نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۴، شماره ۱، خرداد ماه ۱۳۷۹، از صفحه ۵۳ تا ۶۱

حل تحلیلی مسائل الاستیسیته دوبعدی در یک محیط همبندچندگانه با استفاده از توابع مختلط والگوریتم Self Consistent

محمد رحیمیان
دانشیار گروه مهندسی عمران- دانشکده فنی- دانشگاه تهران
اسدا...نورزاد
استادیار گروه مهندسی عمران- دانشکده فنی- دانشگاه تهران
علیرضا حسینخانی
دانشجوی کارشناس ارشد سازه- دانشکده فنی- دانشگاه تهران
(تاریخ دریافت ۷۷/۱۲/۴، تاریخ تصویب ۷۸/۹/۱۳)

چکیده

برقراری معادلات تعادل تنشها و معادلات سازگاری در یک محیط الاستیسیته دو بعدی با صرفنظر کردن از نیروهای حجمی منجر به حل معادله بی هارمونیک $\nabla^4 U = 0$ در کل محیط می شود U تابع تنش ایری است که از مشتقات آن می توان میدانهای تنش ،کرنش و جابجائی را بدست آورد. محاسبه تابع U در حوزه توابع حقیقی برای یک محیط با مرز و شرایط مرزی دلخواه کاری دشوار است ولی در حوزه توابع مختلط می توان جواب عمومی معادله $\nabla^4 U = 0$ را بر حسب توابع مختلط تحلیلی $\phi(z), \psi(z)$ محاسبه کرد این توابع را در یک محیط الاستیسیته باید طوری بدست آورد که شرایط ا ولیه مسئله روی مرزهای محیط مورد نظر برقرار شود.
در این مقاله حل یک محیط همبند چندگانه شامل صفحه ای بی نهایت همراه با سوراخهای دایره ای از طریق بکار بردن توابع مختلط بررسی شده است با توجه به اینکه راههائی که تاکنون برای حل مسئله در چنین محیطی ارائه شده است بر اساس روشهای عددی از جمله روشهای المانهای محدود و تفاضلات محدود استوار می باشند سعی شده است روشی مبتنی بر فرمولهای تحلیلی جهت حل این مسئله ارائه گردد برای انجام این کار الگوی Self Consistent در محیطهای الاستیسیته مورد استفاده قرار گرفته است درانتها با استفاده از این روش چند محیط الاستیسیته مختلف بررسی شده است.

واژه های کلیدی : تنش، صفحه بی نهایت، سوراخ های دایره ای

مقدمه

ایده اولیه استفاده از توابع مختلط در حل مسائل الاستیسیته اولین بار توسط خلوسوف مطرح شد اما چهل سال طول کشید تا فکر اولیه به روشی قابل استفاده برای حل مسائل الاستیسیته دوبعدی منجر شود این کار عمدتاً توسط یک گروه ریاضی دان روسی به سرپرستی موس خیلش ویلی و در سال ۱۹۵۳ انجام شد (مرجع [۱])دراین روش جواب عمومی معادله بی هارمونیک را می توان بر حسب توابع مختلط تحلیلی دلخواه $\phi(z), \psi(z)$ بدست آورد بنابراین جواب عمومی تابع تنش ایری در یک محیط الاستیسیته دو بعدی بر حسب دو تابع مختلط تحلیلی قابل محاسبه می باشد و کافی است این دو تابع را طوری بدست اوریم که شرایط مرزی محیط مورد نظر ارضاء گردند برای بکارگیری این روش در حل محیطهای همبند ساده می توان از تئوری نگاشت توابع مختلط استفاده کرد و حل مسئله ای با مرز دلخواه را به حل مسئله ای با مرز دایره ای تبدیل نمود (مرجع [۲] و [۳]) . برای حل صفحه ای بی نهایت شامل یک سوراخ داخلی راه حلی در مرجع [۹] ارائه شده است که مبتنی بر یافتن تابع نگاشت در چنین محیطی است . در مرجع [۷] نیز توابعی برای نگاشت محیطهای همبند ساده مختلف داده شده است که از آنها می توان در حل مسائل الاستیسیته استفاده کرد.
استفاده از توابع نگاشت برای حل محیطهای همبند چندگانه باتوجه به یک بیک نبودن این تابع نگاشت و دشواری محاسبه آن در حالت کلی ، عملی نخواهد بود و

بایستی از روشی دیگر جهت حل اینگونه مسائل استفاده کرد.

روش Self Consistent برای حل محیطهای الاستیسیته که دارای ناپیوستگی ها و یا ذرات متعدد داخلی باشند الگوی کلی و مناسبی ارائه می دهد [۴] و [۵] . در این مقاله از این الگوریتم در حل کردن محیطهای همبند چندگانه توسط توابع مختلط استفاده شده است . همچنین برای بدست آوردن توابع اصلی فرمولهای بسط انتگرالی توابع مختلط بکار شده و بر این اساس فرمولهای لازم برای محاسبه توابع مختلط اصلی در حالت کلی بدست آمده است سپس با بکارگیری این فرمولها روی محیطهای مختلف تغییرات تمرکز تنش با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

معادلات اساسی

در محیطهای الاستیسیته دوبعدی با صرفنظر کردن از نیروهای حجمی معادلات تعادل و سازگاری را می توان با معادله $\nabla^4 U = 0$ بیان کرد .U تابع تنش ایری است که تنشها درهر نقطه از محیط ازمشتقات آن محاسبه می شوند.

جواب عمومی تابع تنش ایری را می توان برحسب دو تابع مختلط تحلیلی بدست آورد (مرجع [۱]) و در نهایت در یک محیط الاستیسیته دوبعدی میدانهای تنش بر حسب دو تابع مختلط تحلیلی محاسبه می باشند.

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}[\phi'(z)]$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\,[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$
(۱)

با محاسبه جواب عمومی توابع تنش بایستی توابع مختلط اصلی را به گونه ای بیابیم که شرایط مرزی محیط ارضاء گردند اگر فرض کنیم که منحنی C یکی از مرزهای محیط باشد برای ارضاءشرایط مرزی تنش روی این مرز کافی است رابطه زیر برقرار باشد . (مرجع [۲] و [۳])

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}\ \Big|_c = f_1(s) + if_2(s)$$
(۲)

$$f_1(s) + if_2(s) + c = i\int_{s_0}^{s}(T_1 + iT_2)\,ds$$
(۳)

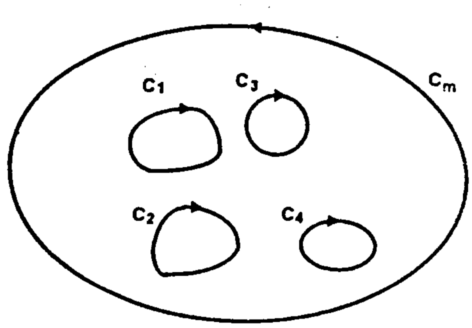
T_2, T_1 مؤلفه های تنش در روی مرز و در جهت محورهای اصلی مختصات می باشند و ds تغییر طول قوس در جهت مثبت مرز می باشد.

توابع $\phi(z), \psi(z)$ در محیطهای همبند چندگانه

در محیطهای همبند ساده توابع ϕ, ψ در شکل کلی خود به صورت یک سری تیلور حول نقطه هایی در محیط مورد نظر می باشند . به صورتی که در تمام محیط تحلیلی و همگرا باشند . برای یک محیط همبند چندگانه محدود که دارای مرزهای داخلی متعدد است توابع ϕ, ψ که بتوانند در محیط مذبور و تحلیلی و همگرا باشند عبارتند از :

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{1n}}{(z-A_1)^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{2n}}{(z-A_2)^n} + \cdots \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{mn}}{(z-A_m)^n}$$
$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_{1n}}{(z-A_1)^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_{2n}}{(z-A_2)^n} + \cdots \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_{mn}}{(z-A_m)^n}$$
(۴)

در این فرمولها m عبارتست از تعداد مرزهای داخلی محیط همچنین A_1 , A_2 , ... , A_m نقاطی در صفحه مختصات z هستند که داخل مرزهای C_1 , C_2 ,... C_m قرار دارند . (شکل ۱)



شکل ۱: محیط همبند چندگانه.

بنابراین می توان گفت توابع $\phi(z), \psi(z)$ هر یک از m سری لوران حول نقاط A_1 تا A_m تشکیل شده اند به صورتی که در تمام ناحیه خارج از منحنی مربوط تحلیلی و همگراباشند.

حل یک محیط الاستیسیته دوبعدی بی نهایت محدود به مرزهای داخلی دایره ای

محیطی همبند چندگانه به صورت صفحه ای همراه با سوراخهای دایره ای C_1 تا C_m در نظر می گیریم

مراکز سوراخها را در صفحه اعداد مختلط با نقاط A_1 تا A_m مشخص می کنیم همچنین فرض می کنیم فاصله مرز خارجی C_{m+1} از مرزهای داخلی به قدری است که وجود سوراخهای داخلی اثری بر میدان تنش در نزدیکی مرز خارجی ندارد. در حالت ایدال فرض می کنیم که مرز خارجی در بی نهایت قرار دارد در این حالت هر تنشی که روی مرزهای داخلی اعمال شود اثر آن روی مرز خارجی یا در بی نهایت صفر می باشد . به عبارت دیگر وجود سوراخها تأثیری روی میدان تنش در بی نهایت نخواهد داشت.

حال فرض می کنیم مقدار تنش در بی نهایت عبارت است از :

$$\sigma_x(\infty)=p \quad , \quad \sigma_y(\infty)=q \quad , \quad \tau_{xy}(\infty)=r$$

برای برقراری شرایط مرزی تنش در بی نهایت توابع $\phi(z),\psi(z)$ را به شکل زیر می نویسیم:

$$\phi(z)=Bz+\phi_0(z)$$
$$\psi(z)=(B'+iC')z+\psi_0(z)$$

(۵)

که توابع $\phi_0(z),\psi_0(z)$ از روابط (۴) بدست می آیند ضرائب B, B', C' نیز با توجه به فرمولهای(۱) برابرند با:

$$4B=\sigma_x(\infty)+\sigma_y(\infty)$$
$$2(B'+iC')z=\sigma_y(\infty)-\sigma_x(\infty)+2i\tau_{xy}(\infty)$$

برای برقراری شرایط مرزی تنش روی مرزهای C_1 تا C_m بایستی بر طبق رابطه (۲) داشته باشیم:

$$\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}\,\Big|_{C_j}=H_j(t) \qquad j=1,2,\ldots,m \quad t\in C_j$$

که در آن تابع $H_j(t)$ طبق فرمول (۳) وابسته به مقادیر مرزی تنش است و همچنین توابع $\phi(z),\psi(z)$ از روابط (۵) محاسبه می شوند با جایگزینی این توابع رابطه را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\phi_0(z)+z\overline{\phi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}\,\Big|_{C_j}=H_j^0(t) \qquad j=1,2,\ldots,m \quad t\in C_j$$

(۶)

توابع $\phi_0(z),\psi_0(z)$ از فرمول (۴) بدست می آیند و تابع $H^\circ_j(t)$ وابسته به ضرائب B, B', C' و تابع $H_j(t)$ می باشد . اگر تنش روی مرزهای دایره ای صفر باشد $H^\circ_k(t)$ برابر است با :

$$H_k^0(t)=-2Bt-(B'-iC')\bar{t} \qquad k=1,2,\ldots,m \quad t\in C_k$$

(۷)

با توجه به فرمولهای (۴) در می یابیم که توابع $\phi_0(z),\psi_0(z)$ هر یک متشکل از m سری لوران حول نقاط A_1 , A_2 ... , A_m یعنی مراکز دوایر C_1, C_2, ..., C_m می باشند بنابراین این دو تابع را به شکل زیر می نویسیم:

$$\phi_0(z)=\sum_{j=1}^{m}\phi_j(z) \quad , \quad \phi_j(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{kj}}{(z-A_j)^k}$$
$$\psi_0(z)=\sum_{j=1}^{m}\psi_j(z) \quad , \quad \psi_j(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_{kj}}{(z-A_j)^k}$$

(۸)

حال عبارتهای (۶) را بدین شکل می نویسیم:

$$\sum_{j=1}^{m}\{\phi_j(z)+z\overline{\phi_j'(z)}+\overline{\psi_j(z)}\}\,\Big|_{C_k}=H_k^0(t) \qquad k=1,2,\ldots,m \quad t\in C_k$$

(۹)

بنابراین در حل چنین مسئله ای بایستی 2m تابع مجهول ϕ_j,ψ_j $(j=1,2,..,m)$ را طوری بیابیم که m معادله فوق روی m مرز دایره ای C_1 تا C_m برقرار شوند.

جهت حل تحلیلی این مسئله از روش Self Consistent در محیطهای الاستیسیته استفاده می کنیم و این روش را روی حل مختلط محیطهای دو بعدی بکار می بریم . این روش بطور کلی برای حل محیطهای الاستیسیته ای که علاوه بر محیط اصلی دارای ذرات متعدد داخلی باشند بکار می رود. مثلاً محیطی بی نهایت با ترکهای متعدد داخلی . روش کلی بدین ترتیب است که ابتدا جواب میدانهای تنش و تغییر مکان را در حالت کلی برای محیطهائی که شامل هر یک از ترکها به تنهائی باشند پیدا می کنند سپس با بر هم گذاری این محیطها یک جواب تقریبی برای محیطی شامل n ترک پیدا می کنند به طوریکه شرایط مرزی در بی نهایت برقرار باشند به علت بر هم کنش میدان ناشی از ترکها روی هم با در نظر گرفتن هر یک از

ترکها به تنهایی در محیط مقادیر میدان تنش را طوری اصلاح می کنند که شرایط مرزی روی ترک مزبور به طور کامل برقرار شود و اصلاح نتایج را تا رسیدن به دقت کافی ادامه می دهند (مراجع [۴] و [۵]) . در اینجا این روش را روی حل مختلط صفحه ای با m سوراخ دایره ای بکار می بریم و جزئیات آنرا بیان می کنیم.

در ابتدای کار فرض می کنیم که صفحه بی نهایت مزبور فقط شامل سوراخ دایره ای باشد در این حالت بر طبق فرمولهای (۹)بایستی داشته باشیم:

$$\phi_k^0(z)+z\overline{\phi_k'^0(z)}+\overline{\psi_k^0(z)}\ \Big|_{C_k}=H_k^0(t) \tag{۱۰}$$

با توجه به اینکه در این حالت با حل محیطی بی نهایت شامل یک سوراخ دایره ای مواجه هستیم . بنابراین توابع مختلط $\phi_0(z),\psi_0(z)$ را می توان بدست آورد با انجام این کار روی m سوراخ دایره ای محیط ، می توان 2m تابع $\psi_m^0,\ldots,\psi_2^0,\psi_1^0,\phi_m^0,\ldots,\phi_2^0,\phi_1^0$ را بدست آورد که در معادلات زیر صدق می کنند.

$$\phi_k^0(z)+z\overline{\phi_k'^0(z)}+\overline{\psi_k^0(z)}\ \Big|_{C_k}=H_k^0(t)$$
$$t\in C_k\ ,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{۱۱}$$

با توابعی که بدین شکل بدست آوردیم شرایط مرزی تنش روی منحنی C_k بطور تقریبی برقرار می شود چرا که علاوه بر توابع $\phi^0{}_k,\psi^0{}_k$ که از فرمول فوق بدست می آیند بر هم کنش مقادیرتوابع $\phi^0{}_j,\psi^0{}_j$ $(k\neq j)$ نیز طبق معادلات (۹) بر مقادیر مرزی روی دایره C_k تأثیر می گذارند این مقدار را می توان بدین شکل نشان داد:

$$\phi_j^0(z)+z\overline{\phi_j'^0(z)}+\overline{\psi_j^0(z)}\ \Big|_{C_k}=\phi_j^0(t)+t\overline{\phi_j'^0(t)}+\overline{\psi_j^0(t)}$$
$$t\in C_k\ ,\quad k\neq j \tag{۱۲}$$

مجدداً طبق اصول روشی که بکار بردیم سوراخ C_k را به تنهایی در نظر می گیرم و توابع $\phi^0{}_k,\psi^0{}_k$ را طوری تغییر می دهیم که خطای ایجاد شده روی منحنی C_k اصلاح شود . برای اینکار توابع $\phi^1{}_k,\psi^1{}_k$ را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$\phi_k^1(z)+z\overline{\phi_k'^1(z)}+\overline{\psi_k^1(z)}\ \Big|_{C_k}=$$
$$H_k^0(t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\{\phi_j^0(t)+t\overline{\phi_j'^0(t)}+\overline{\psi_j^0(t)}\}$$
$$t\in C_k\ ,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{۱۳}$$

اصلاح خطای روی مرزها را تا رسیدن به دقت کافی ادامه می دهیم در مرحله n ام خواهیم داشت:

$$\phi_k^n(z)+z\overline{\phi_k'^n(z)}+\overline{\psi_k^n(z)}\ \Big|_{C_k}=$$
$$H_k^0(t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\{\phi_j^{n-1}(t)+t\overline{\phi_j'^{n-1}(t)}+\overline{\psi_j^{n-1}(t)}\}$$
$$t\in C_k\ ,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{۱۴}$$

برای بکار بردن فرمولهای (۱۴) و بدست آوردن توابع $\phi(z),\psi(z)$ در محیطی با m سوراخ دایره ای ابتدا فرض می کنیم در مرحله $(n-1)$ از فرمولهای (۱۴) عبارتهای زیر حاصل شود.

$$\phi_j^{n-1}(z)+z\overline{\phi_j'^{n-1}(z)}+\overline{\psi_j^{n-1}(z)}\ \Big|_{C_j}=F_j^{n-1}(s)$$
$$t\in C_j\ ,\quad j=1,2,\ldots,m \tag{۱۵}$$

حال برای محاسبه توابع $\phi^{n-1}{}_j(z),\psi^{n-1}{}_j(z)$ از فرمولهای بسط انتگرالی توابع مختلط استفاده می کنیم. ابتدا طرفین رابطه فوق را در عبارت $\frac{1}{t-\xi}$ ضرب می کنیم و روی منحنی C_j در جهت مثبت مرز از طرفین عبارت انتگرال می گیریم ξ در اینجا نقطه ای خارج دایره C_j می باشد.

$$\int_{c_j}\frac{\phi_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt+\int_{c_j}\frac{t\overline{\phi_j'^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt+\int_{c_j}\frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt=$$
$$\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt$$

با توجه به اینکه C_j یک دایره است از فرمولهای انتگرالی توابع مختلط محیطی می توان عبارتهای زیر را نتیجه گرفت.

$$\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{\phi_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt=\phi_j^{n-1}(\xi)$$

$$\int_{c_j}\frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt=0 \qquad \int_{c_j}\frac{\overline{t\phi_j'^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt=0$$

و در نتیجه تابع $\phi_j^{n-1}(\xi)$ بدست می آید.

$$\phi_j^{n-1}(\xi)=\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt$$

(۱۶)

برای محاسبه $\psi_j^{n-1}(\xi)$ همین کار را روی مزدوج تساوی (۱۵) انجام می دهیم:

$$\int_{c_j}\frac{\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt+\int_{c_j}\frac{\bar{t}\phi_j'^{n-1}(t)}{t-\xi}dt+\int_{c_j}\frac{\psi_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt=\int_{c_j}\frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt$$

(۱۷)

معادله دایره C_j با شعاع R_j و مرکز A_j در صفحه مختصات مختلط $|Z-A_j|=R_j$ می باشد.

بنابراین مقدار t را روی مرز این دایره می توان بدست آورد. ابتدا معادله دایره را به شکل زیر می نویسیم:

$$(t-A)(\bar{t}-\overline{A_j})=R_j^2$$

$$\bar{t}=\frac{R_j^2}{t-A_j}+\overline{A_j}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{c_j}\frac{\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt=0 \quad , \quad \frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{\psi_j^{n-1}(t)}{t-\xi}dt=\psi_j^{n-1}(\xi)$$

$$\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{\bar{t}\phi_j'^{n-1}(t)}{t-\xi}dt=\left(\frac{R_j^2}{\xi-A_j}+\overline{A_j}\right)\phi_j'^{n-1}(\xi)+\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\left(\frac{R_j^2}{t-A_j}+\overline{A_j}\right)\frac{\phi_j'^{n-1}(t)}{t-\xi}dt$$

و از عبارت (۱۷) تابع $\psi_j^{n-1}(\xi)$ بدست می آید:

$$\psi_j^{n-1}(\xi)=\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt-\left(\frac{R_j^2}{\xi-A_j}+\overline{A_j}\right)\phi_j'^{n-1}(\xi)$$

با محاسبه مقداری $\phi_j'^{n-1}(\xi)$ با استفاده از فرمولهای (۱۶) و سپس جایگزین کردن آن در عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\psi_j^{n-1}(\xi)=\frac{1}{2\pi I}\int_{c_j}\frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi}dt-\frac{1}{2\pi I}\left(\frac{R_j^2}{\xi-A_j}+\overline{A_j}\right)\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{(t-\xi)^2}dt$$

(۱۸)

با فرض اینکه s نقطه ای دلخواه از دایره C_k $(k\neq j)$ باشد با استفاده از فرمولهای (۱۵)و (۱۸) می توان عبارت زیر را نتیجه گرفت :

$$\sum_{j=1}^{m}\{\phi_j(z)+z\overline{\phi_j'(z)}+\overline{\psi_j(z)}\}\,|_{C_k}=\frac{1}{2\pi I}\left\{\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s}dt+\text{Conjugate}\int_{c_j}\frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-s}dt+\left(\frac{R_j^2}{\overline{S}-\overline{A}_j}+s-A_j\right)\text{Conjugate}\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s}dt\right\}$$

(۱۹)

مشابه فرمول (۱۵) فرض می کنیم که در مرحله n داشته باشیم:

$$\phi_k^n(z)+z\overline{\phi_k'^n(z)}+\overline{\psi_k^n(z)}\,|_{C_k}=F_k^n(s)$$

$$s\in C_k \quad , \quad k=1,2,\dots,m$$

(۲۰)

با در نظر گرفتن این عبارت و همچنین فرمولهای (۱۹) و (۱۴) خواهیم داشت :

$$F_k^n(s)=H_k^0(s)-\frac{1}{2\pi I}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\left\{\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s}dt+\text{Conjugate}\int_{c_j}\frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-s}dt+\left(\frac{-R_j^2}{\overline{S}-\overline{A}_j}+S-A_j\right)\text{Conjugate}\int_{c_j}\frac{F_j^{n-1}(t)}{(t-s)^2}dt\right\}$$

$$, \quad s\in C_k \quad , \quad k=1,2,\dots,m$$

(۲۱)

بنابراین به یک فرمول بازگشتی می رسیم که توسط آن می تـوان در هـر مرحلـه توابـع $F_j^n(t)$ را بدسـت آورد در اولین مرحله با توجه به فرمولهای (۱۱) قرار می دهیم:

$$F_k^0(s) = H_k^0(s) \qquad s \in c_k \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

(۲۲)

علاوه بر فرمولهای (۲۰) که بیان انتگرالی رابطه بین توابع $F_j^{n-1}(t), F_j^n(t)$ می باشد می توان این فرمولها را به صورت روابط فوریه توابع نیز بیان کرد . با توجه به اینکه مرزهای C_k , C_j دایره ای هستند آنها را در صفحه اعداد مختلط با معادلات پارامتری زیر نشان می دهیم:

$$C_j : t = R_j\sigma + A_j \qquad \sigma = e^{I\theta}$$

$$C_k : s = R_k\rho + A_k \qquad \rho = e^{I\alpha}$$

(۲۳)

در ایـن فرمولهـا $R_k = R_j$ شـعاع و A_k , A_j مراکــز دایره های C_k , C_j می باشــند . همچنیــن θ و α زوایـای مرکزی دایره ها و در جهت مثبت مثلثاتی مـی باشـند . بـا توجه به مقادیر متغیرهای s , t می توان عبـارات انتگرالهـا را بر حسب توابع اورتوگونال ρ و σ محاسبه و بیـان کـرد . ابتدا فرض می کنیم که داشته باشیم:

$$F_j^{n-1}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_{ij}^{n-1}\sigma^{-i} \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

(۲۴)

$$F_k^n(s) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} p_{rk}^{n}\rho^{-r} \quad , \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

(۲۵)

بـا جـایگزینی ایـن مقـادیر در انتگرالهـای عبـــارت (۲۱) و همچنین در نظر گرفتن فرمولهای (۲۳) می توان عبارتهای انتگرالی را بر حسب اورتوگونال مورد بحـث محاسـبه کـرد برای این کار از فرمولهای انتگرالـی کوشـی روی تحلیلـی و مشتقات آنها استفاده می کنیم.

برای داشتن جزئیات می توان به مرجع [۱۰] مراجعه کرد . در نهایت رابطه بین ضرائب فوریه توابـع $F_j^{n-1}(t), F_j^n(t)$ را می توان بدست آورد بعد از ساده کــردن عبـارات خواهیـم داشت.

$$P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \binom{-r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{-r} R_j^i P_{ij}^{n-1}}{\left(A_j - A_k\right)^{-r+i}} \right\} \quad , \ r < -1 \qquad (۲۶)$$

$$P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \binom{-r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{-r} R_j^i P_{ij}^{n-1}}{\left(A_j - A_k\right)^{-r+i}} + (r+2)\binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r+2} R_j^i \overline{P_{ij}^{n-1}}}{\left(\overline{A_j - A_k}\right)^{i+r+2}} \right\} \quad , \ r = 1$$

(۲۷)

$$\begin{aligned} P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \Bigg\{ & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \sum_{i=1}^{+\infty} \binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r} R_j^i P_{-ij}^{n-1}}{\left(\overline{A_j - A_k}\right)^{r+i}} + \\ & (r+2)\binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r+2} R_j^i \overline{P_{ij}^{n-1}}}{\left(\overline{A_j - A_k}\right)^{i+r+2}} + \\ & (r+1)\binom{r+i+1}{i} \frac{(-1)^i R_k^{r} R_j^{i+2} \overline{P_{ij}^{n-1}}}{\left(\overline{A_j - A_k}\right)^{r+i+2}} + \\ & (r+1)\binom{r+i}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r} R_j^{i} \overline{P_{ij}^{n-1}}}{\left(\overline{A_j - A_k}\right)^{i+r+1}} \Bigg\} \quad r > 0 \end{aligned}$$

(۲۸)

با بکار بردن فرمولهائی مشابه روابط (۱۶) و (۱۸) می تـوان توابع اصلـی مختلـط محیـط را بـر حسـب ضرائـب فوریـه تابع $F_j^n(t)$ محاسبه کرد (مرجع [۱۰]) در نهایت فرمولهای زیر را خواهیم داشت.

$$\phi_j^n(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\overline{P_{-ij}^n} R_j^i}{(z - A_j)^i}$$

$$\psi_j^n(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \frac{\overline{P_{-ij}^n} R_j^i}{(z - A_j)^i} + \left(\frac{R_j^2}{(z - A_j)} + \overline{A_j} \right) \frac{i P_{ij}^n R_j^i}{(z - A_j)^{i+1}} \right\}$$

$$j = 1.2,\ldots m$$

(۲۹)

بر اساس مطالب بیان شده در این بخـش و فرمولهـائی کـه بدست آوردیم به طور خلاصه جهت حل تنش یک صفحـــه بی نهایت شامل m سوراخ دایره ای مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱ - توابع $H^\circ_k(t)$ را از فرمولهای (۷) بدست می آوریم.

۲ - ضرائب فوریه p°_{kr} را توسط فرمولهـای زیـر محاسـبه می کنیم:

$$P_{rk}^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_k^0(t) e^{I\theta} d\theta \quad , \quad t = R_k e^{I\theta} + A_k$$

$$k = 1,2,\ldots,m \qquad r = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

۳ - با داشتن مقادیر p_{0kr}توسط فرمولهـای (۲۶) تـا (۲۸) ضرائب p^1_{kr}, p^2_{kr} و ... p^n_{rk} را تا رسیدن بـه دقـت کـافی محاسبه می کنیم.

۴ - توابع $\phi(z), \psi(z)$از فرمولهـای (۲۶) و (۲۹) بدسـت می آیند.

$$\phi(z) = Bz + \phi_0(z)$$

$$\psi(z) = (B' + iC')z + \psi_0(z)$$

$$\phi_0(z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j^n(z) \quad , \quad \psi_0(z) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j^n(z)$$

کـه در آن $\phi_j^n(z), \psi_j^n(z)$از فرمولهـای (۲۹) بدسـت می آیند.

۵ - بعد از بدست آوردن توابع $\phi(z), \psi(z)$توابـع تـنش را در محیط می توان از فرمولهای زیر محاسبه کرد.

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}[\phi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

حل چند محیط نمونه

جهت کنترل و بررسی روش تحلیلی که در بخـش قبل بکار برده شد ابتدا بـر اسـاس مراحلـی کـه بیـان شـد برنامـه ای بـه زبـان Mathematicaکـه یـک نـرم افـزار تخصصی ریاضی است نوشته شــده اسـت . در ایـن برنامـه علاوه بـر مشـخصات محیـط مـورد نظـر بـرای اسـتفاده از فرمولهای (۲۶) تا (۲۸) بایستی حد بـالائی مناسـب بـرای اندیسهای i, n مشخص کنیم.

طبیعی است که هر چه فواصل دایره ای C_j , C_k یعنـی $|A_i - A_j| = R_j$ نسبـت بـه مقـادیر شـعاعهای سـوراخها بیشتر باشد مقدار کمتری برای حـد بـالای i مـی تـوان در نظر گرفت . مقدار اندیس n یا دفعات تکـرار در فرمولهـای مزبور نیز بستگی به دقت مورد نظر در جواب خواهد داشت تکرار در فرمولها را بایستی تا جـایی ادامـه داد کـه تفـاوت ضرائب P_{ij}^{n-1}, P_{ij}^{n}تا حد لازم کوچک باشد ، بـه شـکلی کـه شرایط مرزی محیط تا حد دقت مورد نظر ارضاء گردند.

بر اساس برنامه ای که نوشته ایم چهار محیط الاستیسـیته را مورد بررسی قرار داده ایم.در هر یک از این حالات فرض کرده ایم که صفحه مورد نظر در بـی نهـایت تحـت چنیـن تنشی قرار داد.

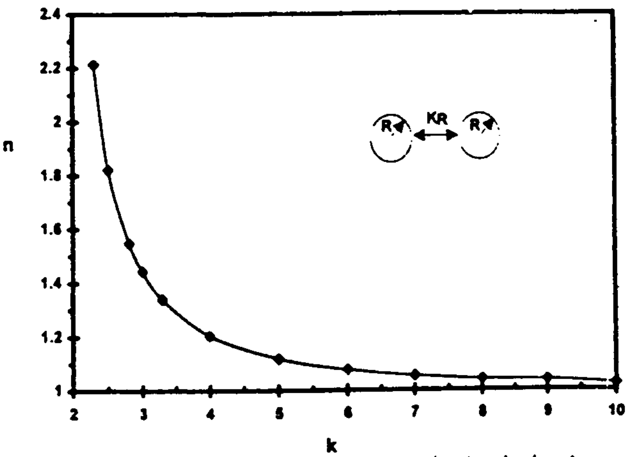
$$\sigma_x(\infty) = p \quad , \quad \sigma_y(\infty) = q \quad , \quad \tau_{xy}(\infty) = 0 \qquad (۳۰)$$

در حالت اول صفحه ای با دو سوراخ دایره ای با شعاع برابر R در نظر گرفته ایم سپس با ثابت گرفتن شـعاع دو دایـره فاصله مراکز آنها را از مقداری برابـر 2.3R تـا ده برابـر R تغییـر دادیـم و در چنـدیـن حـالـت نسـبت مقـــدار تـنـش ماگزیمم ایجاد شده در محیط را به مقـدار تـنش مـاگزیمم موجود در محیطی با یک سـوراخ دایـره ای بدسـت آوریـم (ضریب n).

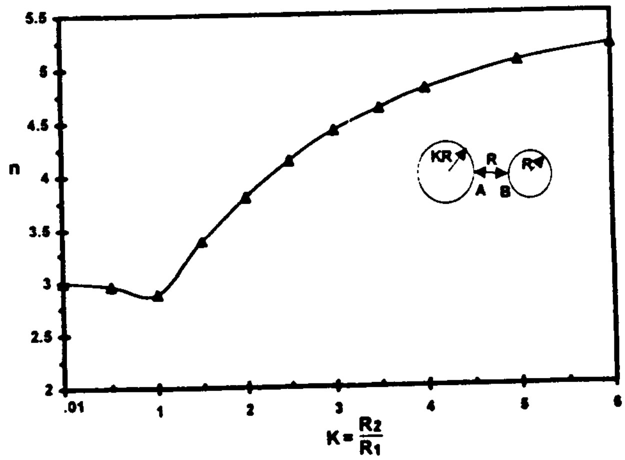
منحنـی تغییـرات ضریـب n بـر حسـب فاصلـه دو سـوراخ دایره ای در نمودار (۱) نشان داده شده است. همانگونه که مشخص است وقتی که فاصله دو سـوراخ بـه انـدازه کـافی زیاد شود ضریب n به عددیک نزدیک می شود مثلا مقـدار این ضریب در فاصله d = 7R تقریـب 1.07 و در حـالت d=8R برابر 1.05 می باشـد . بنـابراین مـی تـوان نتیجـه گرفت در حالتیکه فاصله دو مرکز از هشت برابـر شـعاع دو سوراخ بیشتر باشد مقـدار مـاگزیمم تـنش ایجـاد شـده در محیط با ماکزیمم تنش موجود در محیطی با یـک سـوراخ دایره ای تقریباً برابر خواهد بود . یعنی دو سـوراخ تقریبـاً اثری روی میدان تنش یکدیگر نخواهند داشت.

در حالت دوم صفحه ای با دو سوراخ دایره ای به شعاعهای R_1 , R_2 در نظر گرفتیم . در اینجا فـرض کـرده ایـم کـه مرزهای دو سوراخ مطابق شکل به فاصلـه ثـابت R از هـم باشند . ولی شعاع دایره C_2 از مقادیری بسـیار کوچـک تـا مقداری برابر $6R_1$ تغییر کند سپس در چند حـالت مقـدار ضریب n یا به عبارت دیگر نسـبت مقـدار تـنـش مـاگزیمم ایجاد شده در محیـط بـه مقـدار تـنش موجـود در همیـن صفحه بدون وجود سوراخ را بدست آوریم منحنی تغییـرات ضریب n در کل محیط در نمودار(۲) نشان داده شده است . همانطورکه مشاهده مـی کنیـم مـاگزیمم تنشـی در کـل محیط با افزایش شعاد R_2 از مقـادیری کوچـک تـا مقـدار شعاع R_1 روندی کاهش داشته و در نقطه A اتفـاق افتـاده است ولـی بـا بزرگـتر شـدن مقـدار شـعاع R_2 ,R_1 تنـش ماگزیمم افزایش یافته اسـت کـه مربـوط بـه مقـدار σ_y در نقطه B می باشد.

برای بررسی اثر وضعیت نسبی سوراخها روی تمرکز تنشی که در صفحه ایجـاد میشـود محیطـی شـامل سـه سـوراخ دایره ای در نظر گرفتیم دو سوراخ C_1 , C_2 با شعـاع R و



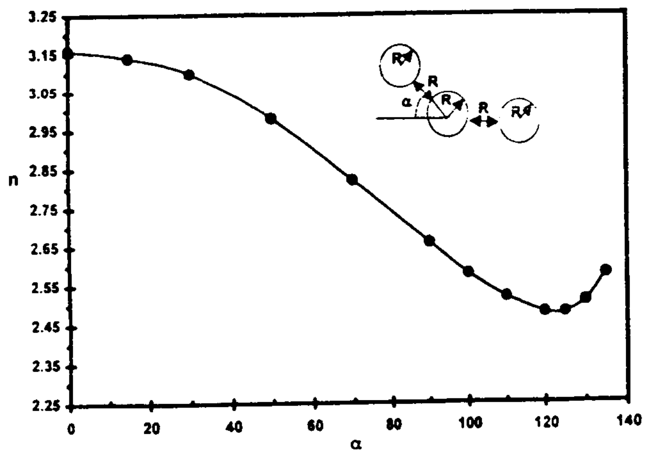
نمودار ۱ : تغییرات نسبت ماگزیمم تنش در محیطی با دو سوراخ دایره ای به ماگزیمم تنش در محیطی با یک سوراخ برحسب فاصله دوسوراخ دایره ای.



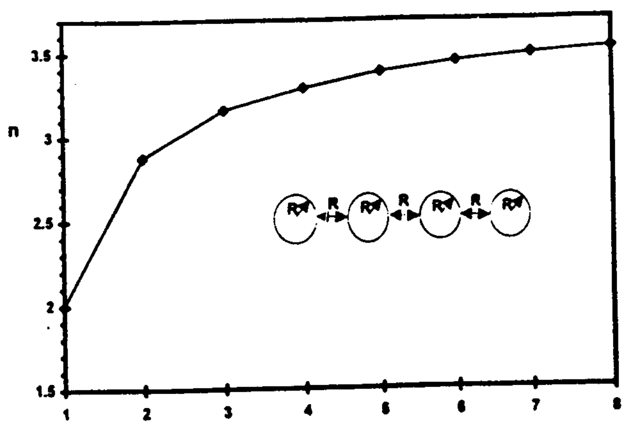
نمودار ۲ : تغییرات ضریب تمرکز تنش برحسب تغییر نسبت شعاع دوسوراخ دایره ای.

به فاصله ثابت R مطابق شکل قرار دارند . مکان سوراخ دایره ای C_3 را به شکلی تغییر داده ایم که فاصله آن از C_2 همواره مقدار ثابت R باشد زاویه خطر المرکزین دو دایره C_2, C_3 با محور افقی مطابق شکل α فرض میشود.α را از حد صفر تا 130 درجه افزایش دادیم و در چند وضعیت مختلف مقدار ضریب n یا به عبارتی دیگر نسبت مقدار تنش ماگزیمم ایجاد شده در محیط به تنش در صفحه ای بدون سوراخ را بدست آوردیم. منحنی تغییرات این ضریب نسبت به زاویه α در نمودار (۳) نشان داده شده است. مطابق نمودار مقدار ماکزیمم n در زاویه α برابر صفر ایجاد می شود که برابر 3.17 می باشد . با افزایش α مقدار nکاهش می یابد تا به کمترین حد خود در حد زاویه 120 درجه و به مقدار 25 برسد این تغییرات نشان دهنده تأثیرات وضعیت نسبی سوراخها روی جریان تنش و ایجاد تمرکز تنش در صفحات است.

جهت بررسی اثر تعداد سوراخها روی تمرکز تنش محیط ابتدا مقدار ضریب n را در صفحه ا با یک سوراخ دایره ای به شعاع R بدست آوردیم سپس مقدار n را برای صفحه ای شامل دو سوراخ دایره ای به شعاع R و به فاصله R محاسبه کردیم به همین ترتیب تعداد سوراخها را در یک ردیف و به فاصله R از یکدیگر افزایش دادیم نمودار (۴) نشان دهنده تغییرات تنش ماگزیمم در کل محیط نسبت به افزایش تعداد سوراخها می باشد. طبیعی است که با افزایش تعداد سوراخها از حد مشخصی افزایش ایجاد شده بسیار جزیی خواهد بود مثلا با افزایش سوراخها از هفت به هشت عدد تنها به مقدار 0.02 به ضریب n اضافه شده است و بنابراین برای محیطی به همین شکل و با سوراخهای بیشتر از هشت عدد می توان همین میزان تمرکز تنش را به طور تقریب بکاربرد



نمودار۳ : تغییرات ضریب تمرکز تنش با تغییر وضعیت نسبی سه دایره.



نمودار۴ : تغییرات ضریب تمرکز تنش با افزایش تعداد سوراخهای دایره ای.

نتیجه گیری

در این مقاله حل مسائل الاستیسیته دوبعدی در یک محیط همبند چندگانه شامل صفحه ای نامحدود با سوراخهای متعدد دایره ای مورد بررسی قرار گرفته است . شرایط مرزی روی مرزهای داخلی و مرز بی نهایت اعمال می شود . همچنین از روش بکار رفته می توان برای حل محیطهای همبند چندگانه محدود در حالتیکه مرز خارجی به اندازه کافی از مرزهای داخلی فاصله داشته باشد استفاده کرد چرا که در چنین حالتی تنشهای اعمال شده روی مرزهای داخلی اثر ناچیزی روی میدان تنش در نزدیکی مرز خارجی خواهند داشت.

بررسی نتایج نشان می دهد هنگامیکه فواصل سوراخهای موجود در صفحه از حد مشخصی بیشتر شود مقدار تمرکز تنش ایجاد شده در چنین محیطی با تمرکز تنش ایجاد شده در محیطی شامل یک سوراخ دایره ای برابر خواهد بود برای مثال وقتی که فاصله مراکز دو سوراخ دایره ای از هشت برابر شعاع آنها بیشتر باشد مقدار افزایش تمرکز تنش در محیط کمتر از پنج درصد خواهد بود . همچنین بررسی محیطهای مختلف نشان میدهد که وضعیت قرارگیری سوراخها نسبت به هم تا حد زیادی روی تمرکز تنش ایجاد شده در محیط تأثیر می گذارد . بررسی تمرکز تنش در صفحه ای با دو سوراخ دایره ای نا مساوی نیز نشان داد که با ثابت بودن فاصله مرزهای دو سوراخ،افزایش شعاع بزرگترها موجب افزایش تمرکز تنش در محیط می شود در صورتیکه افزایش شعاع سوراخ کوچکتر تأثیر چندانی روی تمرکز تنش محیط نخواهد داشت.

مراجع

1 - Muskhelishvilli, N. I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.*, Nordhoff, Groningen.

2 - XU, Z. (1992). *Applied elasticity,* Wiley., Eastern Limited.

3 - Sokolnikoff, S. I. (1965). *Mathematical theory of elasticity,* McGraw-Hill, New York, N.J.

4 - Nemat-Nasser, S. and Horii, H. (1994). Introduction to Micromechanics.

5 - Hill, R. (1965). "Self -consistent mechanics of composite materials." *J. Mech., Phys. Solids,* Vol. 13, PP. 213-222

6 - Churchill, R. V. (1960). *Complex variables and applications.* McGraw-Hill.

7 - Ivanov, V. I. and Tuabetskov, M. K. (1995). *Handbook of conformal mapping with computer - aided, boca raton,* Florida:CRC Press.

۸ - رحیمیان، م.، اسکندری قادی، م. "مکانیک محیطهای پیوسته." انتشارات دانشگاه تهران(۱۳۷۷).

۹ - مطهری، س.م. "کاربرد اعداد مختلط درحل مسائل تمرکز تنش." پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

۱۰ - حسینخانی، ع. ر. "کاربرد اعداد مختلط درحل مسائل الاستیسیته دوبعدی." پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران، ادانشکده فنی دانشگاه تهران.