نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۵، شماره ۲، شهریورماه ۱۳۸۰، از صفحه ۱۸۱ تا ۱۹۰

الگوریتمی جهت انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های صف در حالت پایا

امیر آذرون
استادیار گروه مهندسی صنایع - دانشگاه بوعلی سینا همدان
فرهاد کیانفر
دانشیار دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی شریف
(تاریخ دریافت ۷۸/۴/۲۸، تاریخ تصویب ۸۰/۵/۳۰)

چکیده

این مقاله به ارائه الگوریتمی جهت انتخاب کوتاهترین مسیر از گره ابتدایی به گره انتهایی در شبکه‌های صف در حالت پایا، به نحوی که در گره‌های شبکه باجه‌های خدمت دهی با یک یا بی نهایت خدمت دهنده و برخوردار از توزیع زمان سرویس عمومی وجود داشته باشند و همچنین زمانهای گذر از شاخه‌های مابین هر دو باجه صف مستقر در دو گره شبکه مفروض، متغیرهای تصادفی مستقل و برخوردار از توزیع عمومی باشند، می‌پردازد. در این مقاله در ابتدا به ازای هر گرهی که در آن یک باجه صف وجود داشته باشد، شاخه‌ای متناظر با توزیع زمان انتظار مشتری در سیستم صف فوق به شبکه افزوده می‌شود و سپس کلیه متغیرهای تصادفی متناظر با زمانهای گذر از کلیه شاخه‌های شبکه تبدیل یافته با دو معیار قطعی متناظر با میانگین و واریانس متغیر تصادفی فوق جایگزین می‌شوند و در انتها پس از اثبات فرض یکنوایی از روش برنامه‌ریزی پویا جهت تعیین بهترین مسیر دو معیاره، با توجه به تابع مطلوبیتی مرکب از معیارهای متناظر با مینیموم میانگین و همچنین مینیموم واریانس مسیر طی شده از گره ابتدایی به گره انتهایی استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی : نظریه صف، کوتاهترین مسیر تصمیم‌گیری چندمعیاره، برنامه‌ریزی پویا، نظریه گراف، فرآیندهای تصادفی، تئوری شبکه ها

مقدمه

در مسئله کوتاهترین مسیر، هدف یافتن مسیری با کوتاهترین زمان مابین دو گره ابتدایی و انتهایی شبکه می‌باشد. این مقاله به ارائه الگوریتمی جهت انتخاب کوتاهترین مسیر از گره ابتدایی به گره انتهایی در شبکه‌های صف پایا می‌پردازد، به نحوی که در بعضی از گره‌های شبکه باجه‌های خدمت دهی با یک یا بی نهایت خدمت دهنده و توزیع زمان سرویس عمومی وجود داشته باشد و ورود مراجعین از خارج به گره‌های شبکه فوق از فرایند پواسون تبعیت کند و روی نرخ ورود به گره‌های شبکه و همچنین نرخ سرویس دهی هر کدام از باجه‌های خدمت دهی کنترلی وجود نداشته باشد و همچنین زمانهای گذر از شاخه‌های مابین هر دوباجه صف مستقر در دو گره شبکه مفروض متغیرهای تصادفی مستقل و برخوردار از توزیع عمومی باشند.

در حالتی که زمان طی شاخه‌ها اعدادی ثابت باشند، روشهای زیادی مبتنی بر برنامه‌ریزی پویا، برنامه‌ریزی صفر-یک و همچنین روشهایی مبتنی بر مفاهیم نظریه گراف و تئوری شبکه‌ها برای تعیین کوتاهترین مسیر مابین دو گره ابتدایی و انتهایی وجود دارد.

بسیاری از الگوریتمهای فوق در Sherali, Jarvis, Bazaraa [1] (فصل ۱۲) به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین Pang, Deo [2] به بیوگرافی الگوریتمهای کوتاهترین مسیر می‌پردازند. هنگامیکه زمان طی شاخه‌ها متغیرهای تصادفی باشند، مسئله به شکل قابل ملاحظه‌ای مشکلتر می‌شود. Martin [3] تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر و همچنین میانگین زمان کوتاهترین مسیر در شبکه‌های احتمالی را در حالتی که زمان طی شاخه‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع چند جمله‌ای باشند، در قالب انتگرالهای چندگانه بدست می‌دهد. Frank [4] روی مسئله احتمال آنکه زمان کوتاهترین مسیر در شبکه از مقدار مشخص از پیش تعیین شده‌ای کوچکتر باشد، با در نظر گرفتن توزیعات احتمالی پیوسته برای زمان طی شاخه‌ها کارکرده است. Mirchandani [5] از یک رویکرد متفاوت برای بدست آوردن توزیع زمان کوتاهترین مسیر در شبکه استفاده می‌کند که ما را از برخورد با انتگرالهای چندگانه بی نیاز می‌کند اما روش اخیر فقط در حالتی که زمان طی شاخه‌ها متغیرهای تصادفی

گسسته باشند کاربرد دارد. در حالتی که زمان طی شاخه‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و برخوردار از توزیع نمایی باشند، Kulkarni [۶] با استفاده از مفاهیم فرایندهای تصادفی ، الگوریتمی برای تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر در شبکه‌های جهت دار از گره ابتدایی به گره انتهایی ارائه می‌دهد.

ویژگی عمده مقالات فوق آنست که در هیچکدام به مقوله انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های احتمالی از گره ابتدایی به گره انتهایی پرداخته نشده است. با توجه به معیارهای مطرح شده جهت انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های تصادفی از قبیل میانگین زمان رسیدن از گره ابتدایی به گره انتهایی یا احتمال آنکه زمان رسیدن از گره ابتدایی به گره انتهایی کوچکتر یا مساوی مقدار مشخص از پیش تعیین شده‌ای باشد، مباحث این بخش عمدتاً مرتبط با تحلیل شبکه‌های چند معیاره می‌باشد. Lee و Pulat [۷] به ارائه الگوریتمی برای حل مسئله جریان در شبکه‌های دو معیاره پرداخته‌اند. مسائل جریان در شبکه طیف وسیعی از مسائل از قبیل حمل و نقل ، حداکثر جریان، تخصیص و کوتاهترین مسیر را در برمی‌گیرند. در این الگوریتم با این فرض که متغیرهای تصمیم موجود در مسئله از نوع پیوسته باشند از ترکیب تئوری برنامه ریزی خطی دو معیاره با روش out- of- kilter که روشی کارا برای حل مسائل جریان در شبکه است نقاط گوشه کارای مسئله دو معیاره جریان در شبکه بدست می‌آیند. ترکیبات محدب این نقاط گوشه کارا، کلیه نقاط کارا را بدست می‌دهند. با توجه به این نکته که در مسئله کوتاهترین مسیر، متغیرهای تصمیم از نوع صفر-یک می‌باشند، بنابراین الگوریتم فوق در این ارتباط کارایی چندانی نخواهد داشت.

Martins [۸] با استفاده از برنامه ریزی پویا مجموعه مسیرهای کارا برای مسئله کوتاهترین مسیر دو معیاره را به دست آورده است. بیوگرافی نسبتا کاملی از مسئله مسیر چند معیاره توسط Min, Current [۹] صورت گرفته است.

Mirchandani, Turnquist, Wijerante [۱۰] الگوریتمی برای تعیین مجموعه مسیرهای غیر چیره از گره ابتدایی به گره انتهایی در یک شبکه به نحوی که هر شاخه در برگیرنده معیارهای مختلفی باشد که تعدادی از آنها نیز ممکن است تصادفی باشند ارائه می‌دهند. در این مقاله در ابتدا هر معیار تصادفی با دو معیار قطعی متناظر با میانگین و واریانس معیار فوق جایگزین می‌شود و سپس به کمک یک الگوریتم چند معیاره مجموعه مسیرهای غیر چیره در شبکه تعیین می‌شود.

Moskowitz, Morin, Carraway [۱۱] بر پایه برنامه‌ریزی پویای عمومی به ارائه الگوریتمی جهت حل شبکه‌های چند معیاره می‌پردازند. در این مقاله در ابتدا شرایط کلی را که با توجه به آنها فرض یکنوایی برقرار است و می‌توان از روش برنامه ریزی پویا جهت حل مسئله استفاده کرد مطرح می‌نمایند و در ادامه حالت خاصی را مطرح می‌کنند که فرض یکنوایی را نقض می‌کند و ثابت می‌نمایند در این حالت روش برنامه ریزی پویا، جواب صحیحی بدست نمی‌دهد و در نهایت از روش برنامه‌ریزی پویای عمومی برای رسیدن به جواب بهینه شبکه دو معیاره فوق که یک معیار متناظر با کوتاهترین مسیر و معیار دوم متناظر با قابل اطمینان ترین مسیر شبکه می‌باشد، استفاده می‌شود. یکنوایی بدین معنی است که جوابهای جزئی بهینه به کمک تابع برگشتی ، با توجه به تابع مطلوبیت مفروض به جواب بهینه نهایی منجر می‌شود.

در این ارتباط لازم به ذکر است که اکثر مقالاتی که در ارتباط با شبکه‌های صف منتشر شده به مقوله کنترل نرخهای ورود و سرویس دهی و همچنین بدست آوردن یکسری توزیعات احتمالی مشخص پرداخته‌اند و مقوله انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های صف بدین شکل مورد بررسی قرار نگرفته است.

بخش دوم این مقاله به ارائه الگوریتمی جهت تبدیل مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه‌های صف به مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه‌های احتمالی می‌پردازد. در بخش سوم به مسئله بهترین مسیر دو معیاره پرداخته می‌شود. بخش چهارم به رویکرد برنامه ریزی پویا جهت حل مسئله بهترین مسیر دو معیاره می‌پردازد. بخش پنجم مثال عددی مرتبط را دربر می‌گیرد و در نهایت بخش ششم نتیجه گیری از مقاله را شامل می‌شود.

تبدیل مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه‌های صف به مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه‌های احتمالی

در این بخش روشی جهت تبدیل مسئله انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های صف در حالت پایا به مسئله انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه‌های احتمالی ارائه می‌شود. شبکه‌های صف مورد بررسی در این مقاله کلیه فرضیات شبکه‌های جکسون را به انضمام دو فرض زیر شامل می‌شوند.

۱ـ زمانهای سرویس باجه‌های مختلف متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع عمومی می‌باشند و در هر باجه خدمت دهی یا یک خدمت دهنده و یا بی نهایت خدمت دهنده وجود دارد، یعنی باجه‌های خدمت دهی مورد بحث یکی از انواع

G/M/1,M/G/1,M/G/∞,M/M/∞,M/M/1 می‌باشند.

۲ـ زمانهای گذر از شاخه‌های مابین هر دو باجه صف مستقر در دو گره شبکه مفروض، متغیرهای تصادفی مستقل و برخوردار از توزیع عمومی می‌باشند.

حال با فرض آنکه V مجموعه گره‌ها و A مجموعه شاخه‌های شبکه جهتدار G= (V,A) باشند، به تحلیل انواع باجه‌های خدمت دهی مورد اشاره می‌پردازیم.

الف ـ در گره‌های شبکه یکی از انواع باجه‌های M/M/∞,M/M/1 یا M/G/∞ وجود داشته باشد.

اگر $w_3(t),\ w_2(t),\ w_1(t)$ نشانگر توابع چگالی زمان انتظار مشتری در سیستم در باجه‌های M/G/∞,M/M/∞,M/M/1 باشند، می‌توان به ازای هر گره‌ای که در آن یک باجه خدمت دهی از انواع فوق وجود داشته باشد، یک شاخه برخوردار از دو معیار قطعی متناظر با میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم به شبکه اضافه کرد و شبکه صف را به یک شبکه احتمالی تبدیل نمود. در این حالت زمان گذر از هر شاخه در شبکه احتمالی تبدیل یافته یا معادل خواهد بود با زمان انتظار در سیستم صف مرتبط، یا آنکه نشانگر زمان گذر از شاخه مابین دو باجه صف مستقر در دو گره شبکه صف اولیه می‌باشد. بنابراین اطمینان حاصل می‌شود که کلیه اطلاعات شبکه اولیه منتقل می‌شود. فرایند شرح داده عکس عمل جذب شاخه در گراف می‌باشد. (G.e) "برای توضیح بیشتر به Murty, Bondy [۱۲] (فصل ۲) مراجعه شود."

در این ارتباط لازم به ذکر است که $w_1(t)$ توزیع نمایی با پارامتر $(\mu-\lambda)$ دارد، اگر λ آهنگ ورود به باجه و μ آهنگ سرویس‌دهی در باجه M/M/1 باشد. بنابراین میانگین و واریانس آن به ترتیب عبارتند از: $(1/(\mu-\lambda))$, $(1/(\mu-\lambda))^2$.

$w_2(t)$ توزیع نمایی با پارامتر μ دارد، اگر μ آهنگ سرویس در باجه M/M/∞ باشد. بنابراین میانگین و واریانس آن به ترتیب برابر $(1/\mu)$,$(1/\mu)^2$ خواهد بود.

در ارتباط با $w_3(t)$ فرض زیر قابل اثبات خواهد بود:

$$w_3(t)=B'(t) \tag{1}$$

اگر B(t) نشانگر تابع توزیع تجمعی زمان سرویس در باجه M/G/∞ باشد که شکل توزیع مشخص است. چرا که در اینحالت بدلیل آنکه صفی تشکیل نمی‌شود تابع چگالی زمان انتظار مشتری در سیستم برابر تابع چگالی زمان سرویس مشتری در باجه فوق خواهد بود که با توجه به شکل توزیع B(t) می‌توان میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم را محاسبه نمود و معیارهای فوق را به شاخه اضافه شده در شبکه منتقل نمود و شبکه صف را به شبکه احتمالی تبدیل کرد.

ذکر این نکته ضروری است که فرایند عزیمت از هر یک از باجه‌های فوق در حالت پایا، پواسون با نرخی برابر فرایند ورودی به هر یک از باجه‌های فوق می‌باشد. "برای توضیح بیشتر [۱۳] Harris, Gross (فصل ۵)مراجعه شود."

ب ـ در گره‌های شبکه باجه‌های از نوع M/G/1 وجود داشته باشد.

در باجه M/G/1 توزیع زمان انتظار مشتری در سیستم همانند مدلهای شرح داده شده قبلی به سهولت به دست نمی‌آید و تنها می‌توان تبدیل لاپلاس ـ استیلتس تابع توزیع تجمعی زمان انتظار مشتری در سیستم را به شکل زیر بدست آورد:

"برای توضیح بیشتر به Harris , Gross [۱۳] (فصل ۵) مراجعه شود."

$$W^*(s)=(1-\rho)\,s\,B^*(s)/\left(s-\lambda(1-B^*(s))\right)$$

$$W^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dW(t) \tag{2}$$

به نحوی که λ نرخ فرایند پواسون ورودی به باجه M/G/1 و ρ ضریب بهره‌وری در باجه M/G/1 و $B^*(s)$ تبدیل لاپلاس ـ استیلتس تابع توزیع زمان سرویس باشد. حال با توجه به روابط زیر می‌توان میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم فوق را محاسبه نمود و معیارهای فوق را به شاخه اضافه شده در شبکه منتقل نمود و شبکه صف را به شبکه احتمالی تبدیل کرد.

$$\mu^*=-d/ds\ W^*(s)\ |_{s=0}$$
$$\sigma^{*2}=d^2/ds^2\ W^*(s)\ |_{s=0}-\mu^{*2} \tag{3}$$

ج ـ در گره‌های شبکه باجه‌های از نوع G/M/1 وجود داشته باشد.

وضعیت فوق هنگامی بروز می‌کند که در مسیر گذر از هر باجه خدمت دهی M/G/1 ، در گره‌های شبکه باجه خدمت‌دهی با یک خدمت‌دهنده و توزیع زمان سرویس نمایی وجود داشته باشد.

در حالتی که متقاضیان گره $u\in v$ با توزیع "G" را پشت سر می‌گذارند، باستنثای حالتی که بینهایت خدمت دهنده داریم، با این فرض که جریان ورودی به این گره پواسون با نرخ λ باشد جریان

خروجی از گره u و بالطبع جریان ورودی به گره‌هایی مانند $v \in V$ به نحوی که $(u,v) \in A$ باشند، پواسون نمی‌شود. با این وجود می‌توان تابع توزیع فواصل زمانی مابین دو عزیمت متوالی از گره u را با در نظر گرفتن این نکته که باجه فوق یک مدل M/G/1 می‌باشد به شرح زیر به دست آورد. فرض کنید $C(t)$ نمایانگر این تابع توزیع باشد و $B(t)$ نمایانگر تابع توزیع زمان سرویس و ρ ضریب بهره وری باجه M/G/1 فوق باشد. آنگاه نتیجه می‌شود:

$$C(t) = \rho B(t) + (1-\rho)\int_0^t B(t-u)\,\lambda\, e^{-\lambda u}\,du \tag{۴}$$

با دست داشتن $C(t)$ می‌توان $\lambda_u(t)$ "آهنگ خروج از گره u که همان تابع نرخ شکست توزیع فواصل زمانی ما بین دو عزیمت متوالی از گره u می‌باشد" را به فرم زیر به دست آورد:

$$\lambda_u(t) = \frac{C'(t)}{1-C(t)} \tag{۵}$$

بنابراین با توجه به این نکته که شبکه جریان انشعابی ندارد فرآیند خروجی از گره u از رشد مستقل برخوردار می‌باشد. بنابراین می‌توان فرآیند خروجی از گره u را یک فرآیند پواسون غیر همگن با تابع شدت $\lambda_u(t)$ فرض کرد. حال اگر از این گره با احتمال r به گره v از شبکه و با احتمال $1-r$ به سایر گره‌های شبکه برویم ثابت می‌کنیم نرخ جریان ورودی به گره v از گره u برابر $r\lambda_u(t)$ می‌شود.

فرض می‌کنیم $N_1(t)$ جریان ورودی از گره u به گره v و $N(t)$، کل جریان خروجی از گره u باشد. همچنانکه اشاره شد $N(t)$ از فرآیند پواسون غیر همگن با توزیع زیر تبعیت می‌نماید.

$$P[N(t)=m] = \frac{e^{-\int_0^t \lambda_u(s)\,ds}\left[\int_0^t \lambda_u(s)\,ds\right]^m}{m!} \qquad m \geq 0 \tag{۶}$$

قضیه ۱ : $N_1(t)$ از فرآیند پواسون غیر همگن با توزیع زیر تبعیت می‌کند:

$$P[N_1(t)=n] = \frac{e^{-\int_0^t r\lambda_u(s)\,ds}\left[\int_0^t r\lambda_u(s)\,ds\right]^n}{n!} \qquad n \geq 0 \tag{۷}$$

اثبات :

$$P[N_1(t)=n] = \sum_{m=n}^{\infty} P[N_1(t) = n/N(t)=m].P[N(t)=m]$$

$$P[N_1(t)=n\ /N(t)=m] = \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n}$$

$$P[N_1(t)=n] = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n} \frac{e^{-\int_0^t \lambda_u(s)\,ds}\left[\int_0^t \lambda_u(s)\,ds\right]^m}{m!}$$

$$P[N_1(t)=n] = \frac{r^n\left[\int_0^t \lambda_u(s)\,ds\right]^n}{n!}.e^{-\int_0^t \lambda_u(s)\,ds} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(1-r)^{m-n}\left[\int_0^t \lambda_u(s)\,ds\right]^{m-n}}{(m-n)!}$$

$$P[N_1(t)=n] = \frac{r^n\left[\int_0^t \lambda_u(s)\,ds\right]^n}{n!} e^{-\int_0^t \lambda_u(s)\,ds}.e^{(1-r)\int_0^t \lambda_u(s)\,ds}$$

$$P[N_1(t)=n] = \frac{e^{-\int_0^t r\lambda_u(s)\,ds}\left[\int_0^t r\lambda_u(s)\,ds\right]^n}{n!} \qquad n \geq 0 \tag{۸}$$

به همین منوال ثابت می‌شود نرخ جریان ورودی به هر گره $k \in V$ از شبکه در این مرحله از رابطه زیر تبعیت می‌نماید:

$$\lambda_k(t) = \sum_{j\in v} r_{jk}\,\lambda_j(t)$$
(۹)

چرا که توزیع زمانی فاصله بین دو ورود به گره k از گره‌هایی مانند $j\in V$ عبارت است از مینیموم چند متغیر تصادفی که هر یک نمایانگر توزیع زمانی فاصله بین دو ورود از یکی از گره‌های $j\in V$ به k می‌باشد. از آنجا که تابع نرخ شکست هر یک از این متغیرهای تصادفی برابر $r_{jk}\lambda_j(t)$ می‌باشد "چرا که فرآیند ورودی به گره k از گره j یک فرآیند پواسون غیر همگن با تابع شدت $r_{jk}\lambda_j(t)$ می‌باشد" بنابراین تابع نرخ شکست توزیع مینیموم این متغیرهای تصادفی که نمایانگر جریان ورودی به گره k می‌باشد برابر است با:

$$\lambda_k(t) = \sum_{j\in v} r_{jk}\,\lambda_j(t)$$
(۱۰)

لازم به ذکر است که در هر گره k با باجه خدمت‌دهی G/M/1 با داشتن $\lambda_k(t)$ "نرخ جریان ورودی به گره k" می‌توان $A(t)$ تابع توزیع زمان مابین دو ورد به گره k را به نحو زیر محاسبه نمود:

$$A(t) = 1 - e^{\left[-\int_0^t \lambda_k(u)\,du\right]}$$
(۱۱)

آنگاه با داشتن $A(t)$ می‌توان r_0 تنها ریشه بین صفر تا یک معادله

$$Z = \int_0^\infty e^{-\mu t(1-z)}\,dA(t) \qquad 0 < z < 1$$
(۱۲)

را با استفاده از یکی از روشهای عددی از قبیل روش نیوتون - رافسون تعیین نمود و با توجه به r_0 تابع چگالی زمان انتظار مشتری در سیستم در هر باجه G/M/1 را که تابعی از r_0 می‌باشد به قرار زیر محاسبه نمود:

$$w(t) = \mu(1-r_0)\,e^{-\mu(1-r_0)t} \qquad t>0$$
(۱۳)

بنابراین مشخص است که $w(t)$ توزیع نمایی با پارامتر $\mu(1-r_0)$ دارد و میانگین و واریانس آن به ترتیب برابر $(1/\mu(1-r_0))$, $(1/\mu(1-r_0))^2$ خواهد بود. حال می‌توان به ازای هر گره‌ای که در آن یک باجه خدمت‌دهی G/M/1 به شرح فوق وجود داشته باشد، یک شاخه برخوردار از دو معیار متناظر با میانگین و واریانس توزیع نمایی فوق به شبکه اضافه کرد و شبکه صف را به شبکه احتمالی تبدیل نمود.

مسئله بهترین مسیر دو معیار

یک مسیر π دنباله $(i_1, \dots, i_n)$ از دو یا بیشتر گره $(n\geq 2)$ است، به نحوی که $(i_k, i_{k+1})\in A$ برای $k= 1,2,\dots,n-1$ باشد. فرض کنید P مجموعه تمامی مسیرها در شبکه باشد. در این حالت برای هر گره j فرض کنید:

$$P(j) = \{\pi\in P \mid i_1 = 0, i_n = j\}$$
(۱۴)

مجموعه تمامی مسیرهای منتهی به گره j از گره ابتدایی باشد.

همچنین فرض کنید به ازای هر شاخه $(i,j)\in A$، یک بردار مقدار $l_{ij} = (l^1_{ij}, l^2_{ij}) \in R^2$ وجود داشته باشد به نحوی که مولفه‌های بردار فوق نشانگر مقادیر متناظر با میانگین و واریانس زمان طی شاخه فوق باشند. یک تابع مقداری مسیر $z: p\to R^2$ به هر مسیر $\pi\in p$ یک بردار مقداری مسیر به شکل زیر نسبت می‌دهد:

$$z(\pi) = l_{i_1 i_2}\; o \dots o\, l_{i_{n-1} i_n}$$
(۱۵)

به نحوی که o یک اپراتور دودویی روی R^2 می‌باشد. فرض کنید اپراتور فوق را به شکل زیر تجزیه کرد:

$$o = (o_1, o_2)$$

به نحوی که هر o_k یک اپراتور دودویی است که مشخص می‌کند چه مقدار به k امین معیار اضافه می‌شود. با توجه به معیارهای میانگین و واریانس مورد بحث، به ازای هر مسیر $\pi\in p$ داریم:

$$\mu(\pi) = \mu_{i_1 i_2} + \dots + \mu_{i_{n-1} i_n}$$

$$\sigma^2(\pi) = \sigma^2_{i_1 i_2} + \dots + \sigma^2_{i_{n-1} i_n}$$
(۱۶)

بنابراین واضح است که $o_1 = o_2 = +$ یعنی هر دو اپراتور از نوع جمع می‌باشند.

فرض کنید:

$$z(j) = \{z(\pi) \mid \pi\in p(j)\}$$
(۱۷)

مجموعه تمامی بردارهای مقادیر متناظر با تمامی مسیرهای منتهی به گره j از گره آغازین باشد. در این حالت فرض کنید $z(0) = \{z_0\}$، به نحوی که z_0 یک بردار خنثی با توجه به اپراتور o باشد، یعنی $z_0 o z_{ij} = z_{ij}$ به ازای تمامی شاخه‌های $(i,j)\in A$. در این حالت چون $o_1 = o_2 = +$ بنابراین هر دو جزء z_0 برابر صفر خواهند بود.

از آنجاکه دو معیار میانگین و واریانس طی مسیر با یکدیگر در تضاد میباشند، فرض کنید تابع مطلوبیت $u:R^2 \rightarrow R$ روی مجموعه بردارهای مقداری مسیر به شکل زیر تعریف شود:

$$u\ (\mu, \sigma^2) = \mu + \beta\sigma^2 \qquad (18)$$

به نحوی که β یک ضریب ثابت غیر منفی باشد. "برای جزئیات بیشتر در ارتباط با توابع مطلوبیت به Keeney , Raiffa [۱۴] مراجعه شود." در این حالت هدف مینیموم کردن u روی بردارهای مقداری تمامی مسیرها از گره اولیه به گره انتهایی میباشد، یا به عبارت دیگر با فرض انکه b گره انتهایی شبکه باشد خواهیم داشت:

$$\mathrm{MIN}\ f^* = u(z)$$
$$z \in z\ (b) \qquad (19)$$

رویکرد برنامه ریزی پویا

کاربردهای برنامه ریزی پویا جهت حل مسائل تصمیم گیری چند معیاره و برخوردار از یک تابع مطلوبیت مشخص در مقالات بسیاری مطرح شده است. اگر فرض یکنوایی برقرار باشد، استفاده از برنامه ریزی پویا، رسیدن به جواب بهینه را به کمک تابع برگشتی تضمین میکند. "برای جزئیات بیشتر به Bellman [۱۵] مراجعه شود."

یکنوایی بدین معنی است که جوابهای جزئی بهینه به کمک تابع برگشتی با توجه به تابع مطلوبیت مفروض به جواب بهینه نهایی منجر میشود. متاسفانه هنگام برخورد با تابع مطلوبیت چند معیاره، فرض یکنوایی به سختی قابل اثبات میباشد. بنابراین اطمینان از بهینگی جواب تولید شده بوسیله تابع برگشتی برنامه ریزی پویا، مشکل میباشد.

بر مبنای بسط روش رو به جلو برنامه ریزی پویای یک معیاره، یافتن مسیر بهینه به حل برگشتی مجموعه معادلات تابعی زیر منجر میشود:

$$f(0) = z_0$$
$$f(j) = \mathrm{MIN}\ u\ (z)$$
$$z \in \left\{ f(i)ol_{ij}\ \mid\ (i,j) \in A \right\} \qquad . j = 1, ..., b \qquad (20)$$

بنابراین برنامه ریزی پویا، در هر گره فقط با در نظر گرفتن مسیرهایی که نسبت به تابع مطلوبیت u بهینه میباشند، به جستجوی مسیر بهینه میپردازد.

در برنامه ریزی پویای یک معیاره، در صورتی که فرض یکنوایی برقرار باشد، حل مجموعه معادلات بالا منجر به یافتن مسیر بهینه میشود. در صورت وجود تابع مطلوبیت، فرض یکنوایی به صورت زیر بیان میشود:

$$u(z) \le u(\hat{z}) \Rightarrow u\ \left(zol_{ik} \right)\ \le$$
$$u\ \left(\hat{z}ol_{jk} \right) \qquad z, \hat{z} \in z(j) \qquad (21)$$

به ازای تمامی $j,\ k \in V$ به نحوی که $(j,k) \in A$ باشد. فرض فوق بدین معنی است که اگر بردار مقداری z به بردار مقداری $\hat{z}$ ترجیح داشته باشد، آنگاه هر بسطی از زیر مسیر به طول z به همان بسط از زیر مسیر به طول $\hat{z}$ ارجح است.

در ادامه ثابت میکنیم شبکه دو معیاره متناظر با مسئله شبکههای صف مطرح شده از فرض یکنوایی تبعیت میکند.

قضیه ۲: تابع مطلوبیت متناظر با دو معیار مینیموم میانگین مسیر (μ) و مینیموم واریانس مسیر (σ^2) در مسئله شبکههای صف مطرح شده، از فرض یکنوایی تبعیت میکند.

اثبات: با توجه به معیارها و تابع مطلوبیت ذکر شده بدون وارد شدن خللی بر کلیت مسئله میتوان فرض نمود.

$$u(z) = \mu + \beta\sigma^2$$
$$u(\hat{z}) = \hat{\mu} + \beta\hat{\sigma}^2$$
$$l_{jk} = \left(\mu_{jk}, \sigma^2_{jk} \right)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$u(zol_{jk}) = \mu + \mu_{jk} + \beta\sigma^2 + \beta\sigma^2_{jk}$$

$$u\ \left(\hat{z}ol_{jk} \right) = \hat{\mu} + \mu_{jk} + \beta\hat{\sigma}^2 + \beta\sigma^2_{jk}$$

بنابراین اگر داشته باشیم:

$$u\ (z) = \mu + \beta\sigma^2 \le \hat{\mu} + \beta\hat{\sigma}^2 = u(\hat{z})$$

آنگاه مشاهده میشود که

$$u\left(zol_{jk}\right) = \mu + \beta\sigma^{2} + \mu_{jk} + \beta\sigma_{jk}^{2} \leq$$

$$\hat{\mu}+\beta\hat{\sigma}^{2}+\mu_{jk}+\beta\sigma^{2}_{jk} = u\left(\hat{zol}_{jk}\right)$$

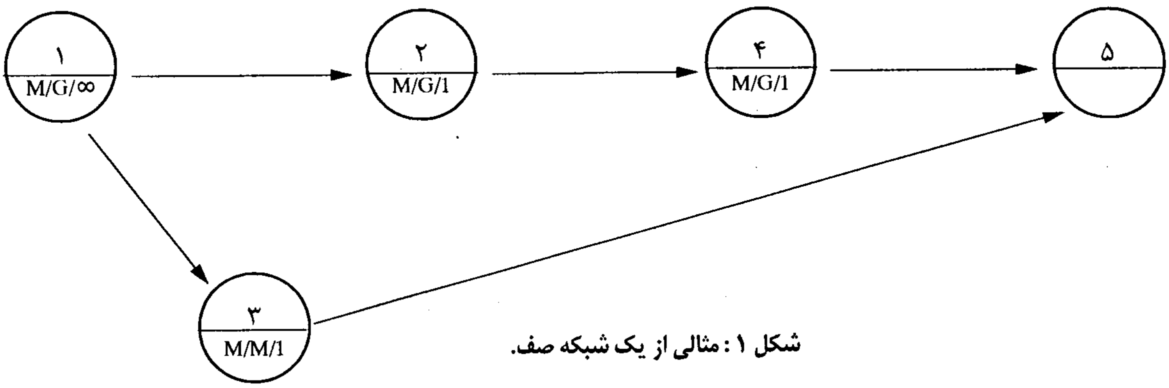
(۲۲)

چراکه در نامعادله اخیر فقط مقدار ثابت $C=\mu_{jk}+\beta\sigma^{2}_{jk}$ به دو طرف نامعادله قبلی افزوده شده است.

بنابراین مسئله شبکه‌های صف مورد نظر از فرض یکنوایی تبعیت می‌نماید و می‌توان از حل مجموعه معادلات اشاره شده ، مسیر بهینه را با توجه به تابع مطلوبیت ذکر شده پیدا نمود.

مثال عددی

شبکه صف شکل ۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱ : مثالی از یک شبکه صف.

فرضیات زیر در ارتباط با شبکه صف فوق در نظر گرفته می‌شوند:

۱ ـ مراجعین از خارج تنها به گره {۱} با فرایندی پواسون با میانگین ۰/۸ نفر در ساعت مراجعه می‌کنند. (λ=۰/۸).

۲ ـ در گره {۱} باجه خدمت دهی با بی نهایت خدمت دهنده و توزیع زمان سرویس نرمال با پارامترهای (μ,σ^{2})= (۱۰ و ۱) وجود دارد. $\left(\beta'(t) = N(10, 1)\right)$

۳ ـ در گره {۲} باجه خدمت دهی با یک خدمت دهنده و توزیع زمان سرویس گاما با پارامترهای (۱و۲= α,β) وجود دارد. $\left(\beta'(t) = te^{-t} \quad t>0\right)$

۴ ـ در گروه {۳} باجه خدمت دهی با یک خدمت دهنده و توزیع زمان سرویس نمایی با پارامتر (μ = ۰/۶) وجود دارد. $\left(\beta'(t) = .6e^{-.6t} \quad t>0\right)$

۵ ـ در گره {۴} باجه خدمت دهی با یک خدمت دهنده و توزیع زمان سرویس نمایی با پارامتر (μ = ۱) وجود دارد. $\left(\beta'(t) = e^{-t} \quad t>0\right)$

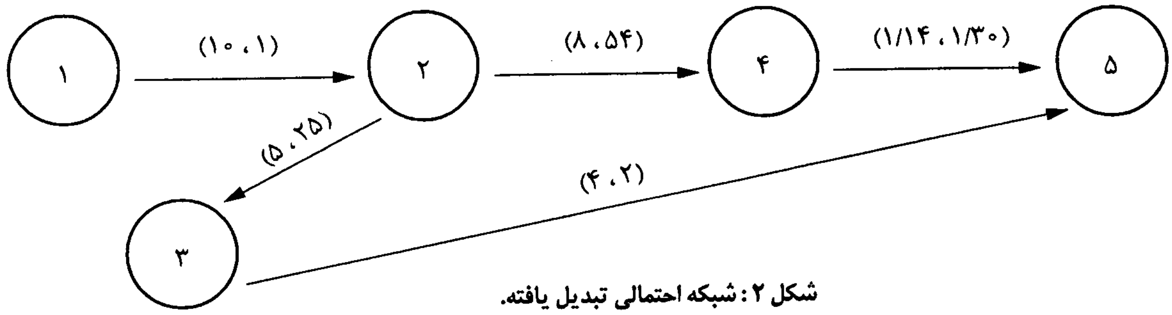
۶ ـ در گره {۵} باجه خدمت دهی وجود ندارد.

۷ ـ زمانهای گذر از شاخه‌های (۱،۲) و (۱،۳) و (۲،۴) و (۴،۵) برابر صفر می‌باشند، یعنی متقاضی به محض خدمت گیری در یکی از باجه‌های خدمت دهی مستقر در گره‌های {۱}و {۲}و {۴} بلافاصله به باجه خدمت دهی بعدی ملحق می‌شود.

۸ ـ زمان گذر از شاخه (۳،۵) نرمال با پارامترهای (۲و ۴) = (μ, σ^{2}) می‌باشد.

۹ ـ جریان ورودی به هر گره با احتمالات مساوی از شاخه‌های منشعب شده از گره فوق عبور می‌کند.

حال هدف انتخاب کوتاهترین مسیر از گره {۱} به گره {۵} در شبکه صف فوق می‌باشد. برای این منظور ابتدا شبکه صف فوق را با توجه به الگوریتم اشاره شده در بخش دوم به شبکه احتمالی شکل (۲) تبدیل می‌کنیم.



شکل ۲ : شبکه احتمالی تبدیل یافته.

در شبکه فوق توجه به نکات زیر حائز اهمیت است.

۱ ـ بردار متناظر با شاخه (۱،۲) نشانگر میانگین و واریانس زمان انتظار در سیستم در باجه $M/G/\infty$ مستقر در گره {۱} شبکه اولیه می‌باشد.

۲ ـ بردار متناظر با شاخه {۲،۴} نشانگر میانگین و واریانس زمان انتظار در سیستم در باجه M/G/1 مستقر در گره {۲} شبکه اولیه می‌باشد که با توجه به روابط زیر بدست می‌آید.

$$B^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, te^{-t}\, dt = 1/(1+s)^2$$

$$W^*(s) = .2/\left((1+s)^2 - .4s - .8\right)$$

$$\mu^* = -dW^*(s)/ds \,\big|_{s=0} = 8$$

$$\sigma^{*2} = d^2 W^*(s)/ds^2 \,\big|_{s=0} - \mu^{*2} = 118 - 64 = 54$$

(۲۳)

۳ ـ بردار متناظر با شاخه (۲،۳) نشانگر میانگین و واریانس زمان انتظار در سیستم در باجه M/M/1 مستقر در گره {۳} شبکه اولیه می‌باشد که با توجه به روابط زیر بدست می‌آید.

$$\mu^* = (1/\mu - \lambda) \qquad \mu = .6 \qquad \lambda = .4$$

$$\sigma^{*2} = (1/\mu - \lambda)^2$$

$$\mu^* = 5$$

$$\sigma^{*2} = 25$$

(۲۴)

۴ ـ بردار متناظر با شاخه (۴،۵) نشانگر میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم در باجه G/M/1 مســـر در گره {۴} شبکه اولیه می‌باشد که با توجه به روابط زیر بدست می‌آید. در این ارتباط لازم به ذکر است که با توجه به آنکه متقاضی بلافاصله بعد از عبور از گره {۲} در شبکه اولیه به گره {۴} ملحق می‌شود، چگالی فواصل زمانی مابین هر دو عزیمت از گره {۲} "$C'(t)$" برابر چگالی فواصل زمانی مابین دو ورود به گره {۴} "$A'(t)$" خواهد بود.

$$A'(t) = \rho B'(t) + (1-\rho)\int_0^t B'(t-u)\lambda e^{-\lambda u}\, du$$

$$B'(t) = te^{-t} \qquad \lambda = .4 \qquad \rho = .8$$

$$A'(t) = .8te^{-t} + .08\int_0^t (t-u)e^{-(t-u)}e^{-.4u}\, du$$

(۲۵)

پس از انتگرال گیری جزء به جزء حاصل می‌شود:

$$A'(t) = .67\, te^{-t} + .22e^{-.4t} - .22e^{-t}$$

(۲۶)

حال با داشتن $A'(t)$ و همچنین اطلاع از آنکه نرخ سرویس دهی در باجه G/M/1 فوق برابر ۱ می‌باشد می‌توان r_0 را از معادله زیر تعیین کرد:

$$z = \int_0^\infty e^{-t(1-z)}\left(.67te^{-t} + .22e^{-.4t} - .22e^{-t}\right) dt$$

$$0 < z < 1$$

(۲۷)

پس از انتگرال گیری جزء به جزء حاصل می‌شود:

$$z = .67/(2-z)^2 + .22/(1.4-z) - .22/(2-z)$$

(۲۸)

جواب معادله غیر خطی فوق با استفاده از روش نیوتون-رافسون بدست می‌آید و در نهایت ثابت می‌شود:

$$z = .1225$$

حال با توجه به مطالب مطرح شده در باجه‌های G/M/1 ثابت می‌شود میانگین و واریانس زمان انتظار در سیستم در باجه صف G/M/1 مورد اشاره از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\mu^* = 1/\mu\,(1-r_0) \qquad \mu = 1 \qquad r_0 = .1225$$

$$\sigma^{*2} = \left(1/\mu\,(1-r_0)\right)^2$$

$$\mu^* = 1.14$$

$$\sigma^{*2} = 1.30$$

(۲۹)

۵ ـ بردار متناظر با شاخه (۳،۵) نشانگر میانگین و واریانس زمان گذر از شاخه (۳،۵) در شبکه اولیه می‌باشد.

فرض کنید تابع مطلوبیت مورد نظر به فرم زیر باشد:

$$u(\mu, \sigma^2) = \mu + .2\sigma^2$$

(۳۰)

جدول (۱) خلاصه نتایج حاصل از یافتن بهترین مقدار مسیر "$f_*(j)$" و مقدار تابع مطلوبیت متناظر و بهترین تصمیم "گره ما قبل" یا $i^*(j)$ را به ازای هر گره j با استفاده از الگوریتم اشاره شده در بخش چهارم بر مبنای معادلات برگشتی رو به جلوی برنامه‌ریزی

پویا نشان می‌دهد.

جدول ۱ : نتایج مثال عددی.

$i^*(j)$	u(f)	f(j)	گره j
ـ	۰	(۰،۰)	۱
۱	۱۰/۲	(۱۰،۱)	۲
۲	۲۰/۲	(۱۵،۲۶)	۳
۲	۲۹	(۱۸،۵۵)	۴
۳	۲۴/۶	(۱۹،۲۸)	۵

بنابراین مسیر بهینه در شبکه جدید مسیر ۵ ـ ۳ ـ ۲ ـ ۱ و متناظراً در شبکه اولیه مسیر ۵ ـ ۳ـ ۱ می‌باشد که یک مسیر کارا نیز می‌باشد چرا که در هر دو معیار نسبت به دومین مسیر در شبکه ارجح است. میانگین و واریانس زمان گذر از مسیر فوق نیز عبارتند از:

$$\overset{*}{\mu} = ۱۹$$
$$\overset{*}{\sigma} = ۲۸$$

(۳۱)

نتیجه گیری

در مقاله ارائه شده الگوریتمی بر مبنای نظریه صف، برنامه‌ریزی پویا، نظریه گراف و همچنین نظریه تصمیم گیری چند معیاره جهت انتخاب کوتاهترین مسیر از گره ابتدایی به گره انتهایی در شبکه‌های صف، به نحوی که در گره‌های شبکه باجه‌های خدمت‌دهی با یک یا بی نهایت خدمت دهنده وجود داشته باشد و همچنین زمانهای گذر از شاخه‌های مابین هر دو باجه صف مستقر در دو گره شبکه مفروض، متغیرهای تصادفی مستقل و برخوردار از توزیع عمومی باشند، ارائه گردید.

همچنین در مدل دو معیاره فوق با توجه به اثبات فرض یکنوایی، ثابت گردید جوابهای جزئی بهینه به کمک تابع برگشتی، با توجه به تابع مطلوبیت مفروض ، به جواب بهینه‌نهایی منجر می‌گردد. بنابراین می‌توان از روش برنامه‌ریزی پویا جهت انتخاب کوتاهترین مسیر در شبکه صف استفاده نمود.

در این ارتباط توجه به دو نکته زیر حائز اهمیت است:

۱ـ در صورت وجود باجه‌های موازی از قبیل G/M/C,M/M/C در شبکه نیز با توجه به آنکه توزیع زمان انتظار مشتری در سیستم در هر یک از باجه‌های فوق در دسترس می‌باشند. «برای توضیح بیشتر به Harris, Gross [۱۳] (فصل ۵) مراجعه شود.» می‌توان با کمک الگوریتم اشاره شده اما با کمی دردسر بیشتر در ارتباط با محاسبه میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم در صفهای فوق الذکر، کوتاهترین مسیر در شبکه صف را انتخاب نمود.

۲ـ از آنجاکه فرایند خروجی از هر گره شبکه صف برخوردار از توزیع زمان سرویس عمومی پواسون نمی‌شود، باید در تمامی گره‌های شبکه که با حداقل یک مسیر به این قبیل گره‌ها متصل می‌باشند، توزیع زمان سرویس ، در صورت ارائه خدمت ، نمایی باشد، چرا که در غیر اینصورت در شبکه، با باجه‌های صف G/G/C مواجه خواهیم شد که بدست آوردن میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در سیستم در صفهای فوق الذکر امکان پذیر نمی‌باشد.

مراجع

1 - Bazaraa, M., Jarvis, K. and Sherali, H. (1990). *Linear programming and network flows.* J. Wiley.

2 - Deo, N. and Pang, C. (1984). "Shortest path algorithms: taxonomy and annotation." *Networks,* Vol. 14, PP. 275-323.

3 - Martin, J. (1965). "Distribution of time through a directed acyclic network." *Operations Res.,* Vol. 13, PP. 46-66.

4 - Frank, J. (1969). "Shortest paths in probabilistic graphs." *Operations Res.,* Vol. 17, PP. 583-599.

5 - Mirchandani, P. (1976). "Shortest distance and reliability of probabilistic networks." *Comput. Operations Res.,* Vol. 3, PP. 347-355.

6 - Kulkarni, V. (1986). "Shortest paths in networks with exponentially distributed arc lengths." *Networks,* Vol. 16, PP. 255-274.

7 - Lee, H. and Pulat, S.(1991). "Bicriteria network flow problems : continuous case ." *European Journal of Operational Res.,* Vol. 51, PP. 119-126.

8 - Martins, E. (1984). "On a multi- criteria shortest path problem." *European Journal of Operational Res.,* Vol. 16, PP. 236-245.

9 - Current, J. and Min, H. (1986). "Multiobjective design of transportation networks: taxonomy and annotation." *European Journal of Operational Res.,* Vol. 26, PP. 187-201.

10 - Wijerante, A., Turnquist, M. and Mirchadani, P. (1993). "Multiobjective routing of hazardous materials in stochastic networks." *European Journal of Operational Res.,* Vol. 65, PP. 33-43.

11 - Carraway, R., Morin, T. and Moskowitz, H. (1990). "Generallized dynamic programming for multicriteria optimization." *European Journal of Operational Res.,* Vol. 44, PP. 95-104.

12 - Bondy, J. and Murty, U. (1976). *Graph theory with applications*. Elsevier.

13 - Gross, D. and Harris, M. (1985). *Fundamentals of queueing theory.* J. Wiley.

14 - Keeney, R. and Raiffa, H. (1976). *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs.* J. Wiley.

15 - Bellman, R. (1957). *Dynamic programming.* Princeton University Press.