

# ارتعاشات با دامنه زیاد صفحات اورتوتروپیک با پایه الاستیک حلقه‌ای شکل

محمدحسن نائی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

محسن شاگری

دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۷/۷/۴، تاریخ تصویب ۷۸/۱۲/۲۱)

## چکیده

ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری مربوط به صفحات حلقوی اورتوتروپیک با یک پایه الاستیک حلقه‌ای شکل مورد مطالعه قرار گرفته است با فرض ارتعاشات هارمونیک و حذف متغیر زمان با استفاده از روش میانگین ریتز-کانتورویچ معادلات دیفرانسیل جزئی خطی (که به معادلات دوگانه فون کارمن معروف هستند) به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تقلیل می‌یابد که فرم یک مسئله مقدار - ویژه غیرخطی را دارد. حل مسئله بوسیله مسئله مقدار - اولیه مربوطه در ترکیب با روش انتگرال نیوتن و روش پرتاب موازی بدست آمده است. این مقاله اثر دامنه زیاد بر روی فرکانسهای طبیعی سیستم، تغییرات ضریب سختی فنر در فرکانسهای سیستم و پاسخ سیستم در اثر نیروهای خارجی را بررسی می‌کند. لازم به ذکر است که روش بکار گرفته شده تنها منحصر به حل این مسئله خاص نمی‌شود بلکه برای حل هر مسئله دیفرانسیل مقدار ویژه غیرخطی با دو شرایط مرزی از هم جدا و یک شرایط تطبیقی در وسط قابل استفاده است در صورتیکه تابع بار به صورت تکه‌ای پیوسته باشد.

**واژه‌های کلیدی:** صفحات دایروی، ارتعاشات آنالیز غیرخطی، روش پرتاب موازی

## مقدمه

در صورتی که بارهای خارجی روی سیستمهای سازه‌ای از تغییرات شدید نسبت به زمان برخوردار باشند، لازم است اثر اینرسی در نظر گرفته شود و رفتار دینامیکی سیستم را برحسب تابعی از زمان دنبال کرد. در بسیاری از مسائل مهندسی شرایطی پیش می‌آید که صفحات نازک بایستی در مقابل ارتعاشات با دامنه زیاد مقاوم باشند (بعنوان مثال در موشکها و سفینه‌های فضائی و سازه‌های مهندسی عمران و ...) اگر دامنه حرکت بزرگتر از ضخامت صفحه باشد بحث ریاضی در رابطه با توضیح حرکت علاوه بر تئوری کلاسیک خطی صفحات باید شامل تغییر فرم صفحه میانتر نیز باشد. با وارد کردن اثر نیروهای غشائی در معادلات حاکم، اثرات خمشی و غشائی بصورت معادلات غیرخطی کوپله ظاهر می‌شوند. بعلت پیچیده بودن طبیعت این معادلات تنها روشهای تقریبی برای حل آنها قابل استفاده‌اند. برای اولین بار [۱] Grigoliuk با

بکارگیری روش گالرکین با استفاده از یک مجموعه موفق به حل معادلات برای صفحه دایروی گشت. سپس حل این مسأله بوسیله [۲] Nowinski و [۳] Yamaki و [۴] Bauer با استفاده از متد فرض مود فضائی انجام گرفت که منجر به معادلات دیفرانسیل با مستغیر زمان گردید. تا اینکه در سال ۱۹۷۱ برای اولین بار

اول ارتعاشات صفحات دایروی و حلقوی محدود کردند. در سال ۱۹۷۳ [۶] C.L. Huang با فرض مود زمانی به بررسی ارتعاشات یک صفحه اورتوتروپیک با یک هسته ایزوتروپیک پرداخت. در این مقاله با فرض مود زمانی و روش پرتاب موازی به بررسی ارتعاشات یک صفحه حلقوی اورتوتروپیک با یک نقطه منفرد می‌پردازیم.

## معادلات حاکم بر حرکت

صفحه حلقوی شکلی به شعاع داخلی  $h$  و شعاع خارجی  $a$  و ضخامت  $h$  را در موقعیت تغییر فرم نیافته در مختصات استوانه‌ای  $z, r, \theta$  در نظر می‌گیریم.

با فرض: ۱- عمود ماندن صفحات بر صفحه میانتر قبل و بعد از

(۵)

با جایگذاری معادله (۵) در معادله (۴) داریم:

$$\frac{-h}{2r.C_\theta} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \frac{C_r}{C_\theta} \quad (۶)$$

و با نوشتن معادله تعادل لنگر داریم:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = V_r \quad (۷)$$

که در آن نیروی برشی و  $M_\theta$  و  $M_r$  بترتیب گشتاور خمشی شعاعی و محیطی بر واحد طول می‌باشند.

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = \frac{h^3}{12} \left( E_r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{E'}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \\ = \left( -D_r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{D'}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (۸a)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = - \left( \frac{D_\theta}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + D' \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right) \quad (۸b)$$

که در آن  $D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu^2)}$  و  $D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu^2)}$  و  $D' = \frac{E' h^3}{12(1-\nu^2)}$  صلبیت های خمشی می‌باشند.

با جایگذاری معادلات (۸a,b) در معادله (۷) داریم:

$$D_r \frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \frac{2D_r}{r} \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} - \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{D_\theta}{r^3} \frac{\partial W}{\partial r} \\ + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \psi \frac{\partial W}{\partial t} \right) = q(r,t) \quad (۹)$$

معادلات دوگانه (۶) و (۹) به معادلات دینامیکی فون کارمن معروف هستند. با معرفی کمیت‌های بدون بعد زیر

$$x = W/a \quad \xi = r/a \quad \phi = \frac{C_\theta(1-\nu^2)}{ha} \psi$$

$$\tau = \left( \frac{E_\theta}{12\rho h^2} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 t \quad P(\xi, \tau) = \frac{12}{E_r} \left( \frac{a}{h} \right)^3 q(r,t)$$

معادلات (۶) و (۹) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{C_r}{C_\theta} \frac{\phi}{\xi^2} = - \frac{1-\nu^2}{2\xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \quad (۱۰a)$$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{E_\theta}{E_r} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}$$

خمش، ۲- زیاد بودن شیب ایجاد شده در اثر تغییر فرم، ۳- کوچک بودن تنش نرمال  $\sigma_z$  در مقایسه با دیگر مؤلفه های تنش ۴- متقارن بودن بار و خیز نسبت به محور  $z$  مؤلفه های کرنش به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 - z \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right) \quad (۱a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \quad (۱b)$$

که در آن  $u(r,t)$  و  $W(r,t)$  بترتیب تغییر مکانهای شعاعی و عرضی صفحه میانتر می‌باشند. بین مؤلفه های کرنش رابطه سازگاری زیر برقرار است:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \quad (۱c)$$

و مؤلفه های تنش و کرنش عبارتند از:

$$\sigma_r = E_r \varepsilon_r + E' \varepsilon_\theta \quad \sigma_\theta = E_\theta \varepsilon_\theta + E' \varepsilon_r \quad (۲a)$$

$$\varepsilon_r = C_r \sigma_r + C' \sigma_\theta \quad \varepsilon_\theta = C_\theta \sigma_\theta + C' \sigma_r \quad (۲b)$$

که در آن  $E_r$  و  $E_\theta$  و  $E'$  ثوابت الاستیسیته و  $C_r$  و  $C_\theta$  و  $C'$  ثوابت نرمی در جهات  $r$  و  $\theta$  می‌باشند. با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت شعاعی و صرف نظر از اینرسی شعاعی داریم:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (۳a)$$

که در آن:

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz \quad (۳b)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \quad (۳c)$$

با جایگذاری معادلات (۳b) در (۳c) در معادله (۳a) داریم:

$$\frac{-h}{2r.C_\theta} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial r} (N_r + N_\theta) + \frac{N_r}{r} \left( 1 - \frac{C_r}{C_\theta} \right) \quad (۴)$$

با انتخاب تابع تنش  $\psi$  و با توجه به معادله تعادل (۳a)

نیروهای غشائی را می‌توان بصورت زیر نشان داد.

$$N_r = \frac{\psi}{r} \quad , \quad N_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

تابع بار می‌باشد. با جایگذاری معادلات (۱۲) در معادله (۱۰a) داریم:

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df}{d\xi} - \frac{C_r}{C_\theta} \frac{f}{\xi^2} = -\frac{1-\nu^2}{2\xi} \left( \frac{dg}{d\xi} \right)^2 \quad (13)$$

از آنجائی که معادلات (۱۲) بازا تمام مقادیر  $\tau$  نمی‌توانند معادله (۱۰b) را ارضاء نمایند مقدار مانده که در حقیقت نمایانگر یک نیروی اضافی عمود بر سیستم است بایستی کمینه گردد. برای هر لحظه از زمان بدون بعد  $\tau$  کار مجازی مربوط به نیروی عمودی برای یک تغییر مکان مجازی  $\delta x$  عبارت است از:

$$\delta W = 2\pi \int_R^1 \varepsilon \delta x \xi d\xi \quad \text{که در آن:}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial^4 x}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}$$

$$- \frac{12}{C_\theta E_r} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{\xi(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - P(\xi, \tau)$$

$$R = \frac{b}{a}$$

با قرار دادن کار مجازی این نیروهای عمودی در یک پریود زمانی مساوی صفر خواهیم داشت:

$$I = 2\pi \int_0^{2\pi\omega} (\delta W) d\tau = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^4 g}{d\xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{d^3 g}{d\xi^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{dg}{d\xi} - \frac{E_\theta \lambda g}{E_r}$$

$$- \frac{9}{C_\theta E_r} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\alpha}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( f \frac{dg}{d\xi} \right) = \frac{Q^*(\xi)}{\sqrt{\alpha}} \quad (16)$$

که در آن  $\lambda = \omega^2$  و  $\alpha = \left( A \frac{a}{h} \right)^2$  و معادلات شرایط مرزی به فرم زیر درخواهند آمد.  
پایه آزاد:

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{\nu C}{\xi} \frac{dg}{d\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad \frac{d^3 g}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{d^2 g}{d\xi^2} - \frac{C}{\xi^2} \frac{dg}{d\xi} \Big|_{\xi=R} = 0$$

$$\left( \frac{f}{\xi} \right)_{\xi=R} = 0 \quad (17a)$$

پایه گیردار:

$$g \Big|_{\xi=R} = 0 \quad \frac{dg}{d\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad \frac{df}{d\xi} - \nu \frac{f}{\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad (17b)$$

که در آن:

$$- \frac{12}{C_\theta E_r} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{\xi(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = P(\xi, \tau) \quad (10b)$$

در مسائل حل شده در این مقاله از شرایط مرزی زیر استفاده شده است.

شرایط مرزی برای پایه آزاد:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{E_r}{E_r} \frac{1}{\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi=R} = 0$$

$$\frac{\phi}{\xi} \Big|_{\xi=R} = 0$$

(۱۱a)

شرایط مرزی برای تکیه‌گاه گیردار:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad , \quad x \Big|_{\xi=R} = 0$$

$$\frac{\phi}{\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad \text{حرکت دار}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \nu \frac{\phi}{\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad \text{بدون حرکت}$$

(۱۱b)

## آنالیز تقریبی

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل (۱۰a,b) در حال حاضر امکان پذیر نمی‌باشد بنابراین آنالیز و حل این قبیل مسائل بوسیله بعضی از روشهای تقریبی قابل انجام است. در این مقاله از روش خواص مود هارمونیک برای تقلیل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده شده که فرم یک مسئله مقدار-ویژه را دارد. سپس مسئله مقدار-ویژه با معرفی مسئله مقدار-اولیه مربوط به آن با استفاده از متد انتگرال گیری نیوتن - رافسون حل می‌شود.

روش میانگین ریتز-کانتورویچ با فرض وجود ارتعاشات هارمونیک توابع  $P(\xi, \tau)$  و  $x(\xi, \tau)$  و  $\phi(\xi, \tau)$  را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$P(\xi, \tau) = Q^*(\xi) (h/a) \sin \omega \tau \quad x(\xi, \tau) = A g(\xi) \sin \omega \tau$$

$$\phi(\xi, \tau) = A^2 f(\xi) \sin^2 \omega \tau$$

(۱۲)

که در آن A پارامتر دامنه بدون بعد،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای بدون بعد،  $f(\xi)$  و  $g(\xi)$  بترتیب توابع شکل مربوط به  $\phi$  و  $x$  و  $Q^*(\xi)$

(۲۰b)

مقادیر اولیه معلوم در دو مسئله مقدار اولیه بالا از شرایط مرزی در  $\xi=R$  و  $\xi=1.0$  و شرایط نرمالیزاسیون بدست آمده‌اند و مقادیر  $\eta_i (i=1,2,\dots,5)$  مقادیر تطبیق پذیر در شرایط مرزی در نقطه  $\xi=R_1$  که در آن فاصله پایه الاستیک از مرکز صفحه می‌باشد بطوریکه:

$$(A)\bar{Z}_1(\xi_1=R_1|\bar{\pi};\bar{S})-(B)\bar{Z}_2(\xi_2=R_1|\bar{\pi};\bar{S})=0 \quad (21)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu C}{R_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{R_1^2} & \frac{1}{R_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu C}{R_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu C}{R_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu C}{R_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-12k_a^3 C}{E_2 h^3 R_1^2} & \frac{1}{R_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\nu C}{R_1} & 1 \end{bmatrix}$$

معادله (۲۱) از شرایط پیوستگی خیز و شیب و ممان خمشی و نیروی برشی و نیروی غشایی شعاعی و تغییرمکان شعاعی در  $\xi=R_1$  بدست آمده است که در آن بردار پارامترها داده  $\bar{S}=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5, \lambda)^T$  و بردار پارامترها مجهول  $\bar{\pi}=(\alpha, Q^*, C)^T$  است و  $0$  بردار صفر  $(6 \times 1)$  است.

برای مقدار ثابت  $\bar{\pi}=\bar{\pi}^0$  معادلات (20) به شش معادله غیرخطی برحسب شش مجهول  $\bar{S}=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5, \lambda)$  تقلیل می‌یابد.

$$(A)\bar{Z}_1(\xi_1=R_1|\bar{\pi}^0;\bar{S})-(B)\bar{Z}_2(\xi_2=R_1|\bar{\pi}^0;\bar{S})=0 \quad (22)$$

ریشه  $\bar{S}^0(\bar{\pi}^0)$  از معادله (۲۲) را می‌توان از طریق کاربرد

$C = \frac{C_T}{C_\theta}$  بعلاوه برای اینکه رابطه واحد بین  $\alpha$  و  $\lambda$  برقرار کنیم از نرمالیزاسیون زیر استفاده می‌کنیم:

$$g|_{\xi=R}=1.0 \quad (17c)$$

معادلات (۱۶b) با یک مجموعه از شرایط مرزی (۱۷) تشکیل یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای غیرخطی را می‌دهد که در حالت ارتعاشات آزاد فرم یک مسئله مقدار-ویژه غیرخطی را دارد. مسئله مقدار اولیه وابسته به علت وجود پدیده غیرخطی در مسئله مقدار ویژه آنالیز آن بوسیله مسئله مقدار اولیه مربوط به آن دنبال می‌شود. معادلات حاکم (۱۶a,b) را می‌توان بصورت یک سیستم معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول تبدیل نمود.

$$\frac{d\bar{y}}{d\xi} = \bar{H}(\xi, y; \alpha, \lambda, C) \quad R \leq \xi \leq 1 \quad (18a)$$

که در آن:

$$\bar{y}(\xi) = \{g, g', g'', g''', f, f'\}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}^T$$

$\bar{H}$  یک تابع برداری  $(6 \times 1)$  طوریکه:

$$\bar{H} = \{y_2, y_3, y_4, [-\frac{2y_4}{\xi^2} + C(\frac{y_3}{\xi^2} - \frac{y_2}{\xi^3} + \xi y_1) + \frac{9\alpha}{\xi}], \frac{C(1-\nu C^2)}{1-\nu^2}(y_3 y_5 + y_2 y_6) + \frac{Q^*}{\nu \alpha} y_6, [\frac{y_6}{\xi} + C \frac{y_5}{\xi^2} - \frac{1-\nu^2}{2\xi} y_2^2]\}^T$$

شرایط مرزی (۱۷) را می‌توان به فرم عمومی زیر نوشت:

$$M\bar{y}(R) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$N\bar{y}(1) = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (18b)$$

برای حل سیستم معادلات (۱۸) بایستی دو مسئله مقدار اولیه مرتبط زیر را با هم حل نمود:

$$\frac{d\bar{Z}_1}{d\xi} = \bar{H}_1(\xi = \xi_1) | R \leq \xi_1 \leq R_1, \bar{Z}_1; \alpha, \lambda, C \quad (19a)$$

$$\bar{Z}_1(R) = [1, \eta_1 - \frac{\nu C}{R} \eta_1, \frac{C(1+\nu)}{R^2} \eta_1, 0, \eta_2]^T \quad (19b)$$

$$\frac{d\bar{Z}_2}{d\xi} = H_2(\xi = \xi_2 | R_1 \leq \xi_2 \leq 1, \bar{Z}_2; \alpha, \lambda, C) \quad (20a)$$

$$\bar{Z}_2(1) = [0, 0, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \nu C \eta_5]^T$$

شده در (۲۴) را محاسبه نمود، بنابراین از فرم مسئله تغییراتی آن استفاده نموده و ماتریس ژاکوبین را تشکیل می‌دهیم.

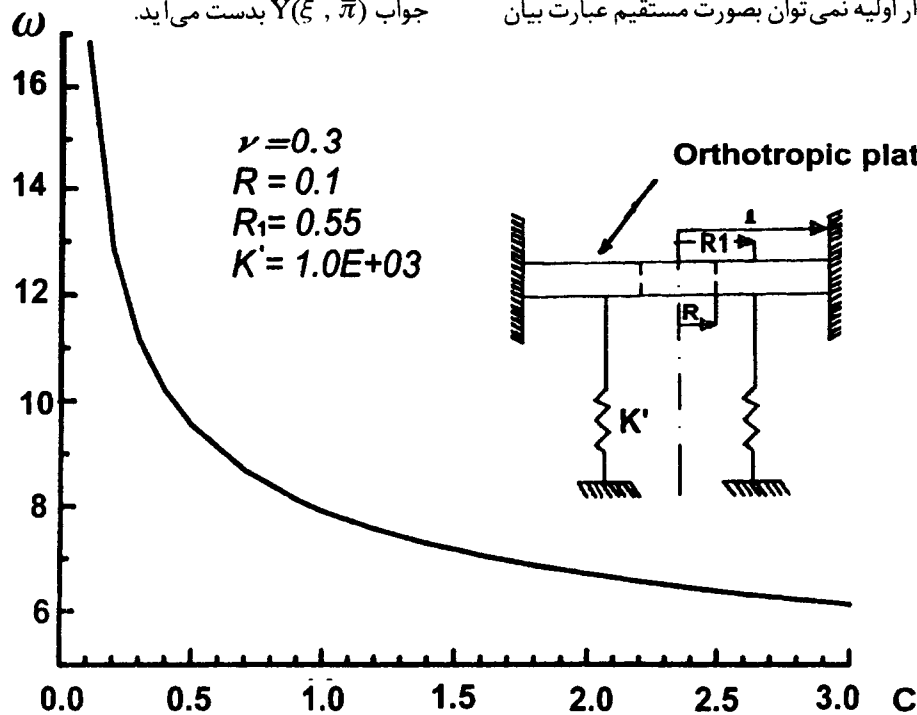
$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial \bar{S}} \right) = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{S}} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Z_1} \left( \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial \bar{S}} \right) \quad (25a)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial \bar{S}} \right)_{\xi=R} = \frac{\partial \bar{Z}_1(R)}{\partial \bar{S}} \quad (25b)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial \bar{S}} \right) = \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{S}} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Z_2} \left( \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial \bar{S}} \right) \quad (26a)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial \bar{S}} \right)_{\xi=1} = \frac{\partial \bar{Z}_2(R)}{\partial \bar{S}} \quad (26b)$$

هر یک از معادلات (۲۵) و (۲۶) شامل ۳۶ معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول و مجموعه‌ای از شرایط مرزی مربوطه است. برای بردار معین  $\bar{S}$  و  $\bar{\pi} = \pi^0$  مسئله مقدار مطرح شده در معادلات (۱۹) و (۲۵) با هم در بازه  $[R, R_1]$  و مسئله مقدار اولیه مطرح شده در معادلات (۲۰) و (۲۶) با هم در بازه  $[R_1, 1]$  بصورت همزمان انتگرال‌گیری عددی شوند. در هر مرحله با داشتن ماتریسهای  $J_1$  و  $J_2$  می‌توان حدس اولیه را تصحیح و به جواب رسید. حال با نمو  $\Delta \bar{\pi}$  روی مقدار دامنه  $\bar{\pi}^0$  بطوریکه جواب مربوط به  $\bar{S}^0$  و  $\bar{\pi}^0$  در دامنه همگرایی  $\bar{S}^1$  (جواب مربوط به  $(\bar{\pi}^1 = \bar{\pi}^0 + \Delta \bar{\pi}^1)$ ) باشد چون  $\bar{\pi}^0$  بعنوان نقطه شروع برای پیدا کردن جواب مربوط به  $\bar{\pi}^1$  می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان به جواب  $\bar{S}(\bar{\pi})$  دست یافت و به دنبال آن جواب  $Y(\xi, \bar{\pi})$  بدست می‌آید.



شکل ۱: فرکانس بدون بعد صفحه اورتوتروپیک برحسب ضریب نرمی.

مستقیم روش نیوتن پیدا نمود از حدس اولیه  $\bar{S}_1$  شروع کرده و دنباله تکرار به فرم زیر شکل می‌گیرد.

$$\bar{S}_{k+1} = \bar{S}_k + \Delta \bar{S}_k \quad (23a)$$

اگر به ترم اول بسط سری تیلور از سری معادلات (۲۲) بسنده کنیم معادله (۲۳b) شرایط تصحیح خطی برای  $k$  امین مرحله تکرار را فراهم می‌سازد.

$$\Delta S_k = -[(A)(j_1)_k - (B)(J_2)_k]^{-1} [(A)Z_1(R_1; \pi^0; S_k) - (B)Z_2(R_i; \pi^0; S_k)] \quad (23b)$$

ماتریسهای ژاکوبین  $J_1(6 \times 6)$  و  $J_2(6 \times 6)$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

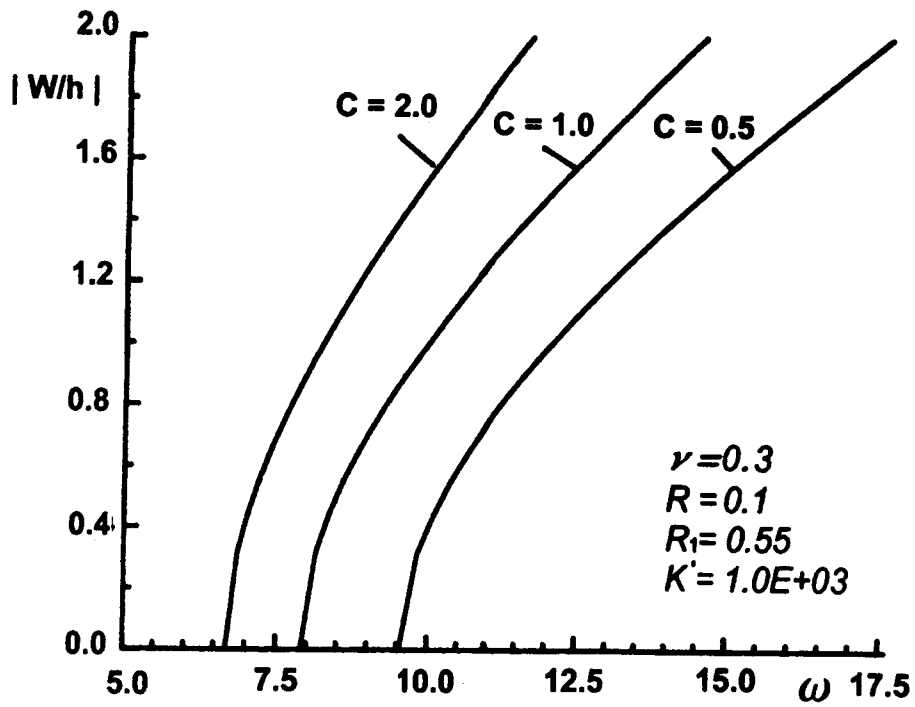
$$(j_1) = \left( \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial \bar{S}} \right)_{\xi=R_1} = \left( \frac{\partial \bar{Z}_{1i}}{\partial \eta_j} \right)_{\xi=R_1} \quad i=1,2,\dots,6 \quad (24a)$$

$$j=1,2,\dots,6$$

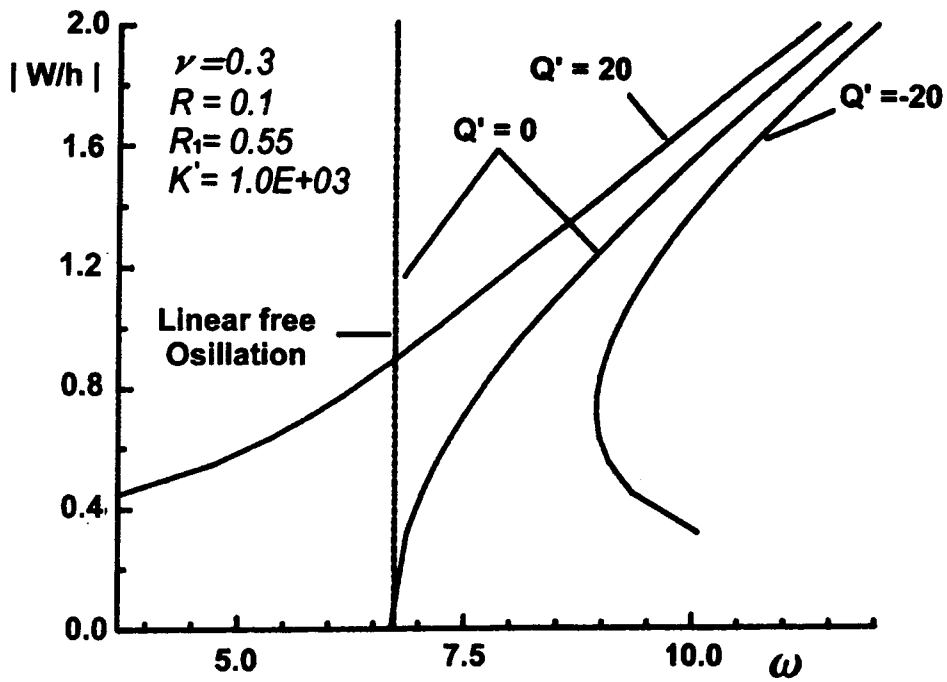
$$(j_2) = \left( \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial \bar{S}} \right)_{\xi=R_1} = \left( \frac{\partial \bar{Z}_{2i}}{\partial \eta_j} \right)_{\xi=R_1} \quad i=1,2,\dots,6 \quad (24b)$$

$$j=1,2,\dots,6$$

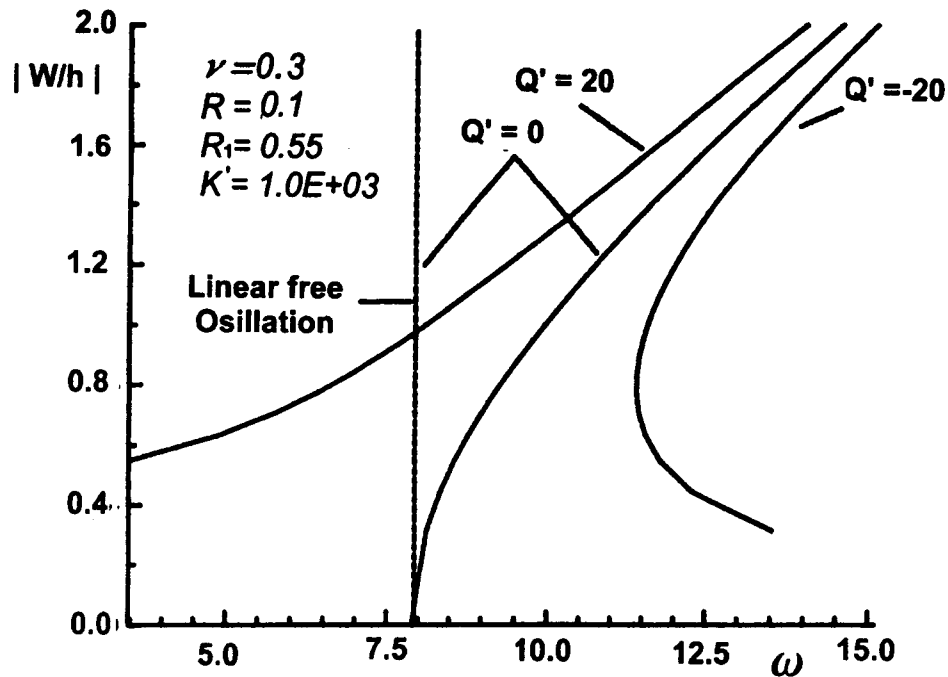
بواسطه مشخصه غیرخطی بودن تابع برداری  $\bar{H}$ ، با حل صریح مربوط به مسئله مقدار اولیه نمی‌توان بصورت مستقیم عبارت بیان



شکل ۲: پاسخ ارتعاشات آزاد بر حسب ضرایب نرمی.



شکل ۳: منحنی رزونانس صفحه ارتوتروپیک با هسته الاستیک با ضرایب نرمی  $C=2.0$ .



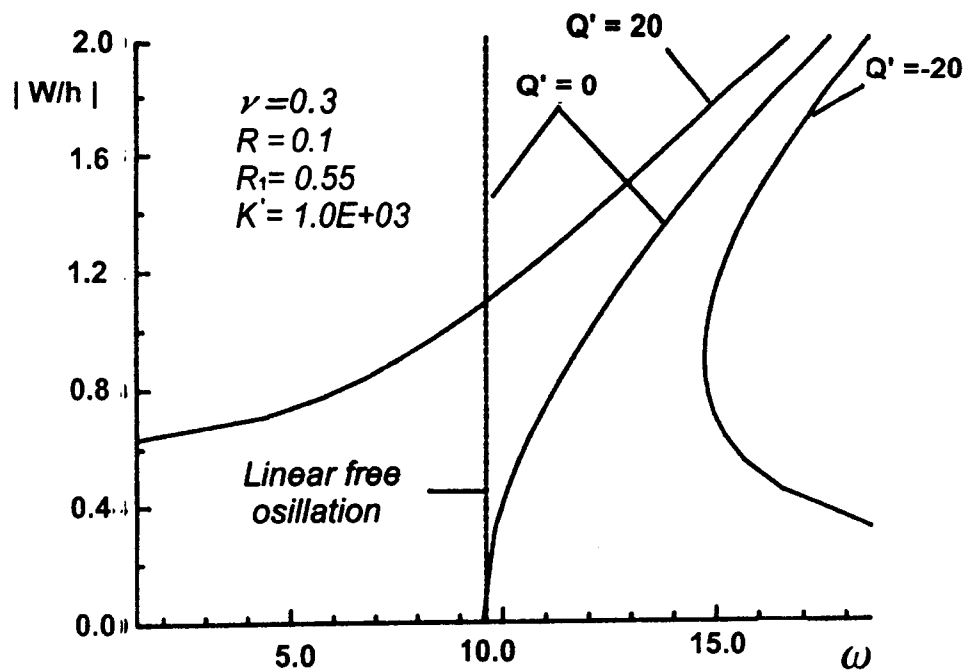
شکل ۴: منحنی رزونانس صفحه ارتوتروپیک با هسته الاستیک با ضریب نرمی  $C=1.0$ .

مقدار اولیه  $(19), (25), (20), (26)$  را با استفاده از حدس مقادیر اولیه  $\bar{S}^0$  انتگرال گیری عددی می‌کنیم. با استفاده از متد نیوتن و انتگرال گیری، تصحیح متوالی را تا زمانی انجام می‌دهیم که بردار خطا  $(22)$  نامساوی زیر را ارضا کند.

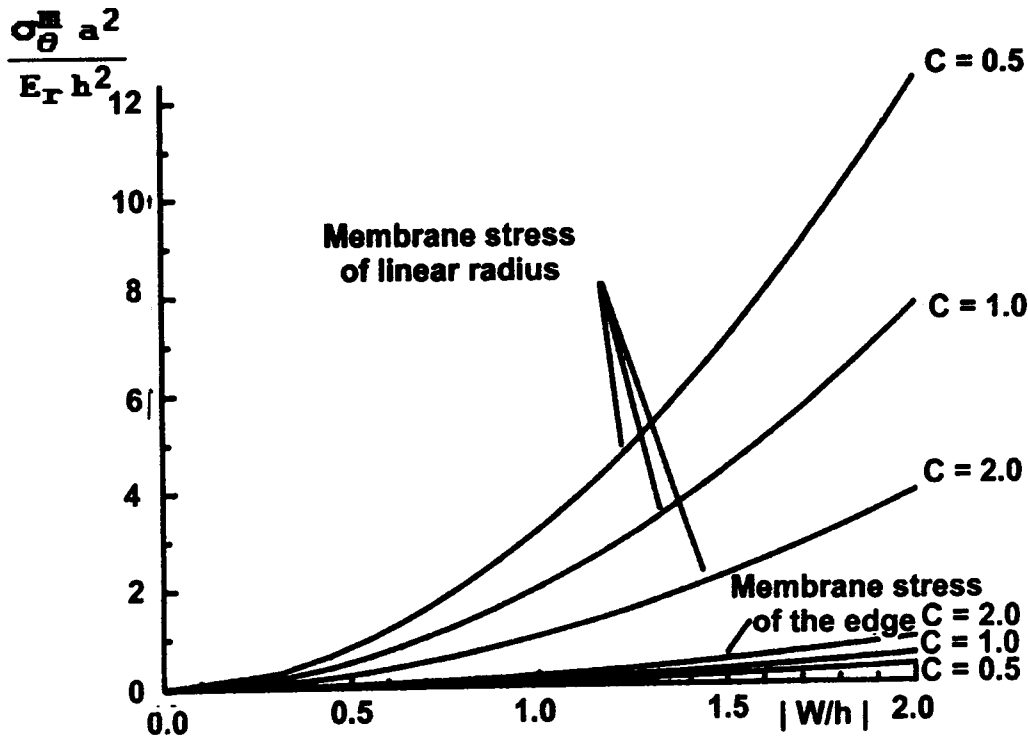
$$\sum_{i=1}^6 \left| [(A)Z_1]_{\xi_1=R_1} - [(B)Z_2]_{\xi_2=R_2} \right| \leq 0.1 \times 10^{-5}$$

### محاسبات عددی و نتایج

آنالیز بالا با انتگرال گیری عددی تکمیل می‌گردد ولی برای شروع نیاز به مقادیر اولیه می‌باشد که ابتدا ارتعاشات آزاد حطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بنابراین پارامتر دامنه  $\alpha$  و پارامتر  $Q^*$  رامساوی صفر قرار می‌دهیم و همچنین ضریب نرمی  $C_0$  را برای صفحه ارتوتروپیک مساوی  $C_0=C^0$  می‌گیریم سپس مسائل



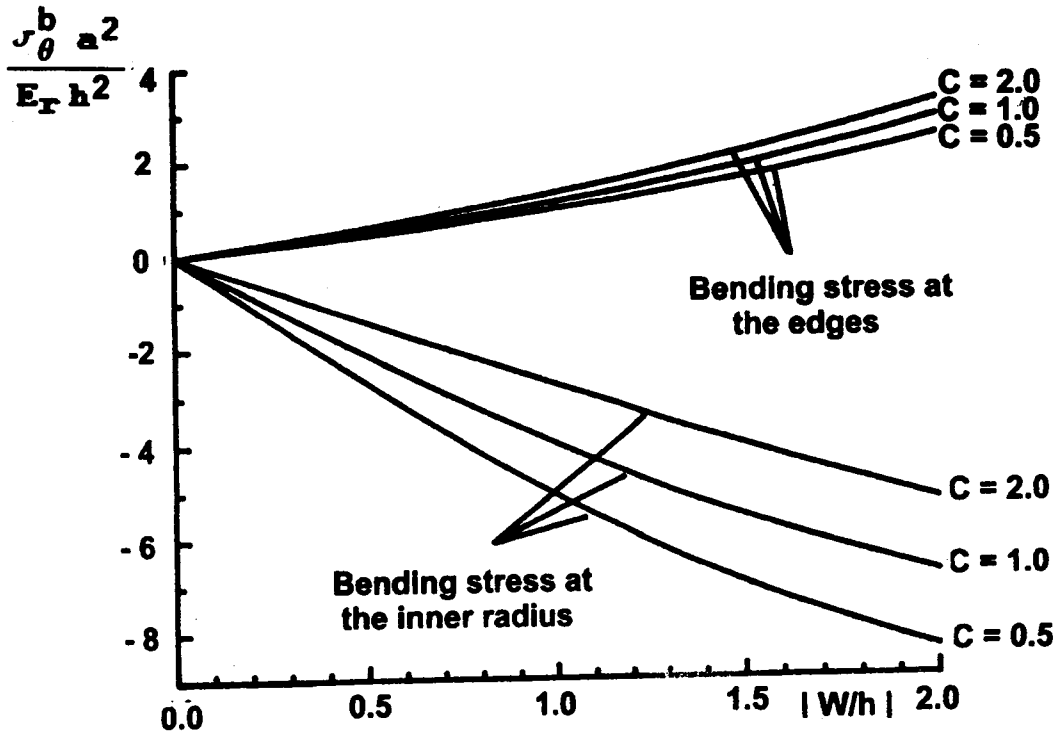
شکل ۵: منحنی رزونانس صفحه ارتوتروپیک با هسته الاستیک با ضریب نرمی  $C=0.5$ .



شکل ۶: تنش غشائی محیطی بدون بعد برحسب نسبت دامنه ارتعاش در لبه داخلی و خارجی صفحه.

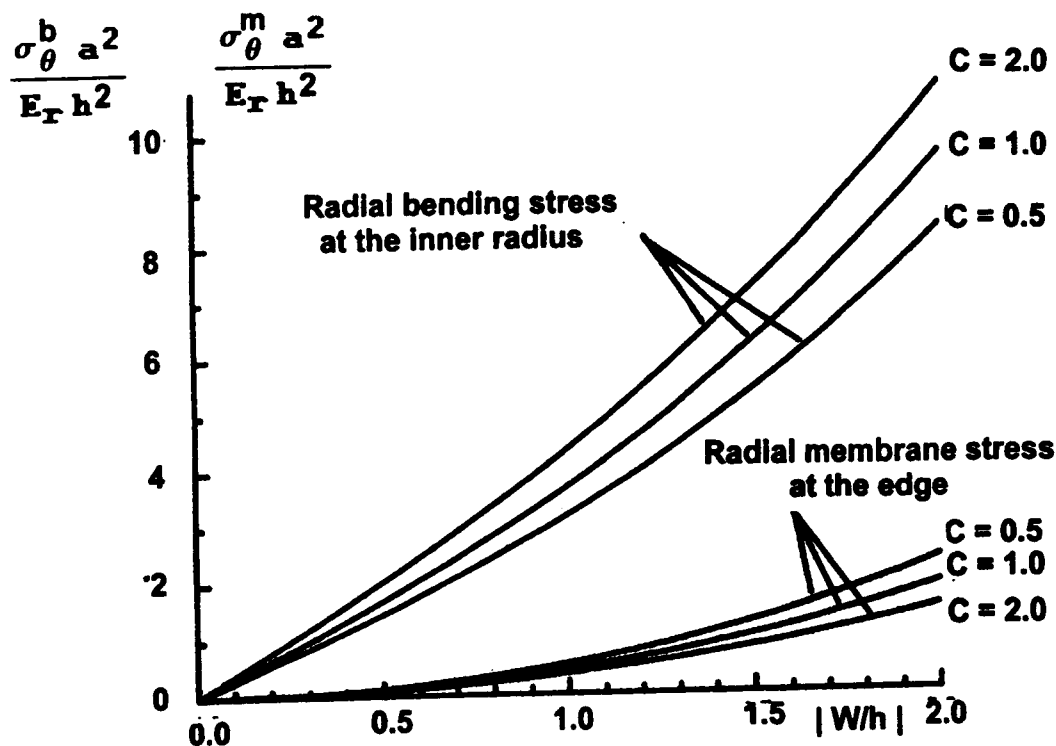
برای ارتعاشات اجباری داشته باشیم. حال با کاهش دامنه  $\Delta\alpha$  می‌توان جواب را در ارتعاشات اجباری بدست آورد. باید توجه داشت که تابع بار می‌تواند هر تعدادی ناپیوستگی داشته باشد و لیکن بازاء کاهش  $\alpha$  بایستی مقداری ثابت باشد.

با استفاده از مفاهیم حل همسایگی از مقادیر جواب بازاء  $\alpha=0$  می‌توان بعنوان شرایط اولیه برای حل مرحله  $\alpha^1 = \alpha^0 + \Delta\alpha$  استفاده نمود و بعد از بدست آوردن جواب ارتعاشات آزاد در دامنه ماکزیمم با انحراف جزئی در  $Q^*$  می‌توان جواب را در دامنه ماکزیمم



شکل ۷: تنش خمشی محیطی بدون بعد برحسب نسبت دامنه ارتعاش در لبه داخلی و خارجی صفحه.





شکل ۸: تنش غشائی و خمشی شعاعی بدون بعد برحسب نسبت دامنه ارتعاش در لبه داخلی و خارجی صفحه.

تعیین مشخصه های ارتعاشی غیرخطی صفحات، حتی در جایی که مسئله شامل تعداد معینی ناپیوستگی در تابع بار، تابع جرم، تابع سختی صفحه باشد، کارآیی لازمه را دارد.

### فهرست علائم

$r, \theta, z$ : مختصات استوانه‌ای

$b, a$ : شعاع داخلی و خارجی

$h$ : ضخامت صفحه

$t$ : متغیر زمان

$u, w$ : مولفه های تغییر مکان شعاعی و عرضی

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ : کرنش های شعاعی و محیطی

$E, \nu$ : مدول الاستیسیته و ضریب پواسون

$N_r, N_\theta$ : نیروهای غشایی شعاعی و محیطی

$\psi, \phi$ : توابع تنش

$M_r, M_\theta$ : گشتاورهای خمشی شعاعی و محیطی بر واحد طول

$V_r$ : نیروی برشی بر واحد طول

$D_r, D_\theta, D'$ : صلبیت های خمشی

بعنوان نمونه یک صفحه اورتوتروپیک حلقوی با پایه داخلی آزاد  $R=0.1$  و پایه های خارجی گیردار غیرقابل حرکت  $R=0.1$  با یک نقطه منفرد در شعاع  $R_1=0.55$  مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۱) مقادیر پارامتر خطی فرکانس را برحسب ضریب نرمی  $C$  نمایش می‌دهد که حالت ایزوتروپیک  $C=1$  مقدار فرکانس 10.215 با نتایج کلاسیک در این مورد تطبیق دارد [7] زمانی که  $K=0$  باشد) نتایج مورد انتظار [8] در رابطه با کاهش پارامتر فرکانس با افزایش ضریب نرمی  $C$  در شکل (۲) منحنی رزونانس مربوط به ارتعاشات غیرخطی برحسب مقادیر مختلف ضریب نرمی  $(C=0.5, 1.0, 2.0)$  رسم شده است. در شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) منحنی رزونانس را با مقادیر مختلف ضریب نرمی نشان می‌دهد و شکل‌های (۶)، (۷) و (۸) مقادیر تنش‌های بدون بعد را برحسب دامنه در شرایط انتهایی نشان می‌دهد.

روش مورد استفاده در این مقاله دو مسئله مقدار مرزی غیرخطی که بایستی با هم حل شوند را به دو مجموعه از مسائل مقدار اولیه تقلیل داده و یک روش عملی و بسیار قوی در حل مسائل نوسانات غیرخطی صفحات اورتوتروپیک می‌باشد. در

|  |  |
|--|--|
| توابع برداری : $\bar{y}, \bar{z}, \bar{H}$ | شدت بار بر حسب زمان : $q(r,t), P(\varepsilon, \tau)$ |
| تابع برداری صفر : $O$                      | مؤلفه بدون بعد مکان و زمان : $\xi, \tau$             |
| مختصات پایه الاستیک : $R_1$                | مؤلفه بدون بعد تغییر مکان عرضی : $x$                 |
| بردار بار نیروهای مجهول : $s$              | توابع شکل ارتعاشات : $g, f$                          |
| ماتریس های ژاکوبین : $J_1, J_2$            | بارگسترده بدون بعد : $Q^*(\xi)$                      |
| پارامترهای مقدار اولیه مرزی : $\bar{\pi}$  | پارامترهای دامنه : $A, \alpha$                       |
|  | ضریب نرمی : $C$                                      |
|  | نسبت شعاع داخلی به خارجی : $R$                       |

### مراجع

- Griogoliuk, E. I. (1995). "Nonlinear vibration and stability of shallow shells and rods." *Nauk*, No. 3, PP. 33-68.
- Nowinski, J. (1962). "Nolinear transvers vibrations of circular elastic plates built-in at the boundary." *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, Vol. 1, PP. 325-334.
- Yamaki, N. (1961). "Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates." *ZAMM*, Vol. 41, PP. 501-510.
- Baure, H. F. (1968). "Nonlinear response of elastic plates to pluse excitations." *J. Apple. Mech.*, Vol. 35.
- HUANG, C. L. and SADMAN, B. E. (1970). "Finite amplitude oscillations of a thin elastic annulus." *Development in Mechanics*, Vol. 6, P. 921.
- HUANG, C. L. (1973). "Finite amplitude vibrations of orthotropic circular plate with an isotropiccore." *J. Nonlinear Mechanics*, Vol. 8, PP. 445-457.
- Timoshenko, S. (1955). *Vibration problems in engineering*, Van Nostrand, 3rd edition.
- Naei, M. H. and Sanaei, S. (1992). *Nonlinear vibration of orthotropic annular plates master thesis*, Tehran University.