سرعت

مجله علمی پژوهشی *مهندسی مکانیک* سال چهاردهم، شماره پنجم، آذر-دی ۱۳۸۰

حاکم بر این دستگاهها بر مبنای تعریف خطی بودن خواص مواد طراحی شده است، نتایج بدست آمده در یک محدوده وسیع تنش قابل اطمینان نیست. برای رفع این مشکل اخیراً سعی شده است از روابط مبتنی بر تعریف خواص غیر خطی ماده استفاده شود تا مشخصه‌های ماده در نواحی غیر خطی نیز قابل محاسبه باشد.

یکی از راحت‌ترین روشهای بدست آوردن این روابط، استفاده از خاصیت وایز نیرگ مواد ویسکوالاستیک است. بالا آمدن سطح آزاد سیالات ویسکوالاستیک حول یک میله گردان اثر وایز نیرگ نامیده می‌شود که علت آن اختلاف غیر خطی تنشهای عمودی در این گونه سیالات است. بهترین وسیله برای مشاهده و اندازه‌گیری خاصیت وایز نیرگ، دستگاه میله و فنجان است. البته، این دستگاه اصولاً برای بدست آوردن تنشهای برشی آن هم در یک محدوده بسیار بزرگ طراحی شده است که با اندازه‌گیری گشتاور مورد نیاز برای چرخاندن میله گرانروی سیال محاسبه می‌شود [۳].

در این پژوهش از همین دستگاه استفاده شده است، با این تفاوت که علاوه بر گرانروی سیال، با اندازه‌گیری ارتفاع سیال بالا آمده حول میله گردان و مرتبط کردن این ارتفاع به تنشهای عمودی، خواص کشسانی ماده مورد نظر نیز محاسبه می‌شوند.

در اوایل دهه گذشته روابط بین ارتفاع سیال و تنشهای عمودی با استفاده از مدل وایت مترنر بدست آمد که به دلیل صرف نظر کردن از تنشهای عمودی دوم (N_2) در محاسبه تنشهای عمودی در سرعتهای بالا، انحراف شدیدی از نتایج تجربی نشان می‌داد [۴]. این مدل برای سیالانی که گرانروی و زمان آسایش آنها تابعی از سرعت برش است و با آن کاهش می‌یابد یک رابطه خطی بین ارتفاع سیال و سرعت زاویه‌ای ارائه می‌کند، در حالی که مشاهده شده است که با اعمال نظریه درجات بالاتر اثر وایز نیرگ برای یک آشفتگی در حالت سکون سیال، ارتفاع سطح آزاد سیال با توان دوم سرعت زاویه‌ای رابطه دارد [۵-۷].

در این پژوهش، با استفاده از مدل لیانوف و با در نظر گرفتن اختلاف دوم تنشهای عمودی برای سیال ویسکوالاستیک، ارتفاع سطح آزاد سیال قابل محاسبه است. با اندازه‌گیری ارتفاع سطح آزاد سیال و گشتاور مورد نیاز برای چرخاندن میله در سرعتهای مختلف می‌توان با روش حداقل مربعات، پارامترهای مدل لیانوف را بدست آورد و با در دست داشتن این پارامترها برای سیال مورد آزمایش، تنشهای عمودی اول، دوم، سوم و گرانروی سیال را بر حسب سرعت برش محاسبه کرد.

اساس نظری

در این قسمت ابتدا معادلات قانونمند لیانوف برای واسطه الاستیک در محدوده زیر تغییر شکل بحرانی از حالت گذرا به حالت کشسان بالا، از مرجع ۸ آورده می‌شود تا در ادامه در مدلسازی حرکت سیال از آنها

برای اینکه بتوان از جریانهای ثانویه صرف نظر کرد، آزمایشها و محاسبات برای سرعتهای برش کم انجام می شود. چنانچه ارتفاع (h) کم باشد، h' نیز قابل صرف نظر کردن خواهد بود (h' ~ 0). بدین ترتیب شرایط یاد شده به صورت زیر ساده می شوند:

$$Archive\ of\ SID \quad (20)$$

$$S_{\theta\theta} = 0 \quad (21)$$

$$V_z = V_r = 0 \quad (22)$$

$$S_{zz} = P - P_a \quad (23)$$

حال می توان با اعمال شرایط بالا معادلات حرکت را بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} \cdot S_{\theta\theta}}{r} + \rho \frac{V_r^2}{r} \quad (24)$$

$$\rho \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) \quad (25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \rho g \quad (26)$$

از ترکیب معادلات 24 و 26 می توان اختلاف فشار را بدست آورد:

$$dP = \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} \cdot S_{\theta\theta}}{r} + \rho \frac{V_r^2}{r} \right) dr + \left(\frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \rho g \right) dz \quad (27)$$

با انتگرالگیری از معادله فوق و استفاده از معادله 23 ارتفاع سیال اطراف میله $z=h(r,\Omega)$ بدست می آید.

$$h(r,\Omega) = \frac{1}{\rho g} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr} \cdot S_{\theta\theta}}{r} + \rho \frac{V_r^2}{r} \right) dr \quad (28)$$

با در دست داشتن مقادیر تنشهای عمودی و سرعت زاویه ای می توان از معادله بالا برای محاسبه ارتفاع سطح آزاد سیال استفاده کرد. بنابراین، هدف یافتن مقادیر V_θ و C_k است. با قرار دادن معادله 9 در معادله 25 خواهیم داشت:

$$\rho \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \eta \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right) \right] + 2\mu_k \frac{\partial C_{12k}}{\partial r} + \frac{2}{r} [\eta s \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right) + 2\mu_k C_{12k}]$$

زاویه ای یکواخت Ω در ظرفی با شعاع R در مایع و پسکوالاستیک می چرخد و نیمرخ سطح آزاد $Z=h(r,\Omega)$ را ایجاد کند. هوای بالای سطح آزاد، کشش مماسی اعمال نمی کند و اختلاف بین تنشهای عمودی در داخل مایع با فشار هوا در اطراف سطح آزاد به وسیله کشش سطحی موازنه شده است. معادلات پیوستگی و حرکت در سیستم استوانه ای (r,θ,z) و برای تعادل محور $\frac{\partial}{\partial \theta}$ نوشته می شود:

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (10)$$

$$\rho(U,V)U = \nabla(P + \rho gz) + \nabla \cdot S \quad (11)$$

با فرض اینکه $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ است معادلات بالا به شکل زیر ساده می شوند:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r V_z) = 0 \quad (12)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \left[\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \quad (13)$$

$$\frac{S_{rr} \cdot S_{\theta\theta}}{r} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_\theta V_r}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) + \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial z} \quad (14)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right] - \rho g \quad (15)$$

شرایط زیر را در سطح آزاد سیال می توان اعمال کرد:

۱- مؤلفه های عمودی سرعت باید حذف شوند:

$$V_z - h' V_r = 0 \quad h' = \frac{dh}{dr} \quad (16)$$

۲- مؤلفه های زاویه ای و شعاعی تنش باید حذف شوند:

$$S_{z\theta} - h' S_{r\theta} = 0 \quad (17)$$

$$h' (S_{zz} - S_{rr}) + (1 + h'^2) S_{rz} = 0 \quad (18)$$

۳- جهش در تنش عمودی به کمک نیروی کشش سطحی با کشش سطحی T موازنه می شود.

$$-P + P_a + S_{zz} - h' S_{rz} = \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r h'}{(1 + h'^2)^{1/2}} \right] \quad (19)$$

اکنون می توان مقادیر بدست آمده برای C_k را در معادلات ۶ و ۷ بکار برد و تنشهای عمودی (Stresses) را محاسبه کرد و با داشتن $V_{\theta}(t)$ از معادله ۲۸ ارتفاع سطح آزاد سیال را بدست آورد. تنها مجهولات باقیمانده پارامترهای مدل لیتوف (Sdhy) اند که در تطبیق مدل نظری با نتایج تجربی در قسمت بحث و بررسی نتایج حاصل خواهند شد.

Archive of SID

تجربی

مواد

سیال A1 محلول ۲ درصد وزنی حجمی پلی ایزوبوتیلن در بترن است. در دمای $25^{\circ}C$ مشخصات فیزیکی این سیال به صورت زیر گزارش شده است [۴]

$$\rho = 880 \text{ Kg/m}^3$$

$$T = 30.10^{-3} \text{ N/M}$$

$$M_0 = 4/3 \times 10^{-7} \text{ kg/mol} \quad M_0/M_0 = 2$$

گراژیونری ظاهری این محلول بر طبق مدل کارو - پاشودا به صورت معادله زیر تعریف شده است [۴]

$$\eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 \cdot \eta_{\infty}}{[1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0)^2]^{1/2}} \quad (40)$$

$$(\eta_0 = 19/4, \eta_{\infty} = 0.18 \text{ Pa.s})$$

دستگاه

دستگاه مورد استفاده شامل یک مخلوط کن میله‌ای آزمایشگاهی است که مجهز به دورسج رقیق و زمان سنج است. برای استفاده از این دستگاه تغییراتی در آن داده شده است، بدین صورت که به شفت موتور یک سه نظام متصل شده و میله‌ای به قطر 10 mm به این سه نظام وصل شده و در مسیر جریان نیز یک آمپر متر نصب شده است (شکل ۱).

روش آزمایش

یک میله به سه نظام دستگاه به عنوان میله (Bob) وصل شده و در داخل یک ظرف استوانه‌ای به عنوان فنجان (cup) دارای سیال A1 شروع به چرخیدن می‌کند. برای محاسبه گراژیونری ظاهری بدین صورت عمل می‌شود که ابتدا جریان مصرفی موتور قبل از فرورفتن میله در سیال برای دوره‌های مختلف موتور خوانده می‌شود. سپس، میله در داخل محلول

حل همزمان دسته معادله‌های ۴ و معادله ۲۹ یا توجه به شرایط مرزی زیر مقادیر $C_{11k}, C_{12k}, C_{13k}, C_{14k}$ بر حسب پارامترهای مدل لیتوف (Sdhy) بدست خواهد آمد و حل همزمان این چهار معادله به روش عددی و به وسیله کامپیوتر مقدور خواهد بود.

$$C_{11k}(t, 0) = 1 \quad (30)$$

$$C_{12k}(t, 0) = 0 \quad (31)$$

$$C_{13k}(t, 0) = 1 \quad (32)$$

$$V_{\theta}(t, 0) = 0 \quad (33)$$

$$V_{\theta}(0, t) = 0 \quad (34)$$

$$V_{\theta}(a, t > 0) = \omega \Omega \quad (35)$$

روش حل معادله به صورت عددی است و نکات زیر در حل معادلات باید رعایت شود:

۱- بر روی میله برای بدست آوردن C_{12k} نقطه بعدی باید از تقریب تفاضلی پیشرو مشتق اول استفاده شود:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (36)$$

۲- در روی جدار ظرف باید از تقریب تفاضلی مشتق اول زیر استفاده شود:

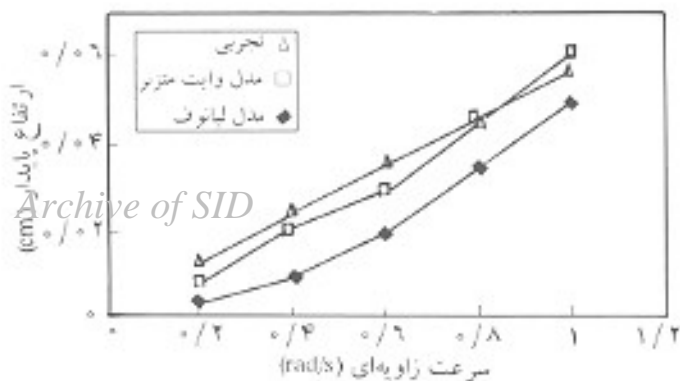
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (37)$$

۳- در نقاط دیگر نیز از تقریب تفاضلی مرکزی مشتق اول استفاده می‌شود:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (38)$$

۴- مشتق دوم بر روی میله و جداره ظرف صفر است و در نقاط دیگر از تقریب تفاضلی مرکزی مشتق دوم قابل محاسبه است:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (39)$$



شکل ۲ - مقایسه ارتفاع پیش‌بینی شده مدل لیاثوف با مدل وایت مترز و ارتفاع تجربی بر حسب سرعت زاویه‌ای.

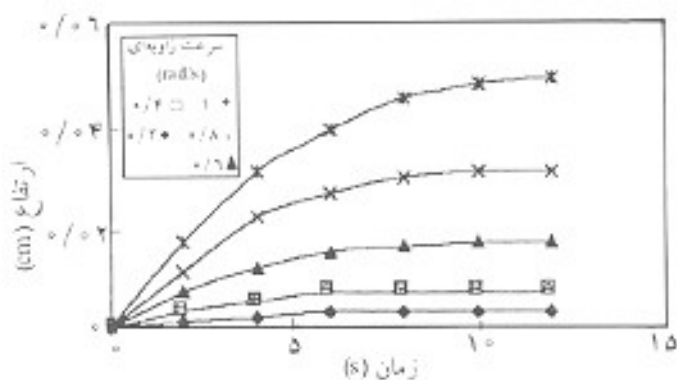
نتایج و بحث

برای بدست آوردن پارامترهای مدل لیاثوف از روش حد اقل مربعات استفاده می‌شود. برای این کار مقادیر تجربی h و معادله‌ای که مقدار h را به صورت نظری بیان کند لازم است. با استفاده از معادله ۴۰ در دمای 25°C و با قرار دادن سرعت‌های برش مختلف، مقادیر گرانروی ظاهری مربوط بدست می‌آید. در صورتی که مقادیر سرعت برش و گرانروی ظاهری در معادله سرعت برش لیاثوف قرار داده شوند، مقادیر پارامترهای مدل لیاثوف به صورت زیر بدست می‌آیند:

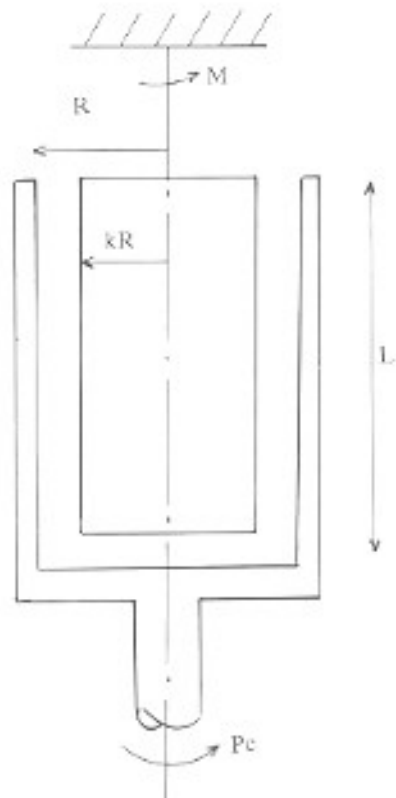
$$S = 0.075$$

$$\theta = 1/7 s$$

$$\eta = 18/5 \text{ Pas}$$



شکل ۳ - افزایش ارتفاع پیش‌بینی شده مدل لیاثوف در سرعت‌های زاویه‌ای مختلف بر حسب زمان تا زمان پایداری.



شکل ۱ - نمای ساده از دستگاه میله و فنجان.

قرار گرفته و در دورهای مختلف دوباره جریان مصرفی ثبت می‌شود. با محاسبه توان مصرفی موتور در هر دو حالت و تفاضل دو توان، مقدار توان مصرفی سیال مشخص می‌شود که اگر بر سرعت زاویه‌ای تقسیم شود، گشتاور مورد نیاز حاصل می‌شود:

$$M = \frac{V \cdot I}{\Omega} \quad (41)$$

با قرار دادن مقدار گشتاور M بدست آمده در معادله ۴۲ تنش برشی محاسبه می‌شود و سرعت برش نیز از تقسیم سرعت زاویه‌ای بر تفاضل شعاع سیلندر و میله (معادله ۴۳) بدست می‌آید [۹].

$$S_{\theta\theta} = \frac{M}{2\pi r_0^3 L} \quad (42)$$

$$\gamma' = \frac{\Omega}{R - a} \quad (43)$$

بر تقسیم تنش برشی بر سرعت برش، گرانروی ظاهری تجربی سیال قابل محاسبه خواهد بود.

می‌کند.

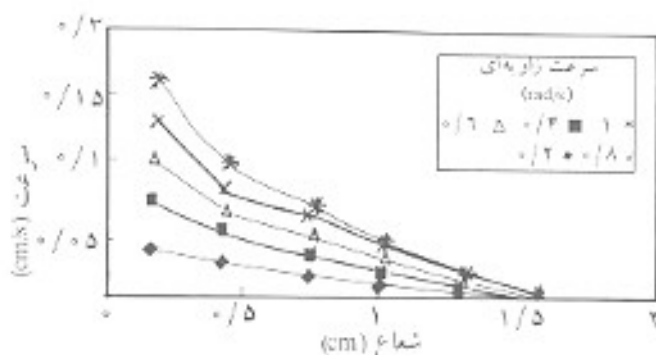
در شکل ۴ شیب نمودار تغییر سرعت بر حسب شعاع در سرعت‌های زاویه‌ای مختلف قابل اندازه‌گیری است. هر چه سرعت زاویه‌ای بیشتری شود و در همسایگی میله سرعت غیر خطی‌تر می‌شود و تأثیر اختلاف دوم تنش‌های عمودی بیشتر نمایان می‌گردد. برای سیالانی که نواح زمان استراحت و گرانروی آنها با سرعت برش کاهش می‌یابد مدل لیانوف با در نظر گرفتن اختلاف دوم تنش‌های عمودی بهتر می‌تواند داده‌های تجربی را پوشش دهد.

نتیجه‌گیری

معادله قانونمند لیانوف برای مدلسازی بالا آمدن سیال ویسکوالاستیک از میله چرخان قابل استفاده است و با در نظر گرفتن اختلاف دوم تنش‌های عمودی برای پیش‌بینی رفتار سیالانی که زمان آسایش (θ) و گرانروی ظاهری آنها با سرعت برش کاهش می‌یابد می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. همچنین، از آنجا که زمان لازم برای اینکه سیال در اثر چرخش میله به ارتفاع پایدار برسد، مسکن است طولانی باشد و این مسئله می‌تواند باعث تخریب زنجیرهای مولکولی گردد. از این رو حل عددی و غیر بکوانت مسئله این امکان را فراهم می‌کند که ارتفاع بالا آمدن سیال در زمانهای کوتاه‌تر نیز قابل محاسبه باشد و بتوان از داده‌های تجربی در زمانهای کوتاه نیز استفاده کرد. در عین حال حل غیر بکوانت مسئله، به دلیل زمان زیاد پاسخگویی، برای کامپیوتر ایجاد محدودیت می‌کند که برای جبران آن در معادله ۲۸ از کشش سطحی صرف نظر شده است که می‌تواند عامل ایجاد خطا در پیش‌بینی مدل باشد. البته، با استفاده از کامپیوترهای قدرتمند می‌توان از کشش سطحی و حبه‌های بعدی معادله ۹ نیز صرف نظر نکرده و با حل ناپایدار مسئله جواب بهتری گرفت.

مراجع

1. Newton I., *Mathematical principles of Natural Philosophy and System of The world*; unwo of california, 1962.
2. Reiner M., *Deformation Strain and Flow: an Elementary Introduction to Rheology*; Lewis, London, 1984.
3. coleman B.D., marko vitz H. and Nof W.; *viscometric Flows of Non - Newtonian Fluids*; springer . New York, 1966.



شکل ۴- شیب تغییر سرعت بر حسب شعاع در سرعت‌های زاویه‌ای مختلف (پیش‌بینی مدل لیانوف).

پس از جایگزینی مقادیر پارامترهای مدل لیانوف در معادله ۲۹ و حل کامپیوتری معادله و بدست آوردن تنش‌های عمودی از معادلات ۶ و ۷ می‌توان با استفاده از معادله ۲۸ ارتفاع سیال بالا آمده از میله را محاسبه کرد. حل تمام معادلات به کمک برنامه کامپیوتری انجام شده است. ارتفاع سیال که از طریق برنامه کامپیوتری و بر اساس مدل لیانوف بدست آمده است در کنار ارتفاع تجربی که از مشاهده آزمایش ثبت شده است و ارتفاع بدست آمده از مدل وایت - مترن در شکل ۲ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل وایت - مترن با افزایش سرعت زاویه‌ای نوسان می‌کند و علاوه بر این مطابق نتایج مرجع ۴ به دلیل در نظر نگرفتن تنش‌های عمودی دوم (N_v) در سرعت‌های زاویه‌ای بالاتر، از نتایج تجربی انحراف بیشتری دارد. در صورتی که مدل لیانوف همواره یک اختلاف ثابت با نتایج تجربی دارد و منشاء این اختلاف در نظر نگرفتن جمله‌های بیشتری از معادله ۹ به دلیل محدودیت محاسبات است. در صورتی که بتوان با استفاده از کامپیوترهای قدرتمند از جمله‌های سوم به بعد (K>۲) این معادله استفاده کرد، اختلاف بسیار ناچیز می‌شود. از طرفی به علت پایدار نشدن ارتفاع سیال در سرعت‌های کم که منجر از کامل نشدن زمان آسایش (θ) ماده است. در این محدوده انحراف بیشتر است که با حل ناپایدار (Unsteady) مسئله می‌توان بر این مشکل نیز فائق آمد. در شکل ۳ ارتفاع سیال بالا آمده از میله در سرعت‌های زاویه‌ای مختلف بر حسب زمان بر اساس مدل لیانوف رسم شده است. مشاهده می‌شود که در سرعت‌های زاویه‌ای کم، سطح سیال به مقدار بسیار کم بالا می‌آید و امکان مقایسه آن با نتایج تجربی وجود ندارد، زیرا اندازه‌گیری تجربی این ارتفاع بدون استفاده از ابزار دقیق مقدور نیست. در سرعت‌های زاویه‌ای بیشتر ارتفاع سیال نیز به صورت کاملاً غیر خطی با زمان افزایش می‌یابد که به دلیل افزایش اختلاف تنش‌های عمودی است. افزایش سرعت زاویه‌ای ممکن است باعث کاهش گرانروی ظاهری شود که مدل لیانوف نیز این کاهش گرانروی را تایید

7. Joseph D.D., Beavers G.S., eers A., Dewald C., Hoger A. and Than P.; Climbing Constants for Various Liquid; *J. Rheol.*; **28**, 325-45, 1984.
8. Leonov A.I., Lipkina E.H., Paskhin E.D., Prokurin A.N.; Theoretical and Experimental Investigation fo Shearing in Elastic Polymer Liquid; *Rheol. Acta.*; **15**, 411-26, 1976.
9. White J.L.; *Principles of Polymer Engineering Rheology*; John wiley and Sons, New York, 1990.
4. Liao T.Y., Hu H.H. and Joseph D.D.; white - Metzner Models for Rod Climbing in AI; *J. non - Newtonian Fluid mech.*; **51**, 111-124, 1994.
5. Beavers G.S. and Joseph D.D.; The Rotating rod viscometer; *J. Fluid mech.*; **69**, 475-511, 1975.
6. Yoo J.Y., Joseph D.D. and Beavers G.S.; Higher - Order Theory of the Weissenberg Effect; *J. Fluid mech.*; **92**, 526-90, 1979.