



اثر تنش‌های پس ماند گرمایی ناشی از پخت بر تغییر شکل چند لایه‌ای‌های کامپوزیتی تخت و استوانه‌ای

احمد رضا قاسمی*^۱، ابوذر یاسمی^۲

۱- کاشان، دانشگاه کاشان، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، صندوق پستی ۵۱۱۶۷-۸۷۳۱۷

۲- کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، صندوق پستی ۳۱۴۸۵-۳۱۳

دریافت: ۸۷/۸/۲۰، پذیرش: ۸۷/۱۲/۲۷

چکیده

چند لایه‌ای‌های کامپوزیتی نامتقارن، در اثر فرایند پخت از حالت مسطح خارج شده و تغییر شکل می‌دهند. نظریه کلاسیک لایه‌ای، شکل پس از پخت این قطعات را زینی شکل پیش‌بینی می‌کند، در حالی که با در نظر گرفتن عواملی هم چون ابعاد نمونه و دمای پخت، دو حالت استوانه‌ای نیز ممکن است، رخ دهد. افزون بر این، برای صفحات غیرتخت، لازم است خواص هندسی به طور غیرخطی در نظر گرفته شود. روش انرژی ریلی - ریتز شکل چند لایه‌های کامپوزیتی پلیمری نامتقارن را در دمای محیط با توجه به ابعاد آنها به دقت پیش‌بینی می‌کند که می‌تواند حالت زینی یا استوانه‌ای شکل داشته باشند. در این پژوهش، معادلات انرژی توسعه داده شده و انحناهای چند لایه‌های نازک کامپوزیتی با درجات بالاتر مطالعه شده است. برای در نظر گرفتن معادلات انرژی با درجات بالاتر، پوسته‌های کامپوزیتی متعامد که به شکل استوانه‌ای بودند، انتخاب شده است. شکل پس از پخت پوسته‌های کامپوزیتی به ترتیب چیدمان لایه‌ها، شعاع انحنا، ضخامت چند لایه و دمای پخت قطعات بستگی دارد. بنابراین در پژوهش حاضر، تغییرات این پارامترها بررسی و نتایج ارزیابی شده است. هم چنین، در باره تعیین کرنش‌ها و تنش‌های پس ماند با استفاده از کرنش‌ها و انحناهای لایه میانی بحث شده است.

واژه‌های کلیدی

تنش‌های گرمایی، کامپوزیت پلیمری، چند لایه‌ای نامتقارن، تغییر شکل، روش انرژی

* مسئول مکاتبات، پیام‌نگار:

Ghasemi@kashanu.ac.ir

Effect of Residual Thermal Stresses in Curing Process on the Deformation of Flat and Cylindrical Composite Laminates

A.R. Ghasemi*¹ and A. Yasami²

1. Mechanical Engineering Group, Engineering Department, Kashan University, P.O. Box: 87317-51167, Kashan, Iran

2. Mechanical Engineering Group, Engineering Department, Islamic Azad University, P.O. Box: 31485-313, Karaj, Iran

Received 10 November 2008, accepted 17 March 2009

Abstract

Unsymmetrical composite laminates deform from the flat state in curing process. According to the "lamination theory" the cured shape of unsymmetrical laminates should always be saddle-like, while considering parameters like specimen lengths and cure temperature, it may lead to two cylindrical shapes. In addition it is necessary to consider geometrical non-linearity for the uneven plates. By considering specimen dimensions, Rayleigh-Ritz energy method precisely predicts the room-temperature shapes of the unsymmetrical polymer composite laminates. In this research, energy equations are developed to determine curvatures of unsymmetrical composite thin laminates at higher scales. Cylindrical cross-ply composite shells are selected to investigate energy method with higher degrees. Cured shape of composite shells is mainly dependent on the stacking sequences, mold radius, layer thickness and cure temperature. Therefore, the changes of these parameters are studied and consequently appropriate assessments are made on the results obtained.

Key Words

thermal stresses, polymer composite, unsymmetric laminates, deformation, energy method

(* To whom correspondence should be addressed.

E-mail: Ghasemi@kashanu.ac.ir

مقدمه

عدم تطابق ضرایب انبساط گرمایی الیاف و زمینه، انقباض و انبساط متفاوت لایه‌های متوالی به دلیل اختلاف جهت‌های اصلی آنها و انجماد غیریکنواخت قطعه به دلیل گرادیان‌های شدید دما حین ساخت سبب ایجاد تنش‌های پس‌ماند می‌شوند. تنش‌های پس‌ماند در چندلایه‌های نازک به روش آزمایشی قابل اندازه‌گیری است و اهمیت محاسبه آنها آشکار شده است [۱،۲]. افزون بر این، در کامپوزیت‌های پلیمری گرماسخت تنش‌ها به دلیل انقباض زمینه در اثر پیوند سراسری و در کامپوزیت‌های پلیمری گرمانرم به دلیل انقباض زمینه در اثر بلورینگی ایجاد می‌شوند [۳]. اندازه تنش‌های پس‌ماند به ساختار چندلایه، خواص مواد لایه‌ها و فرایند ساخت بستگی دارد. اگر تنش‌های پس‌ماند هنگام طراحی قطعات کامپوزیتی در نظر گرفته نشود یا به درستی محاسبه نشود، ضریب اطمینان بیشتری در طراحی لازم است. این امر منجر به تولید قطعات غیربهینه می‌شود که در نتیجه استحکام و وزن سازه را افزایش می‌دهد [۴].

تغییر شکلی که در چندلایه‌های کامپوزیتی نامتقارن پس از فرایند پخت رخ می‌دهد، به دلیل وجود تنش‌های پس‌ماند گرمایی در قطعه است [۵]. در سال ۱۹۸۱، Hyer پژوهش خود را در باره تغییر شکل چندلایه‌های نامتقارن شروع کرد و آزمایش‌هایی را برای بررسی شکل‌های چندلایه‌های نامتقارن پس از پخت انجام داد [۶،۷]. نتایج این آزمایش‌ها با نتایج نظریه کلاسیک لایه‌ای، که شکل‌های پس از پخت چندلایه‌ها را به شکل زینی پیش‌بینی می‌کرد، مغایرت داشت و شکل‌های پس از پخت به دست آمده اکثراً حالت استوانه‌ای داشتند. این تناقض به دلیل وجود خواص غیرخطی هندسی در چندلایه‌های نازک بود. سپس این پژوهشگر [۸]، چیدمان‌های متفاوت را مطالعه کرد و به این نتیجه رسید که برای هر چیدمان متعامد طول بحرانی از قطعه وجود دارد. وقتی که طول چندلایه کوچک‌تر از طول بحرانی باشد، شکل پایانی حالت زینی دارد. اما، وقتی که طول چندلایه بزرگ‌تر از طول بحرانی می‌شود، دو شکل استوانه‌ای و یک شکل زینی به وجود می‌آید. در این حالت شکل زینی پایدار نیست و به طور طبیعی نمی‌تواند وجود داشته باشد، ولی دو شکل استوانه‌ای پایدار هستند. هر یک از این شکل‌های استوانه‌ای می‌توانند طی عملی که به آن میان پرش گفته می‌شود به شکل استوانه‌ای دیگری که همان مشخصات اولیه را دارد، تبدیل شود. استوانه دوم در جهت عمود بر استوانه اول است و علامت انحنا آن مخالف انحنا استوانه اولیه است.

چندلایه‌های بررسی شده توسط Hyer چیدمان متعامد داشتند. Dang و Tang [۹] کار مدل‌سازی اولیه را روی شکل‌های پس از پخت چندلایه‌های با ترتیب چیدمان دلخواه انجام دادند و به این نتیجه

رسیدند که شکل‌های پس از پخت، استوانه‌ای هستند، اما، مولد استوانه‌ها ممکن است در لبه چندلایه‌ها موازی نباشند. Jun و Hong [۱۰] این موضوع را بیشتر بررسی کردند و مدلی را که بسیار کلی‌تر و متداول‌تر از مدل Dang و Tang بود، گسترش دادند. آنان به این نتیجه رسیدند که انحناهای محاسبه شده به کمک نظریه کلاسیک لایه فقط در دامنه محدودی از نسبت طول به ضخامت پیش از نقطه انشعاب، با نتایج آنها مطابقت دارد. Dano و Hyer [۱۱] پدیده میان پرش بعضی از چندلایه‌های متعامد کامپوزیتی را مطالعه کردند. آنها در پژوهش خود، مدلی را برای پیش‌بینی کردن نیروهایی که ممان‌های لازم را در نزدیکی لبه چندلایه به وجود می‌آورند، تا پدیده میان پرش رخ دهد، توسعه دادند. در مطالعه دیگری [۱۲] Dano و Hyer پژوهش قبلی خود را توسعه دادند و پدیده میان پرش چندلایه‌های نامتقارن را در حالت کلی بررسی کردند. به تازگی درباره چندلایه‌های ضخیم‌تر نیز مطالعاتی انجام شده است. شکل‌های پس از پخت چندلایه‌های ضخیم اساساً به تنش‌های پس‌ماند مترکم در طول فرایند پخت بستگی دارند و خواص غیرخطی هندسی اثر چندانی بر شکل‌های پس از پخت این قطعات ندارد. پدیده کمانش و تغییر شکل چندلایه‌های نیمه‌استوانه‌ای نیز توسط پژوهشگران مختلف بررسی شد [۱۳،۱۴].

Zhu و همکاران [۱۵]، مدلی ترمو-ویسکوالاستیک سه بعدی را توسعه دادند، تا انتقال گرما، تنش‌های پس‌ماند و تغییر شکل بخشی از کامپوزیت را در طول فرایند پخت مطالعه کنند. آنها با استفاده از روش‌های اجزای محدود (FEM) حلی را با دقت بیشتر برای تغییر شکل به دست آوردند. در این پژوهش، به معادلات درجه بالاتر انرژی توجه شده و علاوه بر صفحات تخت، شکل پس از پخت پوسته‌های کامپوزیتی که در درون قالب استوانه‌ای قرار می‌گیرند، مطالعه شده است. از آن جا که تغییرات چیدمان چندلایه، شعاع انحنا قالب، ضخامت لایه‌ها و دمای پخت از عوامل مؤثر در تغییر شکل چندلایه و اندازه تنش‌های پس‌ماند هستند، آثار این عوامل مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، تنش‌های پس‌ماند قطعات با استفاده از انحناهای به دست آمده محاسبه شده‌اند. اندازه تغییر شکل صفحات تخت پس از تولید نمونه‌های آزمایشی و پس از گذشت عمر قطعه و رهایی تنش‌های پس‌ماند، با نتایج روش انرژی مقایسه شده‌اند. نتایج تحلیلی پوسته‌های کامپوزیتی نیز با نتایج اجزای محدود موجود ارزیابی شد.

تعیین تنش‌های پس‌ماند

روش کلاسیک

این روش فقط برای تعیین تنش‌های پس‌ماند در چندلایه‌های

$$[C'] = [B']^T \quad (10)$$

$$[D'] = [D^*]^{-1} \quad (11)$$

$$[D^*] = [D] - [B][A]^{-1}[B] \quad (12)$$

که $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ به ترتیب زمینه سفتی کششی، جفت شدن و خمشی چندلایه کامپوزیتی هستند. تنش‌های پس‌ماند برای هر تک‌لایه در مختصات غیراصولی از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\{\sigma^r\}_{off}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\epsilon^r\}_{off}^{(k)} \quad (13)$$

که $[\bar{Q}]^{(k)}$ ماتریس سفتی کاهش یافته در مختصات غیراصولی است.

روش انرژی

در این روش، ابتدا کرنش‌ها و انحنای لایه میانی از روش انرژی ریلی - ریتز محاسبه می‌شوند. سپس، با استفاده از معادلات (5) و (13)، کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند برای هر تک‌لایه به دست می‌آید. مقادیر مجاز برای انحنا در جهت $x_1 \times k_1^0$ ، ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای درجه پنجم زیر هستند [7]:

$$\begin{aligned} & (S^2 U_1)(\kappa_1^0)^5 + (S^2 V_1)(\kappa_1^0)^4 + (2S U_1 U_2)(\kappa_1^0)^3 \\ & + (STV_2 + 2S U_2 V_1)(\kappa_1^0)^2 + (SV_2^2 - T^2 U_2 + U_1 U_2^2) \kappa_1^0 \\ & + (U_2^2 V_1 - T U_2 V_2) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که:

$$S = \frac{A_{11}L_2^4 + A_{22}L_1^4}{2880}$$

$$T = D_{12} + \frac{A_{12}B_{11}B_{22}}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}$$

$$U_1 = D_{11} - \frac{A_{22}B_{11}^2}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \quad (15)$$

$$U_2 = D_{22} - \frac{A_{11}B_{22}^2}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}$$

$$V_1 = M_1^T - \frac{B_{11}(A_{22}N_1^T - A_{12}N_2^T)}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}$$

$$V_2 = M_2^T - \frac{B_{22}(A_{11}N_2^T - A_{12}N_1^T)}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}$$

کامپوزیتی متقارن به کار می‌رود. کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند برای هر تک‌لایه در مختصات اصلی (on-axis) به وسیله معادلات زیر قابل محاسبه هستند:

$$\{\epsilon^r\}_{on}^{(k)} = \{\epsilon^n\} - \{e\} \quad (1)$$

$$\{\sigma^r\}_{on}^{(k)} = [Q]\{\epsilon^r\}_{on}^{(k)} \quad (2)$$

که $\{\epsilon^n\}$ و $\{e\}$ به ترتیب کرنش‌های غیرمکانیکی و کرنش‌های آزاد گرمایی - رطوبتی هستند و $[Q]$ نیز زمینه سفتی کاهش یافته در مختصات اصلی است. در مختصات غیراصولی (off-axis)، کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند برای هر لایه به وسیله معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{\epsilon^r\}_{off}^{(k)} = [T_\epsilon]^{-1} \{\epsilon^r\}_{on}^{(k)} \quad (3)$$

$$\{\sigma^r\}_{off}^{(k)} = [T_s]^{-1} \{\sigma^r\}_{on}^{(k)} \quad (4)$$

که $[T_\epsilon]$ و $[T_s]$ به ترتیب زمینه انتقال کرنش و زمینه انتقال تنش هستند.

روش بهینه کلاسیک

از این روش، علاوه بر تعیین تنش‌های پس‌ماند در چندلایه‌های متقارن برای محاسبه تنش‌های پس‌ماند در چندلایه‌های نامتقارن نیز استفاده می‌شود. کرنش‌های پس‌ماند برای هر تک‌لایه در مختصات غیراصولی از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\{\epsilon^r\}_{off}^{(k)} = \{\epsilon^0\} + \bar{z}_k \{\kappa^0\} - \Delta T \{\alpha\}_{off}^{(k)} \quad (5)$$

که $\{\alpha\}_{off}^{(k)}$ ، ΔT و \bar{z}_k به ترتیب ضرایب انبساط گرمایی، اختلاف بین دمای محیط و دمای عاری از تنش و فاصله متوسط لایه k تا تار خنثی هستند. $\{\epsilon^0\}$ و $\{\kappa^0\}$ به ترتیب کرنش‌ها و انحنای لایه میانی هستند و به کمک معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{\epsilon^0\} = [A']\{N^T\} + [B']\{M^T\} \quad (6)$$

$$\{\kappa^0\} = [C']\{N^T\} + [D']\{M^T\} \quad (7)$$

در معادلات بالا $\{N^T\}$ و $\{M^T\}$ نتایج تنش گرمایی و ممان گرمایی در اثر ΔT هستند. زمینه‌های $[A']$ ، $[B']$ ، $[C']$ و $[D']$ نیز از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$[A'] = [A]^{-1} + [A]^{-1}[B][D^*]^{-1}[B][A]^{-1} \quad (8)$$

$$[B'] = -[A]^{-1}[B][D^*]^{-1} \quad (9)$$

جدول ۲ - نتایج نظری و تجربی به دست آمده برای اندازه تغییر شکل قطعه (mm).

انحنا ۵۰۰ روز پس از تولید	انحنا پس از روش انرژی	چیدمان
۴/۴	۸۳۵	[0 ₄ /90 ₄]
۵/۲	۵۳۷	[0 ₂ /±45 ₂ /90 ₂]

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد، انحناهای قطعات متعامد تولیدی پس از پخت کمتر از مقادیر پیش بینی روش انرژی است و انحناهای نمونه‌های شبه همسان‌گرد پس از پخت بیش از مقادیر پیش بینی شده به کمک روش انرژی است. افزون بر این، ۵۰۰ روز پس از زمان ساخت نمونه‌ها، تنش‌های پس‌ماند به مقدار قابل توجهی رها شده و انحناهای نمونه‌ها کاهش می‌یابد. ۵۰۰ روز پس از ساخت نمونه‌های متعامد تنش‌های پس‌ماند حدود ۴۲ درصد کاهش می‌یابد، در حالی که رها شدن تنش‌های پس‌ماند در نمونه‌های شبه همسان‌گرد حدود ۲۰ درصد است.

توسعه روش انرژی

معادلاتی که Hyer برای پیش‌بینی شکل پس از پخت صفحات کامپوزیتی نامتقارن و نازک متعامد استفاده کرد، به شکل خطی و از درجه اول بود. در این پژوهش سعی شده است، از معادلات غیرخطی و از درجه دوم برای پیش‌بینی شکل پس از پخت پوسته‌های متعامد کامپوزیتی و تعیین انحناهای آنها استفاده شود. سامانه مختصات نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید، که در آن مبدأ مختصات بر مرکز هندسی قطعه منطبق است و روی صفحه میانی قرار می‌گیرد. جهت x در امتداد خط مولد پوسته استوانه‌ای است، جهت y در امتداد انحناست و z مرکز داخلی پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. جابه‌جایی‌های u ، v و w به ترتیب در جهت‌های x ، y و z هستند. جابه‌جایی‌های صفحه میانی u^0 و v^0 و هم‌چنین جابه‌جایی w به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$u^0(x, y) = a_1 x + \frac{1}{3} a_2 x^3 + a_3 x y^2 - \frac{1}{6} a^2 x^3 \quad (۱۹- الف)$$

در معادلات بالا L_1 و L_2 طول ابعاد چندلایه در حالت مسطح در راستاهای x_1 و x_2 هستند. معادله درجه پنجم (۱۴) حداکثر سه ریشه حقیقی دارد. در مواردی که سه پاسخ برای معادله وجود دارد، پاسخ مربوط به حالت زینی شکل ناپایدار است و هر دو پاسخ مربوط به حالت استوانه‌ای شکل امکان‌پذیر هستند.

هنگامی که مقادیر مجاز برای k_1^0 با استفاده از معادله (۱۴) به دست آمدند، مقادیر متناظر برای k_2^0 به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k_2^0 = -\frac{T k_1^0 + V_2}{S (k_1^0)^2 + U_2} \quad (۱۶)$$

کرنش‌های لایه میانی در جهت‌های x_1 و x_2 (ϵ_{11}^0 و ϵ_{22}^0) از حل دستگاه معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} A_{11} \epsilon_{11}^0 - C_1 k_1^0 k_2^0 - B_{11} k_1^0 + A_{12} \epsilon_{22}^0 - C_2 k_1^0 k_2^0 - N_1^T = 0 \\ A_{12} \epsilon_{11}^0 - C_3 k_1^0 k_2^0 - B_{22} k_2^0 + A_{22} \epsilon_{22}^0 - C_4 k_1^0 k_2^0 - N_2^T = 0 \end{cases} \quad (۱۷)$$

که در این دستگاه معادله، ثوابت C_1 تا C_4 از معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_{11} L_2^2 / 48 & C_2 &= A_{12} L_1^2 / 48 \\ C_3 &= A_{12} L_2^2 / 48 & C_4 &= A_{22} L_1^2 / 48 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

به منظور محاسبه اندازه تغییر شکل چندلایه‌های نامتقارن پس از عملیات پخت، چند نمونه آزمایشی متعامد (cross-ply) و شبه همسان‌گرد با استفاده از الیاف شیشه و رزین اپوکسی به روش لایه چینی دستی ساخته می‌شوند. ثوابت کشسان برای یک لایه شیشه-اپوکسی که در این پژوهش مطالعه شده است، در جدول ۱ بیان شده است. نمونه‌ها در ابعاد 20×20 cm و ضخامت $1/6 \pm 0.1$ mm هستند. عملیات ساخت با درصد حجمی الیاف کنترل شده برابر $B_f = 80\%$ و انجام عمل خلاء برای توزیع یکنواخت رزین و حذف رزین اضافی، با انجام عملیات گرمایی پخت در دمای 120°C به مدت 10 h همراه بوده است.

به منظور بررسی اثر گذشت زمان بر تغییر شکل کامپوزیت‌های پلیمری، نمونه‌های آزمایشی پس از تولید و بیش از یک سال پس از زمان تولید مطالعه و انحناهای آنها اندازه‌گیری شدند. جدول ۲ مقایسه بین پاسخ‌های نظری و میانگین نتایج تجربی را نشان می‌دهد.

جدول ۱ - ثوابت کشسان کامپوزیت شیشه-اپوکسی.

E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	α_x ($\mu / ^\circ\text{C}$)	α_y ($\mu / ^\circ\text{C}$)
۲۵	۹	۴/۸	۰/۲۶	۵/۴	۲۶

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 - 2z(\kappa_6^0 - \frac{\varepsilon_{12}^0}{2R}) - \frac{z^2 \kappa_6^0}{R} \quad (22-ج)$$

انرژی پتانسیل کل برای یک پوسته کامپوزیتی پس از فرایند پخت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$W = \int_{vol} \phi \, dv \quad (23)$$

که در آن ϕ چگالی انرژی کرنشی است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \Delta T \quad (24)$$

در معادلات بالا، C_{ijkl} ثوابت کشسان ماده، β_{ij} ضرایب وابسته به ثوابت کشسان و ضرایب انبساط گرمایی ماده، ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش و ΔT تغییرات دما را نشان می‌دهند. در این جا به دلیل این که دما از دمای عاری از تنش به دمای محیط کاهش می‌یابد، ΔT مقداری منفی در نظر گرفته می‌شود. برای یک چندلایه‌ای، C_{ijkl} به سفتی‌های کاهش یافته و β_{ij} نیز به سفتی‌های کاهش یافته و ضرایب انبساط گرمایی چندلایه وابسته است:

$$\phi = \frac{1}{2} \bar{Q}_{ij} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \bar{Q}_{ij} \alpha_i \varepsilon_{ij} \Delta T \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (25)$$

با بسط معادله (25) و با توجه به این که برای چندلایه‌های متعامد، α_6 صفر است، چگالی انرژی کرنشی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\phi = \frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_{11}^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2\bar{Q}_{66} \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_{22}^2 - (\bar{Q}_{11} \alpha_1 + \bar{Q}_{12} \alpha_2) \varepsilon_{11} \Delta T - (\bar{Q}_{12} \alpha_1 + \bar{Q}_{22} \alpha_2) \varepsilon_{22} \Delta T \quad (26)$$

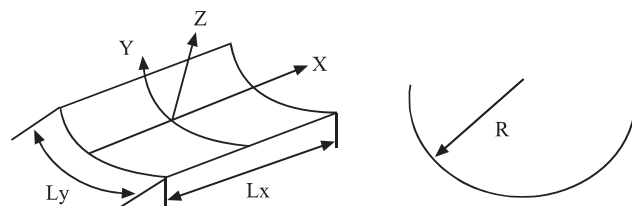
در معادلات (20-ج) و (26) از کرنش برشی تانسوری استفاده شده است. انرژی پتانسیل کل، تابعی از متغیرهای زیر است:

$$W = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \phi(a_1, b_1, a_2, b_2, a, b, a_3, \bar{Q}_{ij}, \alpha_1, \alpha_2, \Delta T, x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (27)$$

در معادله (22) به دلیل این که جمله z^2 در معادلات ظاهر شده است، انتگرال‌گیری از معادله (27) منجر به تولید مؤلفه‌های سفتی مرتبه بالا مشابه با A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} و هم چنین بارهای گرمایی مرتبه بالا مشابه با N_I^T (نیرو) و M_I^T (ممان) می‌شود:

$$[F] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^3 \, dz = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^4 - z_{k-1}^4) \quad (28)$$

$$[H] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^4 \, dz = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k^5 - z_{k-1}^5) \quad (29)$$



شکل ۱- سامانه مختصات برای بررسی معادلات تعادل.

$$v^0(x, y) = b_1 y + \frac{1}{3} b_2 y^3 - [0.5(\frac{a}{R} + ab) + a_3] x^2 y - \frac{1}{6} b^2 y^3 + \frac{(ax^2 y + by^3/3)}{2R} \quad (19-ب)$$

$$w(x, y) = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2) \quad (19-ج)$$

که R شعاع پوسته در دمای پخت و در حقیقت شعاع قالب است. مطابق نظریه ورق و پوسته، کرنش‌ها و انحناهای صفحه میانی از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \quad (20-الف)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial y})^2 - \frac{w}{R} \quad (20-ب)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2} (\frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}) \quad (20-ج)$$

و

$$\kappa_1^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (21-الف)$$

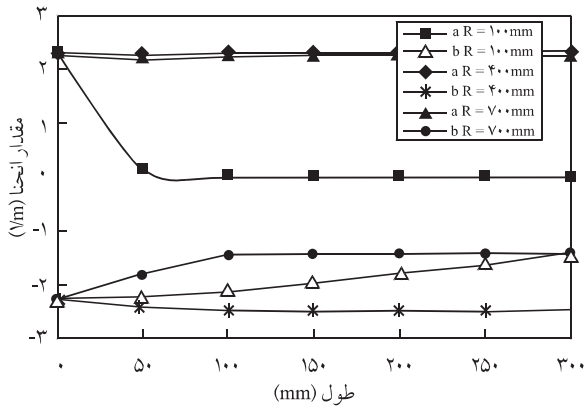
$$\kappa_2^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad (21-ب)$$

$$\kappa_6^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (21-ج)$$

معادلات بین کرنش‌های صفحه تر است. زیرا، برای مدل سازی تغییر شکل پوسته با دقت زیاد، z^2 در معادلات وارد می‌شود:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 - z \kappa_1^0 \quad (22-الف)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 - z(\kappa_2^0 - \frac{\varepsilon_{22}^0}{R}) - \frac{z^2(\kappa_2^0 - \varepsilon_{22}^0/R)}{R} \quad (22-ب)$$



شکل ۲ - تغییرات انحناهای a و b با طول پوسته و شعاع قالب برای پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان [۰/۹۰/۹۰/۰].

توجه شود که انحناهای لایه میانی از معادله (۲۱) به دست می‌آیند و از لحاظ مقداری تفاوت چندانی با متغیرهای a و b ندارند.

چندلایه‌هایی که در این پژوهش بررسی و تحلیل شدند، از فیاف کربن و رزین پلیمری اپوکسی (T300/5208) با دمای پخت 105°C هستند. ضخامت هر لایه 0.185 mm است. خواص مکانیکی کربن - اپوکسی در جدول ۳ بیان شده است.

شکل ۲ تغییرات انحناهای a و b را با طول قطعه و شعاع قالب برای پوسته با چیدمان [۰/۹۰/۹۰/۰] نشان می‌دهد. هنگامی که طول نمونه صفر است، مقادیر انحناهای $a = 2/29\text{ (V/m)}$ و $b = -2/29\text{ (V/m)}$ هستند و هر دو مستقل از R هستند. وقتی که طول افزایش می‌یابد، مقدار a کم می‌شود. اما، این کاهش برای شعاع‌های مختلف متفاوت است. برای شعاع 100 mm با افزایش طول، مقدار a کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، در حالی که برای شعاع‌های 400 mm و 700 mm با افزایش طول، a ابتدا اندکی کاهش می‌یابد، سپس دوباره افزایش می‌یابد و به مقداری ثابت می‌رسد. این مقدار ثابت برای شعاع 400 mm ، $2/3\text{ (V/m)}$ و برای شعاع 700 mm ، $2/26\text{ (V/m)}$ است. از طرف دیگر، مقدار قدر مطلق b با افزایش طول ممکن است، کاهش یا افزایش یابد. برای شعاع‌های 100 mm و 700 mm مقدار b با افزایش طول، کاهش می‌یابد و به ترتیب به مقادیر $-7/44\text{ (V/m)}$ و $-7/43\text{ (V/m)}$ در طول 300 mm می‌رسد. در حالی که برای شعاع 400 mm مقدار b با ازدیاد طول، افزایش می‌یابد و به مقدار $2/5\text{ (V/m)}$ در طول 300 mm می‌رسد.

جدول ۳ - ثوابت کشسان کامپوزیت کربن - اپوکسی (T300/5208).

E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	α_x ($\mu / ^{\circ}\text{C}$)	α_y ($\mu / ^{\circ}\text{C}$)
۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸	۰/۰۲	۲۲/۵

$$\{L^T\} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N ([\bar{Q}]^{(k)} \{\alpha\}^{(k)}) \cdot \Delta T^{(k)} \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (30)$$

انتگرال‌گیری از معادله (۲۷) پیچیده است و این عمل با استفاده از نرم‌افزار ریاضیات پیش‌رفته (Maple) انجام شده است. در این کار انتگرال‌گیری ابتدا نسبت به z انجام می‌شود، تا مقادیر A_{ij} ، B_{ij} ، D_{ij} ، H_{ij} ، F_{ij} ، M_i^T و N_i^T به دست آیند. سپس، از این مؤلفه‌ها در محاسبات نمادین بعدی استفاده می‌شود. اصل انرژی پتانسیل حداقل، نیازمند این است که:

$$\delta W = \left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) \delta a_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial b_1}\right) \delta b_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right) \delta a_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial b_2}\right) \delta b_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial a}\right) \delta a + \left(\frac{\partial W}{\partial b}\right) \delta b + \left(\frac{\partial W}{\partial a_3}\right) \delta a_3 = 0 \quad (31)$$

برای برآوردن این شرط لازم است که:

$$f_i(a_1, b_1, a_2, b_2, a, b, a_3) = \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 7 \quad (32)$$

x_i ها به ترتیب $a_1, b_1, a_2, b_2, a, b, a_3$ هستند. برای چنین مسئله غیرخطی ممکن است که چند حل با قوانین ریاضی یافت و البته همه حل‌ها پایدار نیستند. برای این که یک حل پایدار باشد، نه تنها این که باید معادله (۳۲) ارضا شود، بلکه باید تغییرات ثانویه انرژی پتانسیل کل نیز مثبت معین باشد. یعنی تمام مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین زیر مثبت باشد:

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)}{\partial(a_1, b_1, a_2, b_2, a, b, a_3)} \quad (33)$$

نتایج عددی

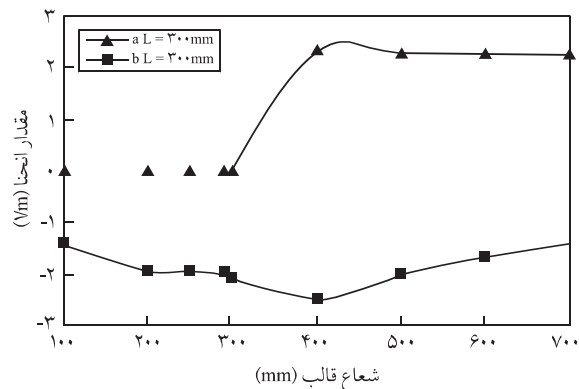
در این بخش، پس از بررسی معادلات تعادل آثار ترتیب چیدمان لایه‌ها، شعاع قالب، ضخامت لایه‌ها و دمای پخت روی شکل نهایی نمونه‌ها مطالعه عددی شد. از آن جا که شکل‌های پس از پخت به مقادیر a و b بستگی دارند، این دو متغیر بررسی شدند. در پایان با استفاده از انحناهای به دست آمده، تنش‌های پس‌ماند برای یک نمونه به دست می‌آید. کمیت‌های a و b هم‌اکنون انحناهای لایه میانی در نظر گرفته، اما باید

۳۰۰ mm است. هنگامی که ضخامت لایه‌ها افزایش می‌یابد، مقادیر a و b در طولی معین کاهش می‌یابند. مفهوم این کاهش، انحنای کمتر پوسته‌های ضخیم‌تر است و بنابراین نسبت به پوسته‌های نازک‌تر، کم عمق‌تر هستند.

شکل ۵ اثر دمای پخت قطعات را روی انحناهای a و b در پوسته با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] نشان می‌دهد. برای دماهای پخت ۱۰۵، ۱۵۵، ۲۰۵ و 255°C تمام مقادیر a به صفر میل می‌کنند. از طرف دیگر، b به ترتیب دارای مقادیر $-1/44$ ، $-2/10$ ، $-2/74$ و $-3/35$ (۱/m) در طول ۳۰۰ mm است. هنگامی که دمای پخت قطعات افزایش می‌یابد، مقادیر a و b نیز در طولی معین افزایش می‌یابند. مفهوم این افزایش، انحنا بیشتر پوسته‌ها با دمای پخت بیشتر است. بنابراین، نسبت به پوسته‌های با دمای پخت کمتر، پر عمق‌تر می‌شوند.

در پایان در باره نحوه محاسبه کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند برای هر لایه از نمونه‌های مورد مطالعه بحث می‌شود. برای این منظور، ابتدا کرنش‌ها و انحناهای لایه میانی با استفاده از معادلات (۲۰) و (۲۱) به دست آمده، سپس با استفاده از معادلات (۵) و (۱۳) کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند برای هر تک لایه به دست می‌آیند. **جدول ۴** کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند را در هر لایه برای پوسته کربن - اپوکسی با ترتیب چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰]، شعاع ۱۰۰ mm، طول ۲۵۰ mm و مختصات $x=50$ mm و $y=70$ mm نشان می‌دهد.

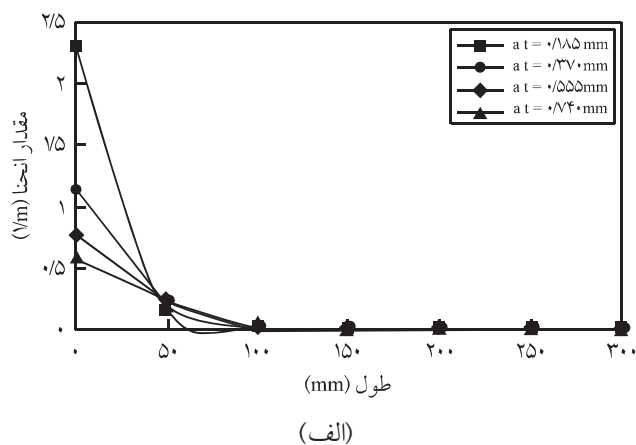
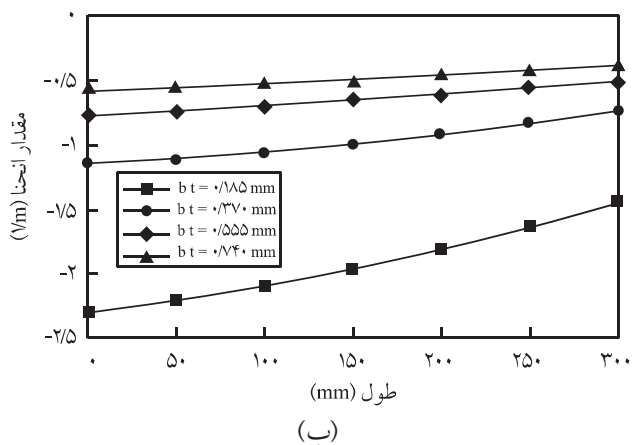
شکل ۶ توزیع تنش‌های پس‌ماند در هر لایه از پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. تنش‌های ترسیم شده در **شکل ۶** نشان می‌دهد که توزیع تنش‌های پس‌ماند در راستای استوانه از لحاظ مقدار تقریباً مساوی است و در لایه‌های صفر درجه فشاری و در لایه‌های ۹۰ درجه کششی است. توزیع تنش‌های پس‌ماند در راستای محیطی همگن نیست. تنش‌های پس‌ماند



شکل ۳ - اثر شعاع قالب R روی انحناهای a و b در پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] و $L_x = L_y = 300$ mm

شکل ۳ تغییرات a و b را با شعاع قالب R برای پوسته با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] نشان می‌دهد. مقدار a در فاصله شعاعی ۳۰۰-۱۰۰۰ mm صفر است. اما، از شعاع ۳۰۰ mm افزایش مقدار a شروع می‌شود و به مقدار $2/26$ (۱/m) در شعاع ۷۰۰ mm می‌رسد. از طرف دیگر، مقدار b در شعاع ۱۰۰ mm $-1/44$ (۱/m) است و با بیشتر شدن شعاع این مقدار نیز افزایش می‌یابد و در شعاع ۴۰۰ mm به حداکثر مقدار می‌رسد. سپس، با افزایش شعاع اندازه b کاهش می‌یابد و در شعاع ۷۰۰ mm به مقدار $-1/43$ (۱/m) می‌رسد.

شکل ۴ اثر ضخامت لایه‌ها را روی انحناهای a و b در پوسته با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] نشان می‌دهد. در این پژوهش، ضخامت لایه‌ها در هر نمونه یکسان است. برای ضخامت‌های ۰/۱۸۵، ۰/۳۷۰، ۰/۵۵۵ و ۰/۷۴۰ mm مقادیر مختلف a به سمت صفر میل می‌کنند. از سوی دیگر، b به ترتیب دارای مقادیر $-1/44$ ، $-0/73$ ، $-0/49$ و $-0/37$ (۱/m) در طول

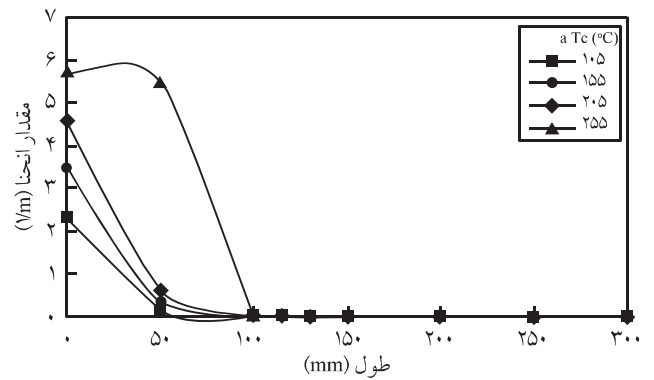


شکل ۴ - اثر ضخامت لایه‌ها روی انحناهای a و b در پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] و $R=100$ mm: (الف) در راستای محور استوانه a و (ب) در راستای عمود بر محور استوانه b .

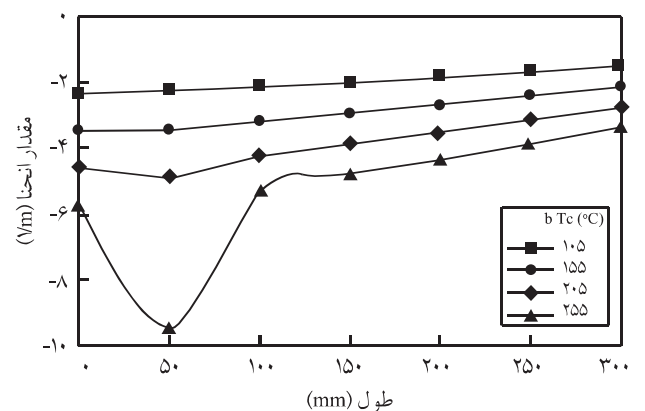
محیطی در لایه‌های اول، دوم و چهارم کششی و در لایه سوم که لایه ۹۰ درجه است، فشاری است. برآیند تنش‌های پس‌ماند در راستای طولی و محیطی نیز صفر است. تنش‌های پس‌ماند برشی نیز در هر لایه صفر است.

اعتبار سنجی و مقایسه با نتایج

برای بررسی صحت مطالعات انجام شده، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج اجزای محدود موجود [۱۴] مقایسه و ارزیابی شده‌اند. ماده مورد استفاده در پژوهش مزبور کربن - اپوکسی با دمای پخت 185°C ، دمای محیط 21°C و ضخامت هر تک لایه به اندازه 0.125 mm بود. خواص



(الف)

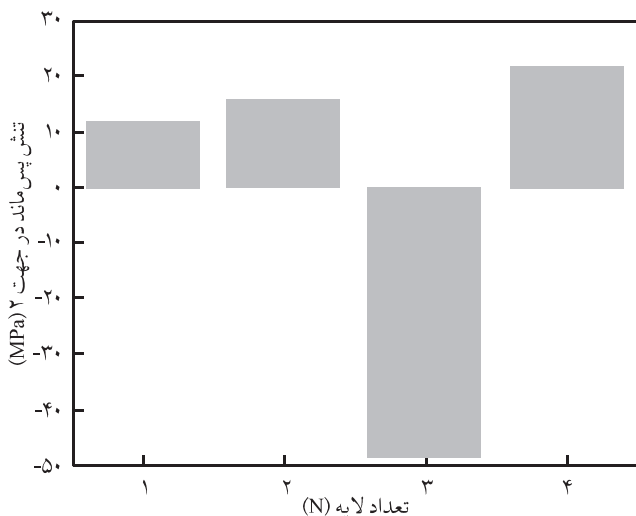


(ب)

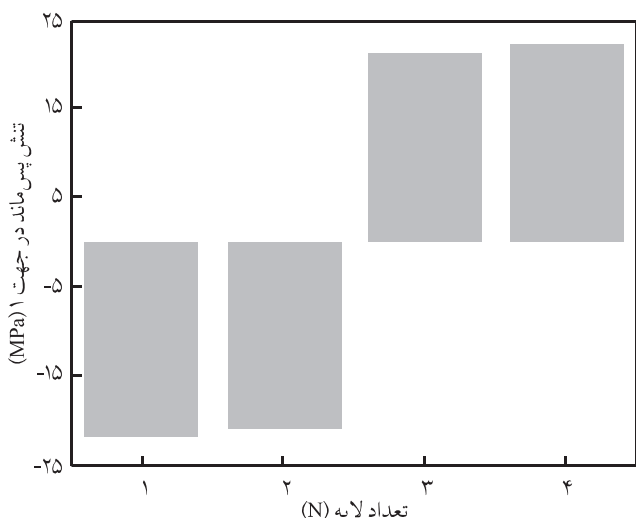
شکل ۵ - اثر دمای پخت قطعات روی انحنای a و b در پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان $[0/0/90/90]$ و $R = 100\text{ mm}$: (الف) در راستای محور استوانه a و (ب) در راستای عمود بر محور استوانه b.

جدول ۴ - کرنش‌ها و تنش‌های پس‌ماند در هر لایه برای پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان $[0/0/90/90]$ ، $R = 100\text{ mm}$ و $L_x = L_y = 250\text{ mm}$.

لایه‌ها				
90°	90°	0°	0°	کرنش
۲۱۰/۸۱	۲۱۰/۸۱	-۱۳۹/۹	-۱۳۹/۹	ϵ_{11}^r
۸۶/۰	-۳۰/۷۸	۱۵۵/۸۴	۱۱۷/۰/۶	ϵ_{22}^r
۰	۰	۰	۰	ϵ_{12}^r
90°	90°	0°	0°	تنش (MPa)
۲۲/۰۵	۲۰/۹۳	-۲۰/۹۱	-۲۲/۰۳	σ_{11}^r
۲۱۷/۴	-۴۸/۷۶	۱۵/۷۱	۱۱۷/۰	σ_{22}^r
۰	۰	۰	۰	σ_{12}^r



(الف)



(ب)

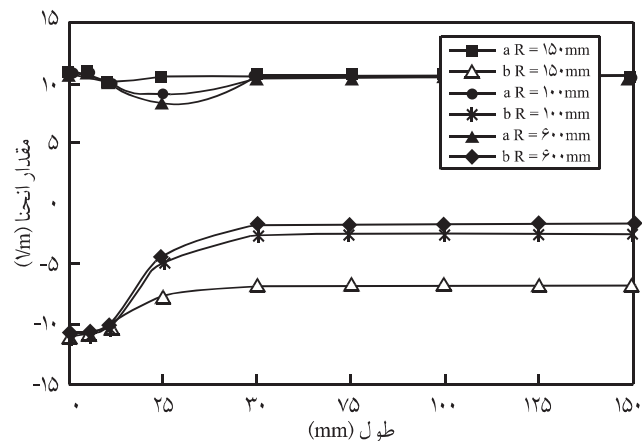
شکل ۶ - توزیع تنش‌های پس‌ماند در لایه‌ها در راستاهای مختلف برای پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان $[0/0/90/90]$ ، $R = 100\text{ mm}$ و $L_x = L_y = 250\text{ mm}$.

است. مقایسه نتایج ارائه شده در شکل های ۷ و ۸ تطابق بسیار مناسبی را نشان می دهد. حداکثر اختلاف نتایج در طول ۲۵ mm و برای شعاع $R=600$ mm و در انحنای a رخ می دهد که برابر با ۶/۵ درصد است.

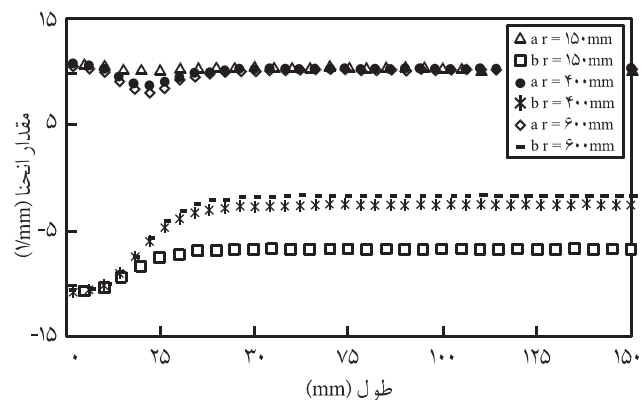
نتیجه گیری

در این پژوهش، تغییر شکل چندلایه های کامپوزیتی متعامد در اثر فرایند پخت مطالعه شد. برای بررسی تغییر شکل صفحات تخت دو نمونه مربعی شکل مطالعه شد. مقایسه میان نتایج نظری و تجربی نشان می دهد، انحنای قطعات متعامد تولیدی پس از پخت کمتر از مقادیر پیش بینی روش انرژی است و انحنای نمونه های شبه همسان گرد پس از پخت بیش از مقادیر پیش بینی شده به کمک روش انرژی است. هم چنین، ۵۰۰ روز پس از زمان ساخت نمونه ها، تنش های پس ماند به مقدار قابل توجهی رها شده و انحنای نمونه ها کاهش می یابد. ۵۰۰ روز پس از ساخت نمونه های متعامد تنش های پس ماند حدود ۴۲ درصد کاهش می یابد، در حالی که رها شدن تنش های پس ماند در نمونه های شبه همسان گرد حدود ۲۰ درصد است.

توسعه روش انرژی برای قطعات متعامد استوانه ای نشان می دهد، ترتیب چیدمان، شعاع قالب، ضخامت چندلایه و دمای پخت روی شکل های پس از پخت نمونه ها اثرگذار است. هنگامی که ضخامت لایه ها افزایش می یابد، مقادیر a و b در طولی معین کاهش می یابند. مفهوم این کاهش، انحنای کمتر پوسته های ضخیم تر است. بنابراین، نسبت به پوسته های نازک تر، کم عمق تر خواهند بود. هنگامی که دمای پخت قطعات افزایش می یابد، مقادیر a و b نیز در طولی معین افزایش می یابند. مفهوم این افزایش، انحنای بیشتر پوسته ها با دمای پخت بیشتر است. بنابراین، نسبت به پوسته های با دمای پخت کمتر، پرعمق تر هستند. هنگامی که طول نمونه صفر است، مقادیر انحنای مستقل از R است. وقتی که طول افزایش می یابد، مقدار a کم می شود. اما، این کاهش برای شعاع های مختلف متفاوت است. از طرف دیگر، مقدار b با افزایش شعاع ممکن است، افزایش یا کاهش یابد. محاسبه تنش های پس ماند نشان می دهد، مجموع تنش های پس ماند در هر راستایی صفر است که این نشان گر خود متعادل بودن تنش های پس ماند است. برای نمونه های استوانه ای مانند صفحات تخت با توجه به طول بحرانی سه حل وجود دارد. یک حل از این سه ناپایدار است و با توجه به شکل استوانه ای قالب تنها یک حل از دو حل پایدار امکان وقوع دارند. نتایج ارائه شده در این پژوهش بر اساس حل پایدار بیان شده است. مدلی که در این پژوهش مطالعه شد، می تواند به عنوان توسعه روش انرژی در نظر گرفته شود.



شکل ۷ - تغییرات انحنای a و b با طول پوسته و شعاع قالب برای پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰].



شکل ۸ - تغییرات انحنای a و b با طول پوسته و شعاع قالب برای پوسته کربن - اپوکسی با چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰]، [۱۴].

لایه ای این ترکیب در جدول ۵ آمده است.

شکل ۷ تغییرات انحنای a و b را برای طول های مختلف و به ازای شعاع های قالب $R=600$ mm و $R=400$ mm، $R=150$ mm چیدمان [۰/۰/۹۰/۹۰] و با استفاده از معادلات ارائه شده در این پژوهش را نشان می دهد. شکل ۸ نیز نتایج اجزای محدود ارائه شده در مرجع [۱۴]

جدول ۵ - ثوابت کشسان کامپوزیت کربن - اپوکسی [۱۴].

Ex (GPa)	Ey (GPa)	Gxy (GPa)	ν_{xy}	α_y (μ / $^{\circ}$ C)	α_x (μ / $^{\circ}$ C)
۱۳۵	۸۸	۴/۴۷	۰/۳۳	۰/۱۹	۴۰/۳

هنگامی که شعاع قالب افزایش یافته و مقدار بزرگی را به خود اختصاص دهد، نتایج انحنا به نتایج Hyer بسیار نزدیک می‌شوند.

اختصارات

$\hat{\sigma}_i^T, \hat{a}_i^T$ مؤلفه‌های تنش و کرنش پس‌ماند

\hat{a}_i^n مؤلفه‌های کرنش‌های غیر مکانیکی

e_i مؤلفه‌های کرنش‌های آزاد گرمایی - رطوبتی

\hat{a}_i^0, \hat{e}_i^0 مؤلفه‌های کرنش‌ها و انحناهای لایه میانی

Q_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته در مختصات اصلی

\bar{Q}_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته در مختصات غیر اصلی

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$ و H_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی

L_i^T, M_i^T, N_i^T مؤلفه‌های بارهای گرمایی

T_s و T_e ماتریس‌های انتقال تنش و کرنش

α_i ضرایب انبساط گرمایی

u^0, v^0 جابه‌جایی‌های لایه میانی در راستای محورهای x و y

w جابه‌جایی در راستای محور z

W انرژی پتانسیل کل

φ چگالی انرژی کرنشی

R شعاع پوسته در دمای بالا رفته

L_x و L_y ابعاد چندلایه

J ماتریس ژاکوبین

\bar{z}_k فاصله متوسط لایه k تا تار خنثی

C_{ijkl} ثوابت کشسان ماده در حالت کلی

a_1, b_1, a_2, b_2, a, b و a_3 ضرایبی از کرنش‌ها و انحناهای لایه میانی

E_x, E_y, ν_{xy} و G_{xy} ثوابت کشسان ماده ناهمسان‌گرد

مراجع

- Shokrieh M.M. and Ghasemi A.R., Simulation of Central Hole Drilling Process for Measurement of Residual Stresses in Isotropic, Orthotropic and Laminated Composites Plates, *J. Compos. Mater.*, **41**, 435-452, 2007.
- Shokrieh M.M. and Ghasemi A.R., Determination of Calibration Factors of the Hole Drilling Method for Orthotropic Composites Using an Exact Solution, *J. Compos. Mater.*, **41**, 2293-2311, 2007.
- Li M.C., Wu J.J., Loos A.C., and Morton J., A Plane-Strain Finite Element Model for Process-Induced Residual Stresses in a Graphite/PEEK Composite, *J. Compos. Mater.*, **31**, 212-243, 1997.
- Naik N.K. and Sahani R.D., Measurement of Residual Stresses in Composites by Hole-Drilling Method, *Proceeding of the Vth International Conference on Experimental Mechanics*, Canada, 159-163, 1984.
- Schlecht M. and Schulte K., Advanced Calculation of the Room-Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates, *J. Compos. Mater.*, **33**, 1472-1490, 1999.
- Hyer M.W., Some Observations on the Cured Shape of Thin Unsymmetric Laminates, *J. Compos. Mater.*, **15**, 175-194, 1981.
- Hyer M.W., Calculation of the Room-Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates, *J. Compos. Mater.*, **15**, 296-310, 1981.
- Hyer M.W., The Room Temperature Shapes of Four-layer Unsymmetric Cross-ply Laminates, *J. Compos. Mater.*, **16**, 318-340, 1982.
- Dang J. and Tang Y., Calculation of the Room Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates, *Proceeding of International Symposium on Composites Materials and Structures*, 201-206, China, 1986.
- Jun W.J. and Hong C.S., Effect of Residual Shear Strain on the Cured Shape of Unsymmetric Cross-ply Thin Laminates, *J. Compos. Sci. Technol.*, **38**, 55-67, 1990.
- Dano M.L. and Hyer M.W., The Response of Unsymmetric Laminates to Simple Applied Forces, *Mechanic. Compos. Mater. Struct.*, **3**, 65-80, 1996.
- Dano M.L. and Hyer M.W., Snap Through Behavior of Unsymmetric Composite Laminates, *Int. J. Solid. Struct.*, **39**, 175-198, 2002.
- Radford D.W. and Diefendorf R.J., Shape Instability in Composites Resulting from Laminate Anisotropy, *J. Reinforced Plastic. Compos.*, **12**, 58-87, 1993.
- Ren L., Parvizi-Majidi A., and Li Z., Cured Shape of Cross-ply Composite Thin Shells, *J. Compos. Mater.*, **37**, 1801-1820, 2003.
- Zhu Q., Geubelle P.H., Li M., and Tucker C.L., III. Dimensional Accuracy of Thermoset Composites: Simulation of Process-induced Residual Stresses, *J. Compos. Mater.*, **35**, 2171-2205, 2001.