

# تحلیل شبکه کابل‌های الاستیک تحت بار گسترده با روش Dynamic Relaxation

امید توفیقی

دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

علی اصغر عطائی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۰/۳/۱۲، تاریخ تصویب ۸۰/۸/۱۹)

## چکیده

استفاده از کابلها در سازه‌های مهندسی همواره مورد توجه مهندسان بوده است. کابلها درحالیکه از مقاومت بالایی برخوردارند، دارای وزن کم، هزینه پایین و انعطاف پذیری بالایی هستند و به همین جهت هر جا که شرایط کاری اجازه دهد، به عنوان یک گزینه مقرون به صرفه و بهینه، مطرح می‌باشند. از موارد استفاده کابلها در صنعت به عنوان مثال می‌توان به پلهای معلق، کابل‌های مهارکننده دکلها و خطوط انتقال نیرو، سقفهای معلق، تله کابین و ... اشاره کرد. در این مقاله با مینیمم سازی انرژی پتانسیل تغییر شکل یک کابل و تعمیم آن برای شبکه کابل، شرایط لازم برای تعادل بدست آمده است و پس از تعیین معادلات مربوط به بار گسترده، با معرفی روش "Dynamic Relaxation" تحلیل شبکه کابل انجام پذیرفته است. سپس با حل چند مثال صحت روش فوق نشان داده شده است و در ادامه برای نشان دادن چگونگی عملکرد این روش، تعدادی مثال از شبکه کابل‌های تحت بار گسترده بررسی شده است.

**واژه های کلیدی:** تعادل، شبکه کابل، الاستیک، بار گسترده، انرژی پتانسیل، حساب تغییرات روش عددی

## مقدمه

هندسه غیر خطی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد روش نیوتن - رافسون است ولی مشکلی که در این روش وجود دارد احتمال نامعین شدن ماتریس سختی است [۴]. روشهای افزایشی تدریجی در مورد سازه‌هایی با هندسه و رفتار ماده غیر خطی، بکار برده می‌شوند. در این روش‌ها، بار گذاری و جابجاییهای تعیین شده، توابعی از متغیرهای زمانی فرض می‌شوند و سپس دامنه زمان به بخشهای کوچکی تقسیم می‌شود که با این کار معادلات به فرم خطی درآمده و در این فواصل دستگاه معادلات خطی حل می‌شوند.

در روشهای مینیمم سازی مسئله، تبدیل به یک مسئله بهینه سازی شده و مینیمم مطلق انرژی پتانسیل بدست می‌آید. یکی از روشهایی که در اغلب موارد برای حل مسائل غیرخطی و از جمله شبکه کابلها

یکی از مشکلاتی که در بررسی رفتار کابل‌های بار گذاری شده، با آن مواجه می‌شویم رفتار غیر خطی ماده تشکیل دهنده کابل است با وجود این حتی اگر ماده بکار رفته را بتوان الاستیک خطی فرض کرد رابطه نیرو - جابجایی به علت تغییرات در هندسه المان بار گذاری شده، همچنان بصورت غیر خطی خواهد بود. به همین جهت همواره در تحلیل شبکه کابلها با دستگاه معادلات غیر خطی روبرو هستیم. برای حل چنین معادلاتی روشهای گوناگون عددی وجود دارد که این روشها را به سه گروه کلی می‌توان طبقه بندی کرد [۳]:

۱ - روشهای تکراری

۲ - روشهای افزایشی مرحله‌ای

۳ - روشهای مینیمم سازی و Relaxation

در میان روشهای تکراری، روشی که برای حل مسائل با

در شکل فوق حروف و علائم نشان داده شده به صورت زیر می‌باشند :

$\underline{e}_i$  ( $i=1,2,3$ ) بردارهای یکه عمود، در دستگاه مختصات مرجع می‌باشند.

$S$  طول اولیه کابل است که در محدوده  $[0,L]$  تغییر می‌کند.

$s(S)$  طول تغییر شکل یافته کابل است.

$\underline{x}(S)$  بردار موقعیت یک نقطه روی کابل در حالت اولیه در دستگاه مختصات مرجع است.

$\underline{x}(s) = \underline{x}(s(S)) = \underline{x}(S)$  بردار موقعیت یک نقطه

روی کابل تغییر شکل پیدا کرده، در دستگاه مختصات مرجع می‌باشد.

□ بردار یکه مماس بر کابل در وضعیت اولیه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\underline{L}(S) = \frac{d\underline{x}(S)}{dS} \quad (1)$$

به طور مشابه در وضعیت تغییر شکل یافته بردار مماس بر کابل برابر است با :

$$\underline{\ell}(s) = \frac{d\underline{\hat{x}}(s)}{ds} \quad (2)$$

در نتیجه گرادیان تغییر شکل به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\frac{d\underline{x}(S)}{dS} = \frac{d\underline{\hat{x}}(s)}{ds} = \frac{d\underline{\hat{x}}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dS} \quad (3)$$

و یا می‌توان نوشت :

$$\frac{d\underline{x}(S)}{dS} = \lambda \underline{\ell} \quad (4)$$

$$\lambda(S) = \frac{ds}{dS} = \left| \frac{d\underline{x}(S)}{dS} \right| \quad (5)$$

در بالا  $\lambda$  کشیدگی کابل است و می‌توان ملاحظه کرد که در حالتی که کابل بدون کشش باشد  $\lambda(S)=1$  است. از این به بعد هر جا که مشتق نسبت به طول اولیه کابل داریم، از علامت (') استفاده می‌کنیم.

اگر انرژی کرنش در واحد طول اولیه کابل را به صورت  $W(x'(S))$  فرض کنیم و جابجایی کابل را به صورت

مورد استفاده قرار می‌گیرد روش " آرام سازی دینامیکی" (D.R.) است. در این روش جرم و میرا کننده مجازی به سازه افزوده شده و پاسخ دینامیکی محاسبه می‌شود که حالت پایدار این پاسخ دینامیکی همان جواب مورد نظر است.

در این مقاله پس از بدست آوردن شرایط لازم برای تعادل یک شبکه کابل، فرمولهای مربوط به بار گذاری گسترده تعیین شده و سپس با حل مثالهایی صحت عملیات نشان داده شده است.

فرضیاتی که در اینجا در نظر گرفته می‌شوند عبارتند از :

۱- نیروها به صورت بار گرهی در گره‌ها و بار گسترده یکنواخت در طول کابل وارد می‌شوند.

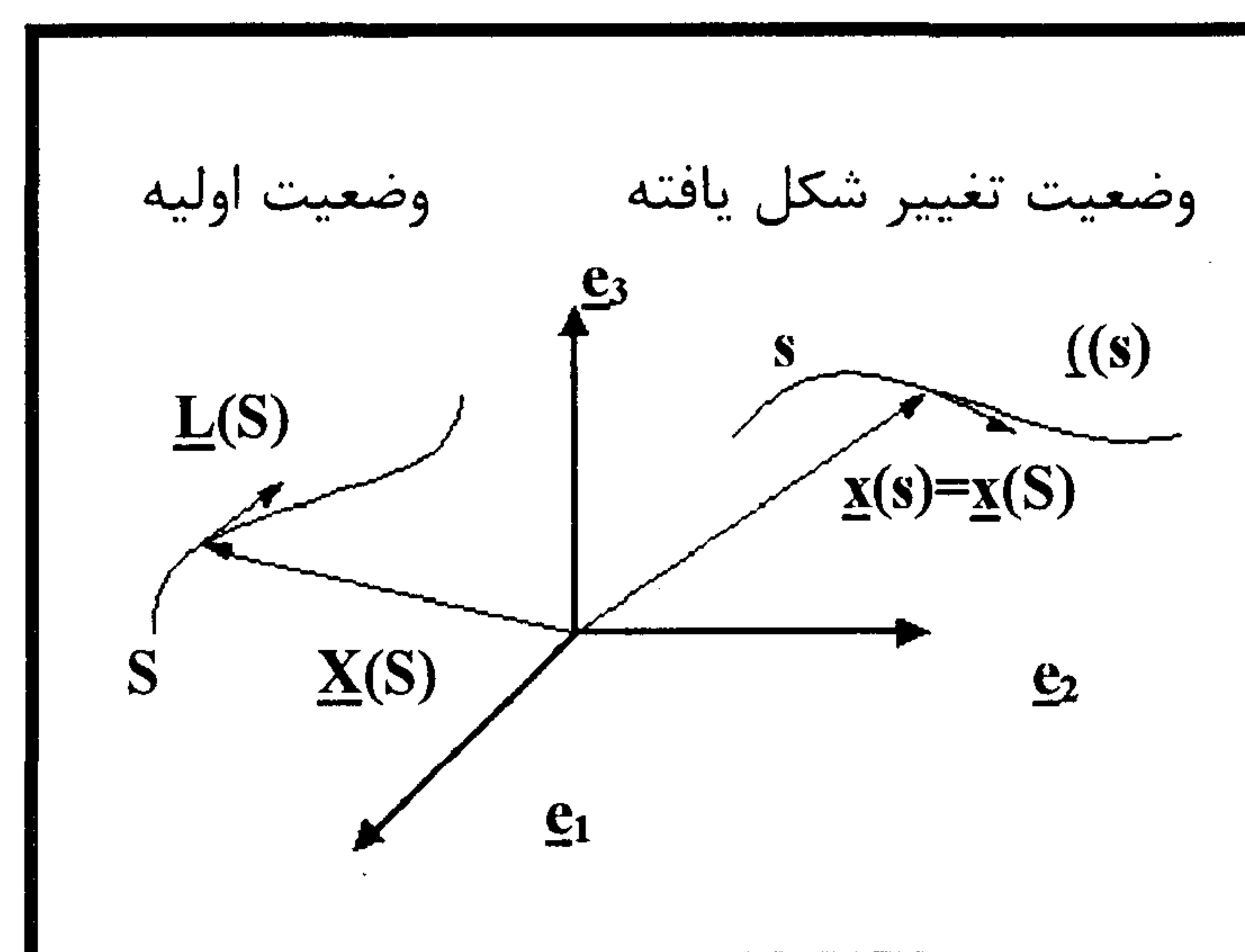
۲- مفاصل (گره‌ها) بصورت پین و بدون اصطکاک در نظر گرفته می‌شوند.

۳- از سختی خمشی صرفنظر می‌شود.

با فرضیات بالا خطای موجود در نتایج، برابر خطای گرد کردن اعداد تا تعداد اعشار دلخواه است زیرا فرمولها بصورت تحلیلی بدست آمده و در آنها تقریب بکار نرفته است.

## تئوری کابلهای الاستیک

کابلی با طول اولیه (طول آزاد)  $L$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در فضای ۳ بعدی تغییر شکلی به صورت زیر پیدا کند (شکل ۱).



شکل ۱ : کابلی که یک تغییر شکل کلی پیدا کرده است.

$$E[\underline{x}] = \int_0^L (W - \underline{a} \cdot \underline{x}) dS - [F_L \cdot \underline{x}(L) + F_0 \cdot \underline{x}(0)] \quad (14)$$

اگر انرژی کرنش  $W$  را در حالتی که جابجایی کوچکی  $(\underline{x}(S) \rightarrow \underline{x}(s) + \varepsilon \underline{u}(S))$  به آن اعمال شده، برحسب بسط دهیم:

$$\begin{aligned} W((\underline{x} + \varepsilon \underline{u})') &= W(\underline{x}') + \varepsilon u'_i \left. \frac{\partial W}{\partial x'_i} \right|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u'_i u'_j \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial x'_j} \right|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) \\ &= W(\underline{x}') + \varepsilon \underline{u}' \cdot \underline{t} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \underline{u}' \cdot \underline{C}(\underline{x}') \underline{u}' + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (15)$$

که تانسور  $\underline{C}$  به این صورت تعریف می شود:

$$\underline{C}(\underline{x}') = \left( \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial x'_j} \right|_{\varepsilon=0} \right) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{C}^T(\underline{x}') \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) می توانیم بنویسیم:

$$\underline{C} = \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \underline{\ell} \otimes \underline{\ell} + \lambda^{-1} f(\lambda) (\underline{I} - \underline{\ell} \otimes \underline{\ell}) \quad (17)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل برای حالتی که جابجایی کوچکی به کابل داده شده است را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \int_0^L [W(\underline{x}') - \underline{a} \cdot \underline{x}] dS \\ &\quad + \varepsilon \int_0^L (\underline{t} \cdot \underline{u}' - \underline{a} \cdot \underline{u}) dS \\ &\quad - [F_L \cdot \underline{x}(L) + F_0 \cdot \underline{x}(0)] \\ &\quad - \varepsilon [F_L \cdot \underline{u}(L) + F_0 \cdot \underline{u}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^L \underline{u}' \cdot \underline{C}(\underline{x}') \underline{u}' dS + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (18)$$

اگر  $\underline{x}$  وضعیتی باشد که انرژی پتانسیل را مینیمم کند در این صورت باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (19)$$

و یا

$$\int_0^L (\underline{t} \cdot \underline{u}' - \underline{a} \cdot \underline{u}) dS - [F_L \cdot \underline{u}(L) + F_0 \cdot \underline{u}(0)] = 0$$

با انتگرال گیری به روش جزء به جزء به شرایط مرزی زیر خواهیم رسید:

زیر در نظر بگیریم:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{Q} \underline{x} + \underline{C} \quad (6)$$

که در آن  $Q$  یک تانسور دوران ثابت و  $\underline{C}$  یک بردار انتقال ثابت است، در این صورت می توانیم انرژی تغییر شکل کابل را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$W((\underline{Q} \underline{x} + \underline{C})') = W(\underline{Q} \underline{x}') = W(\underline{x}') \quad (7)$$

$$W(\underline{x}'(S)) = w(|\underline{x}'(S)|) = w(\lambda) \quad (8)$$

حال بردار  $\underline{t}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\underline{t} = \frac{\partial W}{\partial x'_i} \underline{e}_i \quad (9)$$

با ترکیب دو رابطه (۸) و (۹) به رابطه زیر که معرف نیروی اعمال شده به کابل است می رسیم:

$$t_i = \frac{\partial W}{\partial x'_i} = \frac{dw(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} \quad (10)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} = \lambda^{-1} x'_i \quad (11)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} t_i &= \lambda^{-1} \frac{dw(\lambda)}{d\lambda} x'_i \\ &= \lambda^{-1} f(\lambda) x'_i \end{aligned} \quad (12)$$

از ترکیب دو رابطه (۴) و (۱۲) می توان نوشت:

$$\underline{t}(S) = \lambda^{-1} f(\lambda) \underline{x}'(s) = f(\lambda) \underline{\ell} \quad (13)$$

رابطه فوق نشانگر این است که  $\underline{t}(S)$  نیروی اعمال شده توسط قسمت  $[S, L]$ ، به قسمت  $[0, S]$  از کابل می باشد.

حال کابلی را که تحت بار گسترده ساکن (مرده) با چگالی  $a(S)$  در واحد طول و بارهای متمرکز  $F_L$  و  $F_0$  در نقاط متناظر با  $S = L$  و  $S = 0$  قرار دارد در نظر می گیریم. کل انرژی پتانسیل کابلی با موقعیت  $(S, \underline{x})$  برابر است با مجموع انرژی کرنش و انرژی پتانسیل بارگذاری خارجی، یعنی:



ساکن با مقدار  $q_k, k \in K$  قرار گرفته باشد (که برخی از  $q$  ها می توانند صفر باشند) به این ترتیب نقاط شروع و انتهای کابلها را به صورت زیر می توان نشان داد :

$$\begin{cases} I^k = \{ j : S_j = 0 & k \in K \} \\ E^k = \{ j : S_j = L_j & k \in K \} \\ I^h = \{ j : S_j = 0 & h \in H \} \\ E^h = \{ j : S_j = L_j & h \in H \} \end{cases} \quad (22)$$

وضعیت تغییر شکل یافته کابل  $j$  ام، با بردار موقعیت  $\underline{x}_j(S_j)$  بیان می شود که در آن  $S_j$  در محدوده  $[0, L_j]$  روی طول تغییر شکل نیافته (طول اولیه) کابل تغییر می کند. با تعریف  $\underline{x}_j^0 = \underline{x}_j(0)$  و  $\underline{x}_j^L = \underline{x}_j(L_j)$  و با توجه به رابطه (۲۲) می توانیم بنویسیم :

$$\begin{cases} \underline{x}_j^0 = \underline{y}_k & , j \in I^k \\ \underline{x}_j^L = \underline{y}_k & , j \in E^k \end{cases} \quad (23)$$

و برای گره های مقید رابطه (۲۴) برقرار است :

$$\begin{cases} \underline{x}_j^0 = \underline{z}_h & , j \in I^h \\ \underline{x}_j^L = \underline{z}_h & , j \in E^h \end{cases} \quad (24)$$

اگر فرض کنیم که کابل  $j$  ام تحت بار گسترده ساکن با شدت  $a_j$  قرار گرفته باشد، انرژی پتانسیل شبکه را می توان به صورت زیر نوشت :

$$E = \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} (\underline{W} - \underline{a}_j \cdot \underline{x}_j) dS - \sum_{k=1}^l q_k \cdot \underline{y}_k \quad (25)$$

حال برای اینکه به وضعیت تعادل دست یابیم، باید  $E$  را مینیمم کنیم. با استفاده از رابطه (۲۳)، فانکسیونل نامقید زیر را مینیمم می کنیم :

$$E^* = E - \sum_k \left\{ \sum_{j \in I^k} \underline{F}_j^0 \cdot (\underline{x}_j^0 - \underline{y}_k) + \sum_{j \in E^k} \underline{F}_j^L \cdot (\underline{x}_j^L - \underline{y}_k) \right\} \quad (26)$$

که در آن  $\underline{F}_j^0$  و  $\underline{F}_j^L$  ضرایب لاگرانژ هستند. با ادامه روندی که قبلا برای یک کابل منفرد انجام پذیرفت، شرایط تعادل به صورت زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} \underline{t}' + \underline{a} = 0 \\ \underline{t}(0) = -\underline{F}_0 \\ \underline{t}(L) = \underline{F}_L \end{cases} \quad (20)$$

شرط دیگری که لازم است تا  $\underline{x}$  مقدار  $\underline{E}$  را مینیمم کند به صورت زیر است :

$$\frac{d^2 F}{d \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^L \underline{u}' \cdot \underline{C}(\underline{x}') \underline{u}' dS \geq 0 \quad (21)$$

برای اینکه رابطه فوق به ازای همه مقادیر  $\underline{u}$  که شرایط مرزی متغیر را ارضاء می کنند، صادق باشد باید مقادیر ویژه تانسور  $\underline{C}$  نامنفی بوده و  $\underline{C}$  یک تانسور مثبت نیمه معین باشد. به این ترتیب باید شرایط لازم "Weierstrass" برقرار باشد یعنی :

$$f(\lambda) \geq 0 \quad \forall S \in [0, L] \quad (\text{الف})$$

یا به عبارت دیگر تمام کابلها تحت کشش باشند.

$$w(\mu) - w(\lambda) \geq f(\lambda) (\mu - \lambda) \quad \forall \mu \quad (\text{ب})$$

و یا  $\lambda$  یک نقطه از تحدب تابع انرژی کرنش  $w(\lambda)$  باشد. بنابراین اگر رابطه (۲۰) و شرایط فوق (شرایط لازم ویرستراس) برقرار باشد، کابل در حالت تعادل و پایدار خواهد بود. حال با تعمیم روابط فوق، معادلات تعادل برای یک شبکه را بدست می آوریم.

### بسط تئوری برای حالت کلی شبکه کابل

شبکه ای شامل  $n$  کابل را در نظر می گیریم که طول هر کدام از کابلها در حالت کشیده نشده برابر  $L_j ; j = 1, \dots, n$  است. حال با نامگذاری مجموعه گره های مقید، به نام  $H$  و مجموعه گره های نامقید، به نام  $K$  فرض می کنیم که  $m$  گره مقید مربوط به مجموعه  $H$ ، با موقعیتهای از پیش تعیین شده  $\underline{z}_h ; h = 1, \dots, m$  داشته باشیم و  $l$  گره نامقید مربوط به مجموعه  $K$  با موقعیتهای مجهول  $\underline{y}_k ; k = 1, \dots, l$  داشته باشیم. همچنین فرض می کنیم روی هر گره نامقید، یک بار

حال اگر نیرویی که به ابتدای کابل (نقطه  $S = 0$ ) وارد می شود را با  $\underline{F}_0$  - نشان دهیم، با توجه به رابطه (۳۲) داریم:

$$\underline{t} = -\underline{a}S - \underline{F}_0 \quad (33)$$

با در نظر گرفتن مؤلفه بردار های  $\underline{a}$  و  $\underline{F}_0$  به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \\ \underline{F}_0 &= (f_1 \underline{i} + f_2 \underline{j} + f_3 \underline{k}) \end{aligned} \quad (34)$$

اگر از دو طرف رابطه (۳۳) قدرمطلق بگیریم به رابطه زیر می رسیم:

$$|t| = \sqrt{AS^2 + 2BS + C} \quad (35)$$

که در آن مقادیر  $A, B, C$  برابر است با:

$$\begin{cases} A = \underline{a} \cdot \underline{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ B = \underline{a} \cdot \underline{f}_0 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \\ C = \underline{f}_0 \cdot \underline{f}_0 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \end{cases} \quad (36)$$

حال با این فرض که کابل را الاستیک خطی در نظر بگیریم، داریم:

$$f(\lambda) = EA(\lambda - 1) \quad (37)$$

اگر از دو طرف رابطه (۳۷) قدر مطلق بگیریم به رابطه زیر می رسیم:

$$|t| = |f(\lambda)| \quad (38)$$

با جایگذاری رابطه (۳۵) و (۳۷) در رابطه بالا داریم:

$$EA(\lambda - 1) = \sqrt{AS^2 + 2BS + C} \quad (39)$$

و در نتیجه:

$$\lambda = 1 + \frac{\sqrt{AS^2 + 2BS + C}}{EA} \quad (40)$$

با تغییر شکل معادله (۳۹) به صورت زیر:

$$\underline{X}' = \frac{\lambda}{f(\lambda)} \underline{t} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \underline{t}'_j + \underline{a}_j = \underline{0} & j = 1, \dots, n \\ \underline{F}_j^0 = -\underline{t}_j^0 & j \in I^k \\ \underline{F}_j^L = \underline{t}_j^L & j \in E^k \end{cases} \quad (27)$$

و معادله تعادل در گره ها نیز به صورت زیر می شود:

$$\sum_{j \in I^k} \underline{F}_j^0 + \sum_{j \in E^k} \underline{F}_j^L = \underline{q}_k, \quad k \in K \quad (28)$$

بار دیگر اگر در اینجا  $\underline{a}_j = \underline{0}$  باشد، از رابطه (۲۷) دیده می شود که  $\underline{t}'_j = \underline{0}; j = 1, \dots, n$  و کابل های تحت کشش، در کل تحلیل به صورت مستقیم باقی می ماند. با استفاده از رابطه (۲۷)، رابطه تعادل در گره ها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$-\sum_{j \in I^k} \underline{t}_j^0 + \sum_{j \in E^k} \underline{t}_j^L = \underline{q}_k, \quad k \in K \quad (29)$$

معادله فوق یک دستگاه معادلات غیر خطی ارائه می دهد که باید برای بردارهای مجهول موقعیت  $\underline{y}_k; k = 1, \dots, \ell$  حل شود.

پس می توان نتیجه گرفت که اگر شرایط لازم (و کافی) "Weierstrass" برای هر کابل در شبکه برقرار باشد، انرژی پتانسیل برای هر کابل و در نتیجه انرژی پتانسیل کل شبکه کابل مینیمم می شود و وضعیت تعادل پایدار بدست می آید.

### معادلات تعادل برای شبکه تحت بار گسترده

از معادله (۲۷) قسمت قبل داریم:

$$\underline{t}' + \underline{a} = \underline{0} \quad (30)$$

با فرض وجود بار گسترده ( $\underline{a} \neq \underline{0}$ ) از رابطه بالا بدست می آید:

$$\underline{t}' = -\underline{a} \quad (31)$$

و اگر از دو طرف این رابطه انتگرال بگیریم داشت:

$$\underline{t} = -\underline{a}S + \underline{t}_0 \quad (32)$$



همان جوابی است که به دنبال آن هستیم. (در حالت یک بعدی مشابه مثال جرم و فنر خواهد بود.)

به منظور حل رابطه (۴۵) برای یک بردار  $\underline{F}$  ثابت، آن رابطه را برای بازه  $n$  ام زمانی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}^n + \underline{C} \dot{\underline{x}}^n + \underline{K} \underline{x}^n = \underline{F} \quad (46)$$

با استفاده از روش تفاضل محدود (از نوع تفاضل محدود مرکزی) داریم:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\underline{x}^n - \underline{x}^{n-1}}{h} \\ \ddot{\underline{x}}^n = \frac{\dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\underline{x}}^{n-\frac{1}{2}}}{h} \end{cases} \quad (47)$$

که در آن  $h$  مقدار ثابت افزایش زمان است. از طرف دیگر حاصل  $\dot{\underline{x}}^n$  با میانگین گیری برابر است با:

$$\dot{\underline{x}}^n = \frac{\dot{\underline{x}}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (48)$$

با جایگذاری روابط (۴۷) و (۴۸) در رابطه (۴۶)، فرمول تکرار زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{h} \underline{M} + \frac{1}{2} \underline{C} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{1}{h} \underline{M} - \frac{1}{2} \underline{C} \right) \dot{\underline{x}}^{n-\frac{1}{2}} + (\underline{F} - \underline{K} \underline{x}^n) \right] \\ \underline{x}^{n+1} = \underline{x}^n + h \dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (49)$$

در روش DR فرض می‌کنیم که ماتریس  $\underline{C}$  متناسب با ماتریس  $\underline{M}$  باشد یعنی:

$$\underline{C} = c \underline{M} \quad (50)$$

که  $c$  مقدار ثابتی است با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۴۹) داریم:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{2-c h}{2+c h} \right) \dot{\underline{x}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2h}{2+c h} \underline{M}^{-1} (\underline{F} - \underline{K} \underline{x}^n) \\ \underline{x}^{n+1} = \underline{x}^n + h \dot{\underline{x}}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (51)$$

شرایط اولیه DR به صورت زیر است:

و جاگذاری مقادیر  $\lambda$  و  $f(\lambda)$  در آن به رابطه بعد می‌رسیم:

$$\frac{d\underline{X}}{dS} = \frac{EA + \sqrt{AS^2 + 2BS + C}}{EA \sqrt{AS^2 + 2BS + C}} (-aS - f_0) \quad (42)$$

اکنون از رابطه بالا در فاصله  $[0, L]$  انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \underline{X}(L) - \underline{X}(0) = & \frac{-a}{A} \left( \sqrt{AL^2 + 2BL + C} - \sqrt{C} \right) \\ & - \frac{aL^2}{2EA} - \frac{F_0L}{EA} + K \left( \frac{B}{A\sqrt{A}} a - \frac{F_0}{\sqrt{A}} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

که در رابطه فوق مقدار  $K$  برابر است با:

$$K = \text{Ln} \left( \frac{B + AL + \sqrt{A} \sqrt{AL^2 + 2BL + C}}{B + \sqrt{A} \sqrt{C}} \right) \quad (44)$$

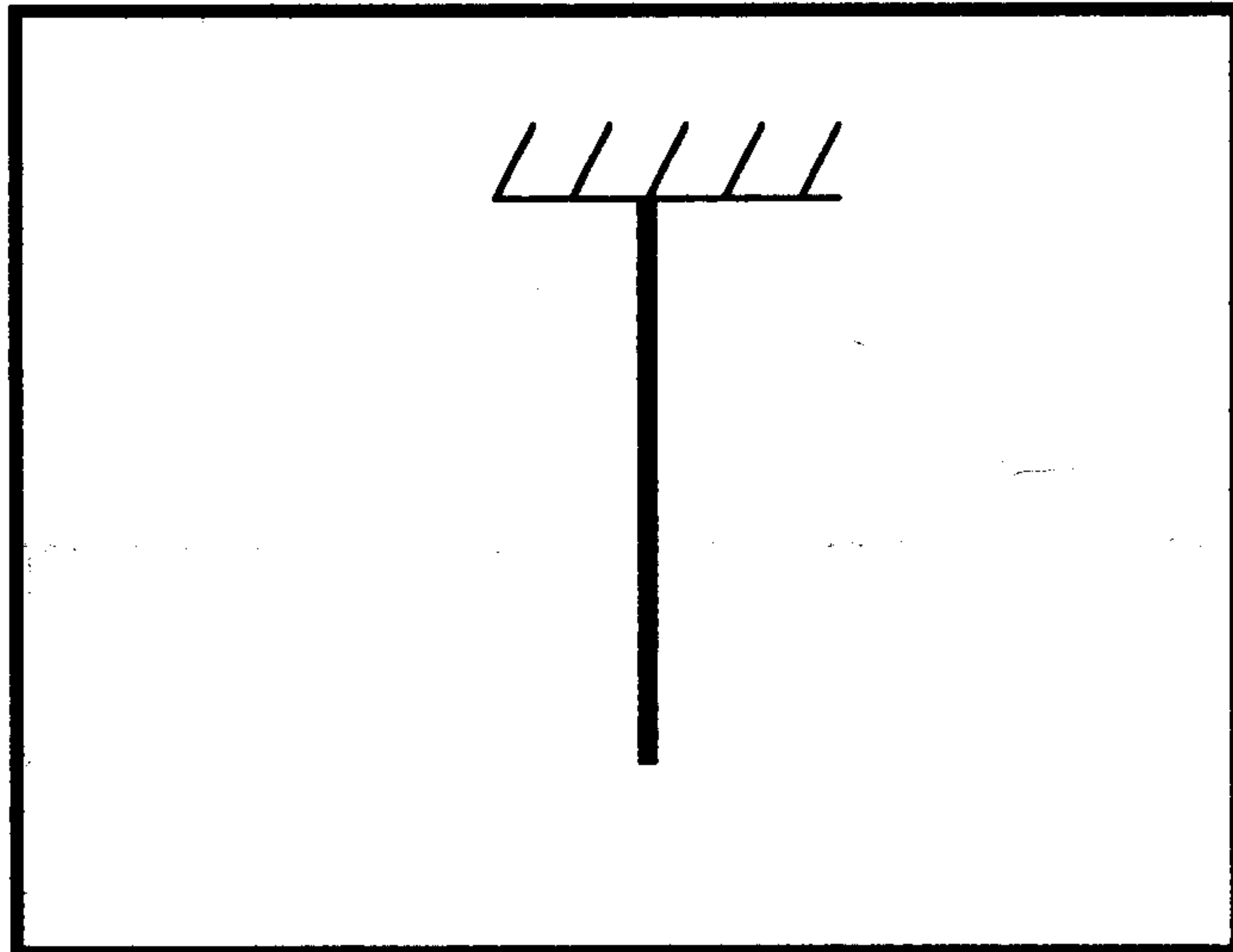
به این ترتیب به معادله تعادل برای کابلهای دارای بار گسترده می‌رسیم. اکنون با روش "آرام سازی دینامیکی" از معادلات فوق به همراه معادلات تعادل برای گره‌ها که در قسمت اول این مقاله بدست آوردیم، برای حل شبکه کابلها استفاده خواهیم کرد [۵، ۶].

## روش D.R.

دستگاه معادلات خطی به فرم  $\underline{K} \underline{x} = \underline{F}$  را در نظر می‌گیریم که جواب آن به صورت  $\underline{x}^* = \underline{K}^{-1} \underline{F}$  است. حال با تعریف ماتریسهای جرم و میرا کننده مجازی معادلات فوق تبدیل به یک سری معادلات حرکت به شکل زیر می‌شوند.

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{F} \quad (45)$$

که در رابطه فوق  $\underline{M}$  و  $\underline{C}$  به ترتیب ماتریسهای جرم و میرا کننده مجازی هستند. پاسخ این معادله حرکت از مجموع پاسخ حالت گذرا و پاسخ حالت پایدار تشکیل می‌شود که اگر پاسخ حالت گذرا، میرا گردد رابطه پاسخ حالت پایدار  $\underline{x}^* = \underline{K}^{-1} \underline{F}$  معادلات فوق خواهد بود و این



شکل ۲: کابل آویزان تحت اثر وزن خودش.

مشخصات این کابل به صورت زیر است:

- طول: ۱۰ متر
- سطح مقطع: ۰/۰۰۰۰۰۰۴ مترمربع
- وزن واحد طول: ۰/۳ کیلوگرم
- مدول الاستیسیته: 2E9 نیوتن بر متر مربع
- و مقادیر پارامترهای D.R. برابر است با:
- جرم: ۰/۱ کیلوگرم
- ضریب میرایی: ۱۰ کیلوگرم/ثانیه
- افزایش زمان: ۰/۰۱ ثانیه

با مقادیر فوق مقدار افزایش طول کابل از طریق نرم افزار برابر است با:

$$\Delta \ell = 0.0018749 \text{ (m)}$$

(۵۵)

برای مثال فوق، افزایش طول را با استفاده از رابطه تحلیلی هم بدست می‌آوریم:

$$\Delta \ell = \int_0^L \frac{P(x)}{EA} dx$$

(۵۶)

با قرار دادن مقادیر مربوطه و با توجه به اینکه:

$$P(x) = w \cdot x$$

(۵۷)

که  $w$  در این رابطه وزن واحد طول است، داریم:

$$\Delta \ell = \frac{w x^2}{2EA} = \frac{.3 * 10^2}{2 * 2 * 10^9 * 4 * 10^{-6}} = 0.001875 \text{ (m)}$$

(۵۸)

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}^0 \neq 0 \\ \underline{\dot{x}}^0 = 0 \end{cases} \quad (52)$$

با استفاده از روابط (۴۸) و (۵۲) داریم:

$$\underline{\dot{x}}^{-\frac{1}{2}} = -\underline{\dot{x}}^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

و با توجه به رابطه (۵۱) خواهیم داشت:

$$\underline{\dot{x}}^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{2} \underline{M}^{-1} (\underline{F} - \underline{K} \underline{x}^0) \quad (54)$$

پس بطور خلاصه می‌توان فرمول تکرار را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{2} \underline{M}^{-1} (\underline{F} - \underline{K} \underline{x}^0) & , n=0 \\ & n \neq 0 \\ \underline{\dot{x}}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{h} \underline{M} + \frac{1}{2} \underline{C} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{1}{h} \underline{M} - \frac{1}{2} \underline{C} \right) \underline{\dot{x}}^{n-\frac{1}{2}} + (\underline{F} - \underline{K} \underline{x}^n) \right] \\ \underline{x}^{n+1} = \underline{x}^n + h \underline{\dot{x}}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (55)$$

روش کار الگوریتم DR در این مسئله به این ترتیب است که پس از بدست آمدن باقیمانده نیرو (جمع جبری نیروهای داخلی و خارجی) در گره‌ها، موقعیت جدید  $\underline{X}$  از روی موقعیت قدیم آن، برای هر یک از گره‌ها بدست می‌آید و سپس با استفاده از معادلات تعادل بدست آمده در قسمت قبل، نیروهای اعمال شده بر گره‌ها (حاصل از کابلهای دارای بار گسترده) اصلاح می‌شود.

### مثالهای تحلیل شده

در این قسمت به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ - به عنوان اولین مثال ساده‌ترین حالت در نظر گرفته شده است که در آن افزایش طول یک کابل آویزان تحت اثر نیروی وزن خودش بدست آمده است. با توجه به اینکه این مسئله دارای جواب تحلیلی است، می‌توان نتایج بدست آمده از برنامه کامپیوتری را با جواب تحلیلی مقایسه کرد.

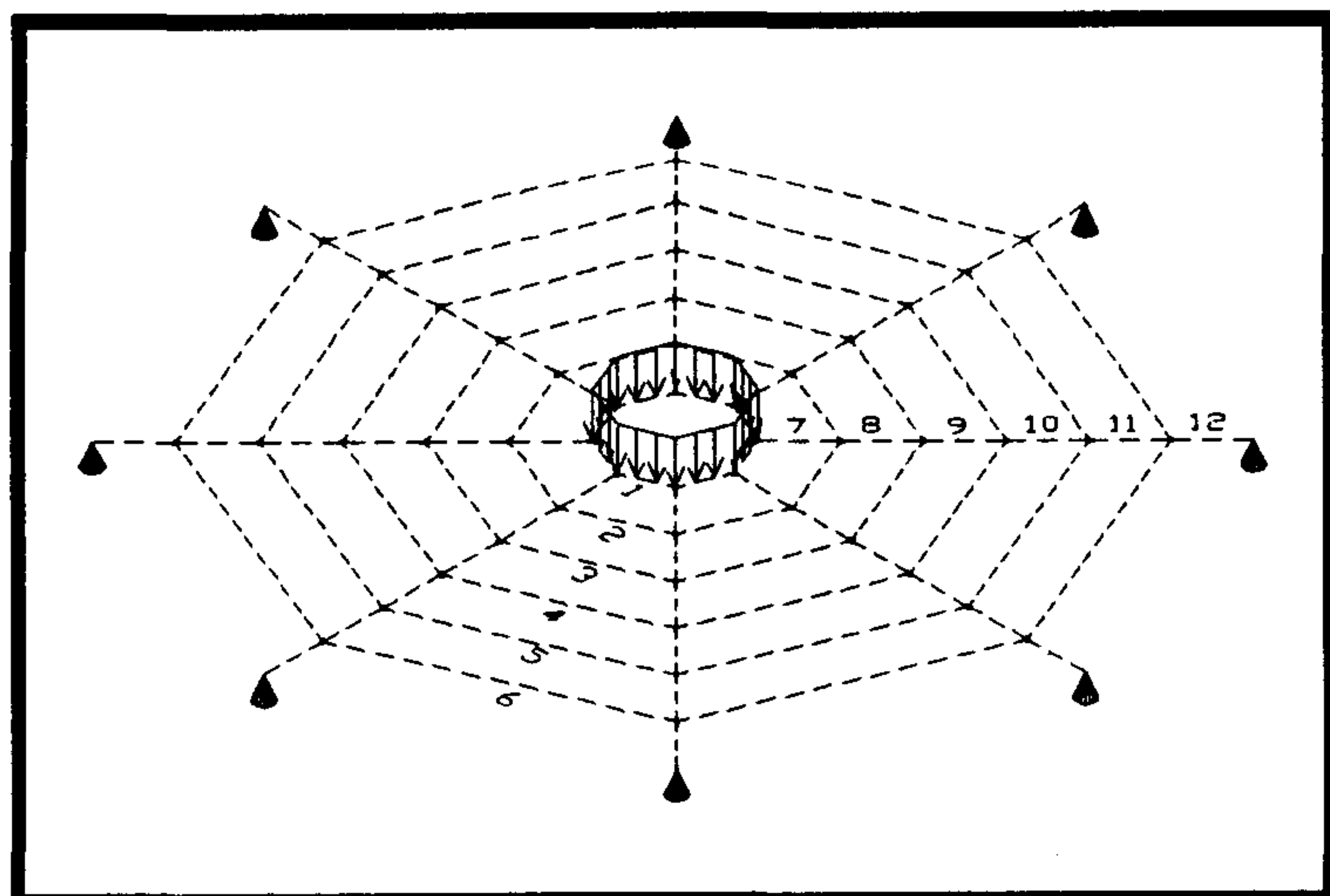


جدول ۲: نتایج برای کابل دارای نیرو متمرکز گسترده.

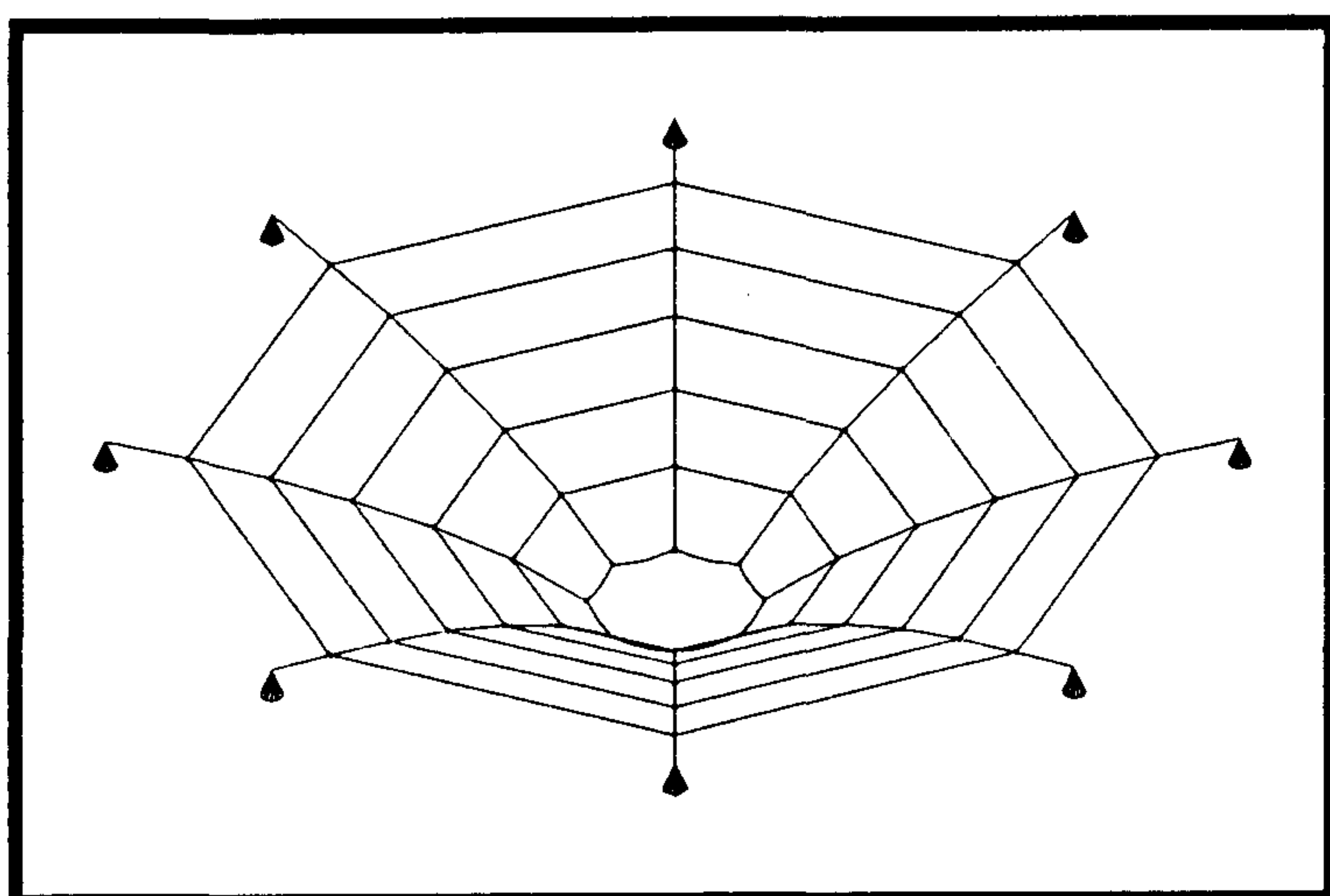
تقسیمات کابل	سایز فابل ورودی (بایت)	تعداد تکرار	زمان عملیات (ثانیه)	خیز در وسط کابل (متر)
۱۰	۱۶۶۴	۳۲۲۳	۴	-۶/۳۵۶۶۳
۲۰	۳۰۷۵	۶۲۵۶	۱۴	-۶/۳۳۹۲۹
۵۰	۷۳۰۵	۱۴۸۴۰	۵۵	-۶/۳۳۴۴۷
۱۰۰	۱۴۳۵۹	۲۸۳۸۷	۱۷۲	-۶/۳۳۳۷۷
۲۰۰	۲۸۴۵۹	۵۴۲۰۲	۵۹۴	-۶/۳۳۳۵۸

با مقایسه نتایج در دو جدول فوق، صحت این روش مشاهده می‌شود.

مثال ۳- در این مثال یک شبکه تار عنکبوتی شامل ۵۶ گره و ۹۶ المان که تحت بار گسترده قرار دارد بررسی می‌شود.

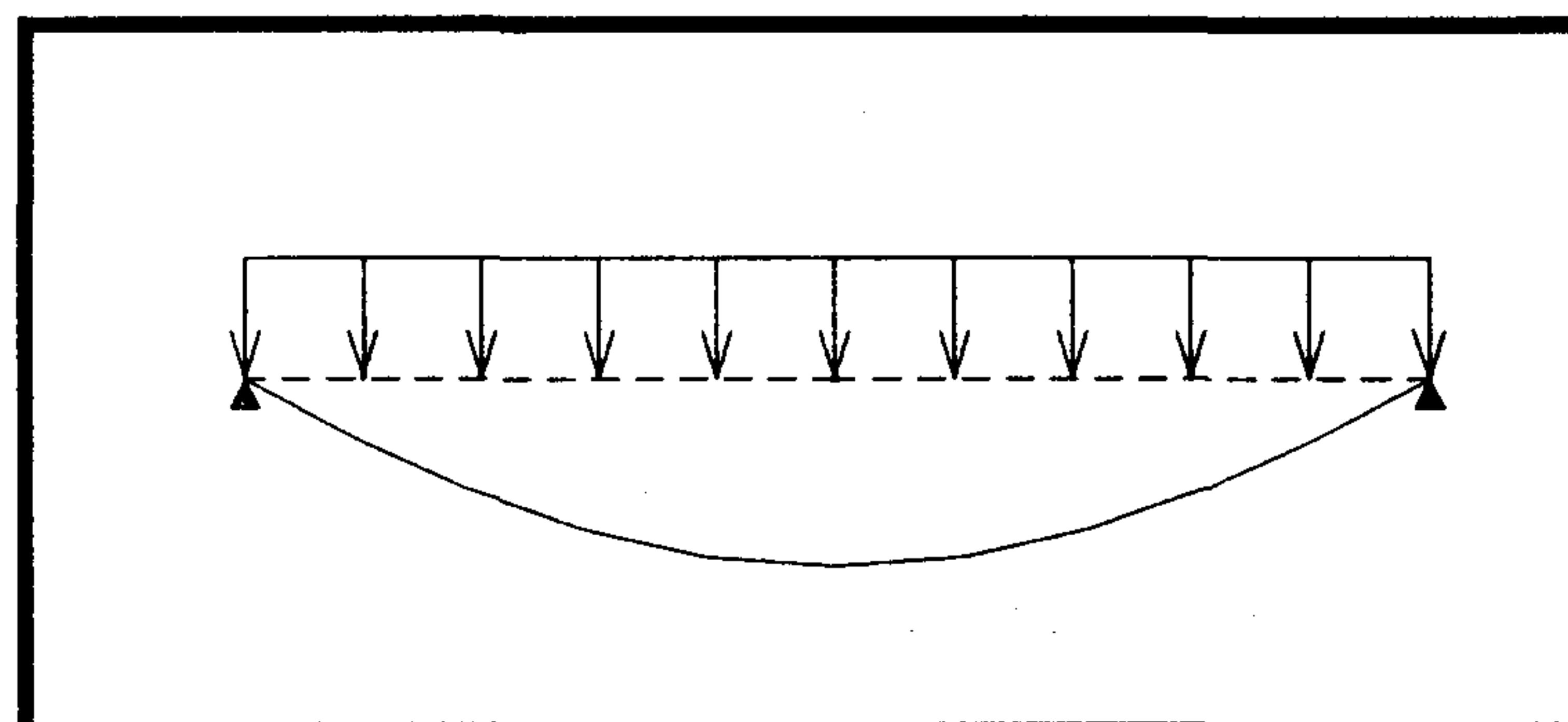


شکل ۴: شبکه تار عنکبوتی با بار گسترده (قبل از تغییر شکل).



شکل ۵: شبکه تار عنکبوتی با بار گسترده (بعد از تغییر شکل).

و ملاحظه می‌شود که این مقدار تطبیق خیلی خوبی با خروجی برنامه دارد. مثال ۲- در این مثال بر روی کابلی که دو سرش در تکیه‌گاه قرار دارد بار گسترده قرار داده شده است.



شکل ۳: کابل تحت بار گسترده.

مشخصات کابل و بارگذاری به صورت زیر است:

- طول دهانه بارگذاری: ۲۰ متر
  - بار گسترده: با چگالی ۰/۵ نیوتن بر متر
  - سطح مقطع: ۰/۰۰۰۰۱ مترمربع
  - مدول الاستیسیته: 2E6 نیوتن بر متر مربع
  - و مقادیر پارامترهای D.R. برابر است با:
  - جرم: ۰/۱ کیلوگرم
  - ضریب میرایی: ۱۰ کیلوگرم/ثانیه
  - افزایش زمان: ۰/۰۱ ثانیه
- با مقادیر فوق نتایج زیر توسط یک دستگاه کامپیوتر پنتیوم II با سرعت ۵۰۰ مگا هرتز، بدست آمده است:

جدول ۱: نتایج برای کابل دارای بار گسترده.

تقسیمات کابل	سایز فابل ورودی (بایت)	تعداد تکرار	زمان عملیات (ثانیه)	خیز در وسط کابل (متر)
۲	۵۴۷	۳۳۷۷	۲	-۶/۳۳۳۵۷

برای اطمینان از صحت نتایج فوق، کابل در پنج بار تقسیم بندی به ترتیب به ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ المان تقسیم شده و از نیرو متمرکز معادل به جای بار گسترده استفاده شده است. در نتیجه توزیع بار به تدریج یکنواختتر می‌شود و جواب به حالت بار گذاری گسترده نزدیکتر خواهد شد. نتایج این آزمایش با کامپیوتر فوق در جدول زیر آمده است



جدول ۳: نتایج برای شبکه تار عنکبوتی.

شماره	طول آزاد (متر)	پیش کشش (نیوتن)	طول تلویه (متر)	کشش نهایی (نیوتن)	کرنش
۱	۱/۴۲۸۶	۰/۱	۱/۷۰۴۳	۰/۲۷۶۹	۰/۱۹۲۹
۲	۲/۸۵۸	۰/۱	۳/۰۶۴۰	۰/۱۰۱۲	۰/۷۲۳
۳	۴/۲۸۶۰	۰/۱	۴/۵۵۰۰	۰/۰۸۶۲	۰/۰۶۱۶
۴	۵/۷۱۴۷	۰/۱	۶/۰۷۱۳	۰/۰۸۷۳	۰/۰۶۲۴
۵	۷/۱۴۳۴	۰/۱	۷/۶۰۹۸	۰/۰۹۱۴	۰/۰۶۵۲
۶	۸/۵۷۲۱	۰/۱	۹/۱۵۸۷	۰/۰۹۵۸	۰/۰۶۸۴
۷	۱/۸۶۶۶	۰/۱	۲/۱۹۹۱	۰/۲۴۹۳	۰/۱۷۸۰
۸	۱/۷۷۶۰	۰/۱۱۷۶۵	۲/۷۶۶۸	۰/۳۱۵۹	۰/۲۲۵۶
۹	۱/۶۹۳۸	۰/۱۲۵۳۰	۲/۱۴۸۷	۰/۳۷۶۰	۰/۲۶۸۵
۱۰	۱/۶۱۸۸	۰/۳۲۹۶	۲/۱۲۶۰	۰/۴۳۸۶	۰/۳۱۳۳
۱۱	۱/۵۵۰۲	۰/۴۰۶۱	۲/۱۰۹۷	۰/۵۰۵۲	۰/۳۶۰۹
۱۲	۱/۴۸۷۲	۰/۴۸۲۶	۲/۰۹۹۱	۰/۵۷۶۰	۰/۴۱۱۴

این شبکه شامل هشت قطاع و هر قطاع دارای شش ردیف المان است که بر روی همه اضلاع هشت ضلعی داخلی (کوچکترین هشت ضلعی) بار گسترده قرار داده شده است. و همه کابل‌ها دارای پیش کشش هستند شکل‌های (۵) و (۶) تغییر شکل این مثال پس از بار گذاری را نشان می‌دهند.

مشخصات کابل‌ها و بارگذاری به صورت زیر است:

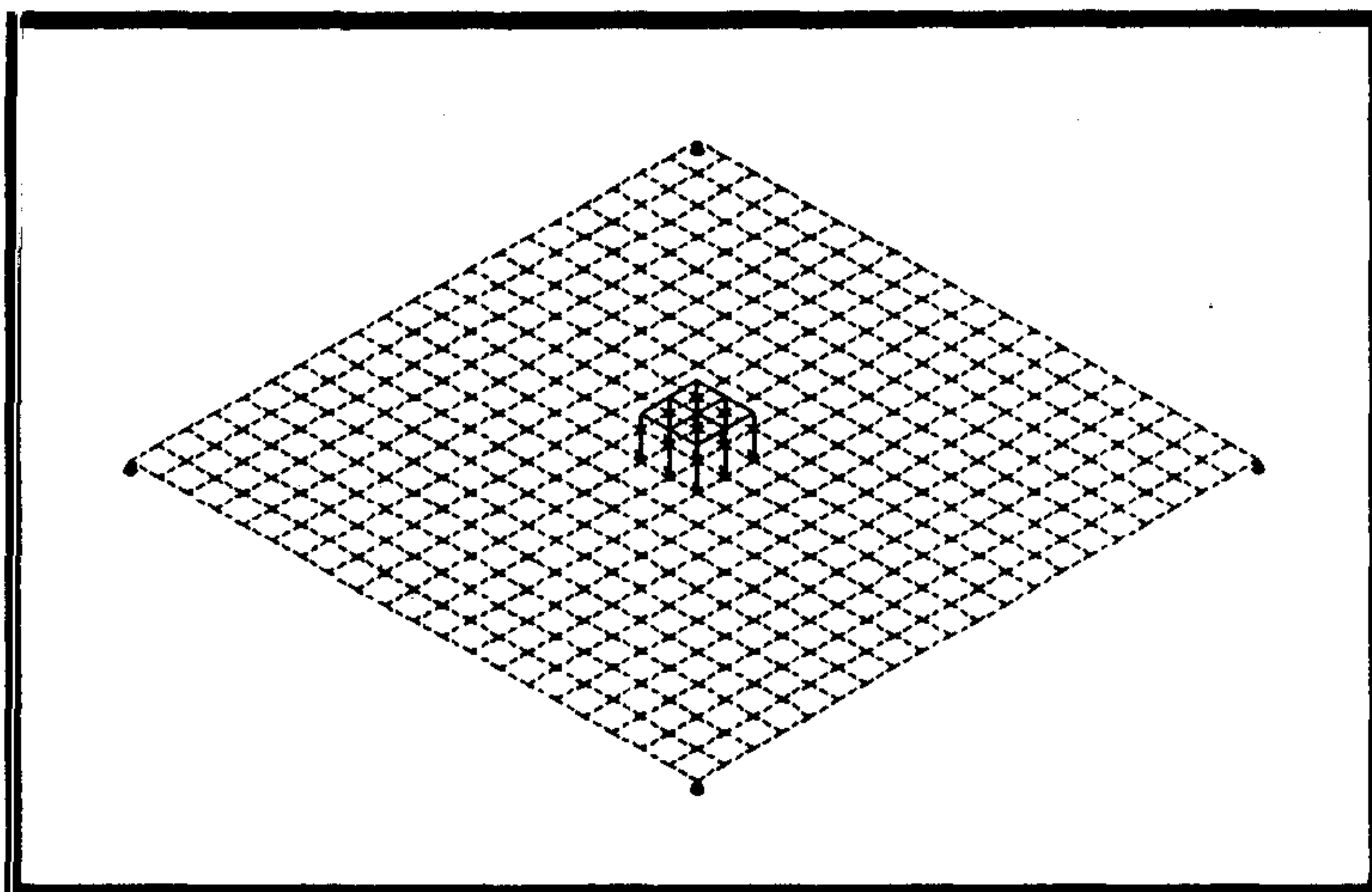
- طول کابل : (در جدول ۳ داده شده است).
- بار گسترده : با چگالی ۰/۱ نیوتن بر متر
- سطح مقطع : ۰/۰۰۰۰۰۴ مترمربع
- مدول الاستیسیته :  $3.5E4$  نیوتن بر متر مربع
- و مقادیر پارامترهای D.R. برابر است با :

جرم : ۱ کیلوگرم

ضریب میرایی : ۵ کیلوگرم/ثانیه

افزایش زمان (در اصلاح موقعیت) ۱ ثانیه

افزایش زمان (در اصلاح نیرو) ۱ ثانیه



شکل ۷: شبکه مربعی مثال ۴ قبل از بار گذاری.

ثابت شده‌اند، و در عین حال بر روی ۱۲ المان وسط هم بار گسترده قرار داده شده است.

مشخصات کابلها و بارگذاری به صورت زیر است:

طول هر کابل : ۲ متر

بار گسترده : ۰/۰۵ نیوتن بر متر

سطح مقطع : ۰/۰۰۰۰۰۴ مترمربع

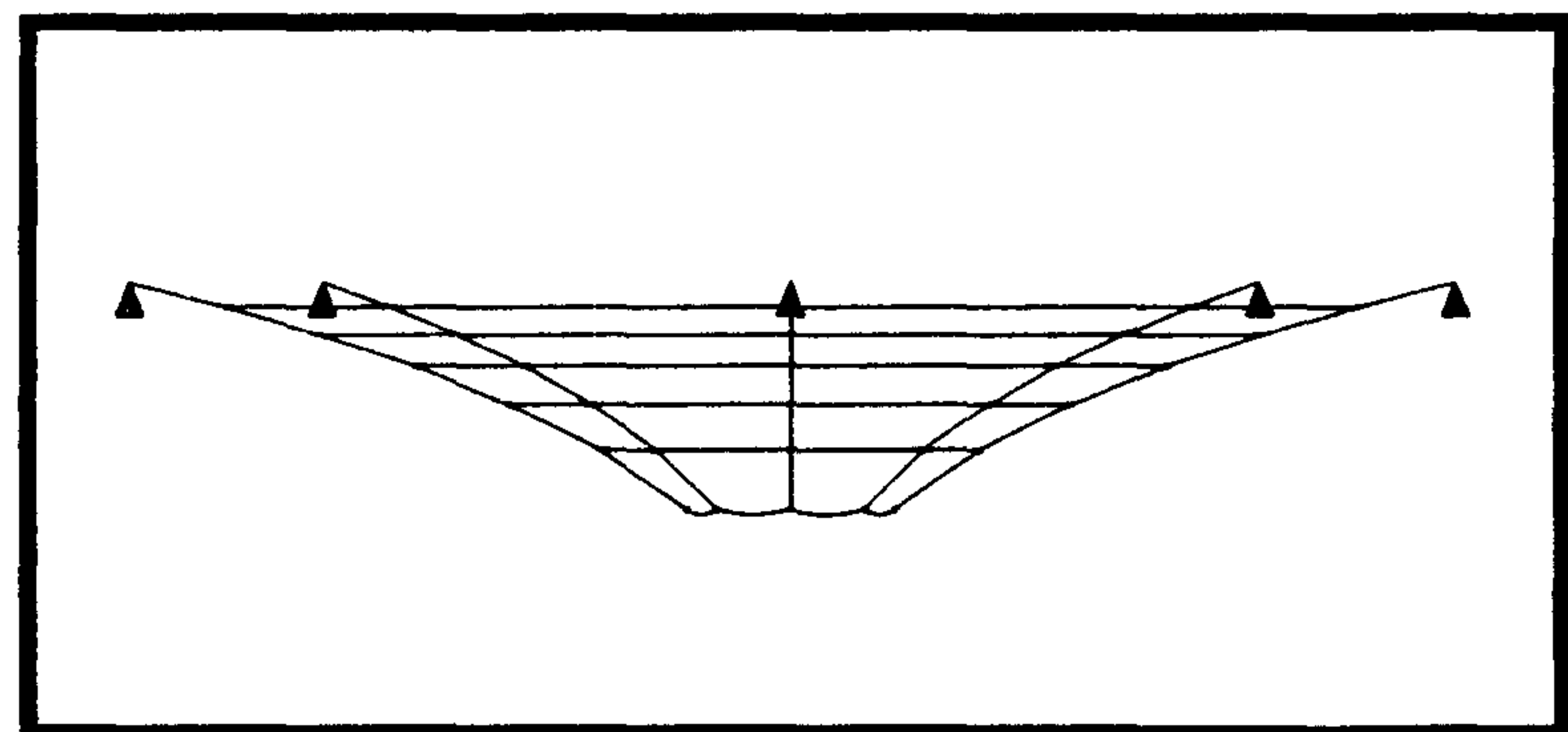
مدول الاستیسیته :  $3.5E5$  نیوتن بر متر مربع

کشش اولیه : ۰/۳۷۰۸ نیوتن (همه کابلها)

پس از بار گذاری مشخصات گره وسط

(۷/۹۹۴ ، ۲۰ ، ۲۰) است که اختلاف ارتفاع ۷/۹۹۴ نسبت

به حالت قبل از بار گذاری پیدا کرده است.



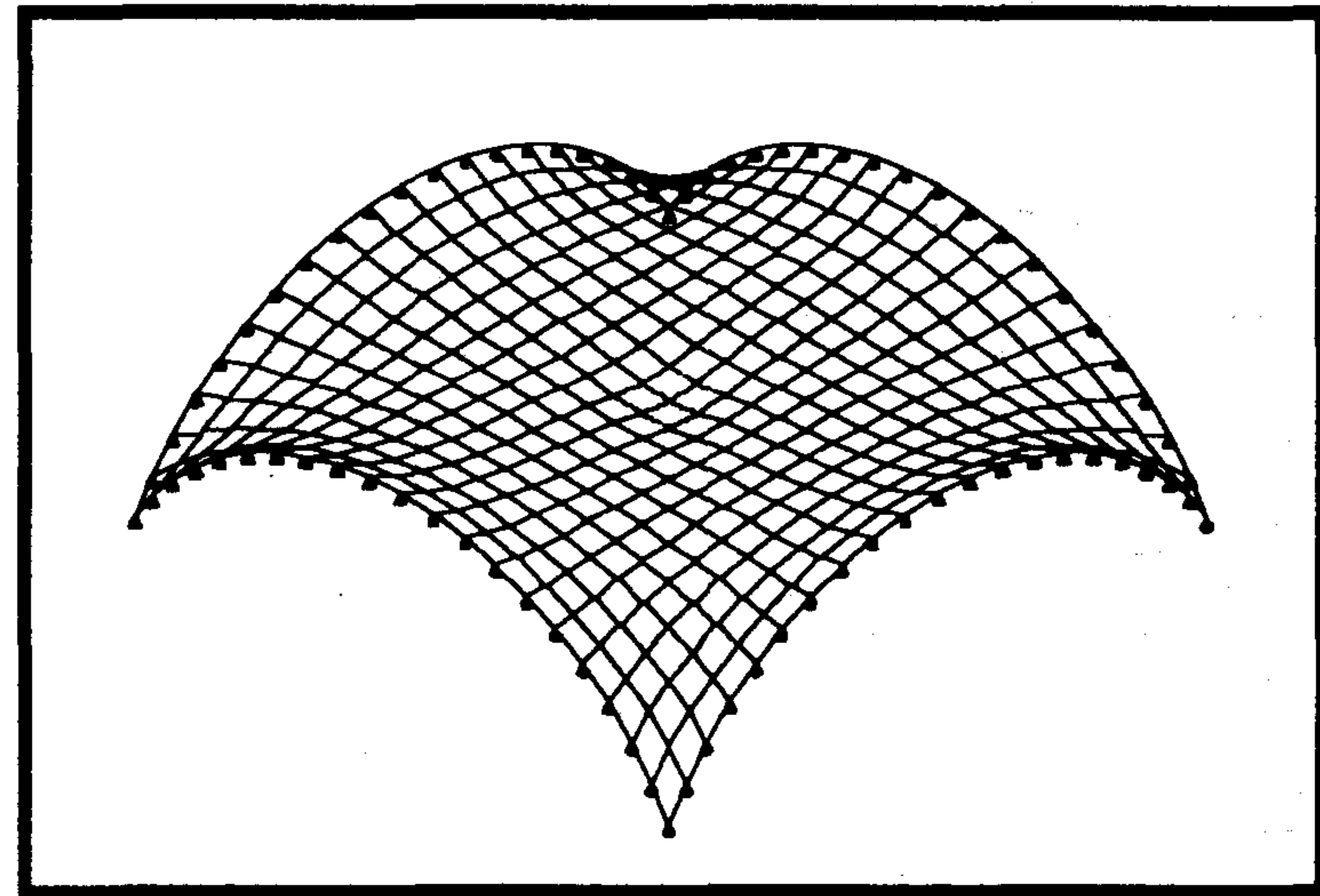
شکل ۶: نمای جانبی شکل ۵ (بعد از تغییر شکل).

نتایج بدست آمده از تحلیل شبکه فوق در جدول زیر داده شده است که با توجه به وجود تقارن در هندسه و بارگذاری مسئله، این مقادیر برای المانهای مشابه یکسان می‌باشند:

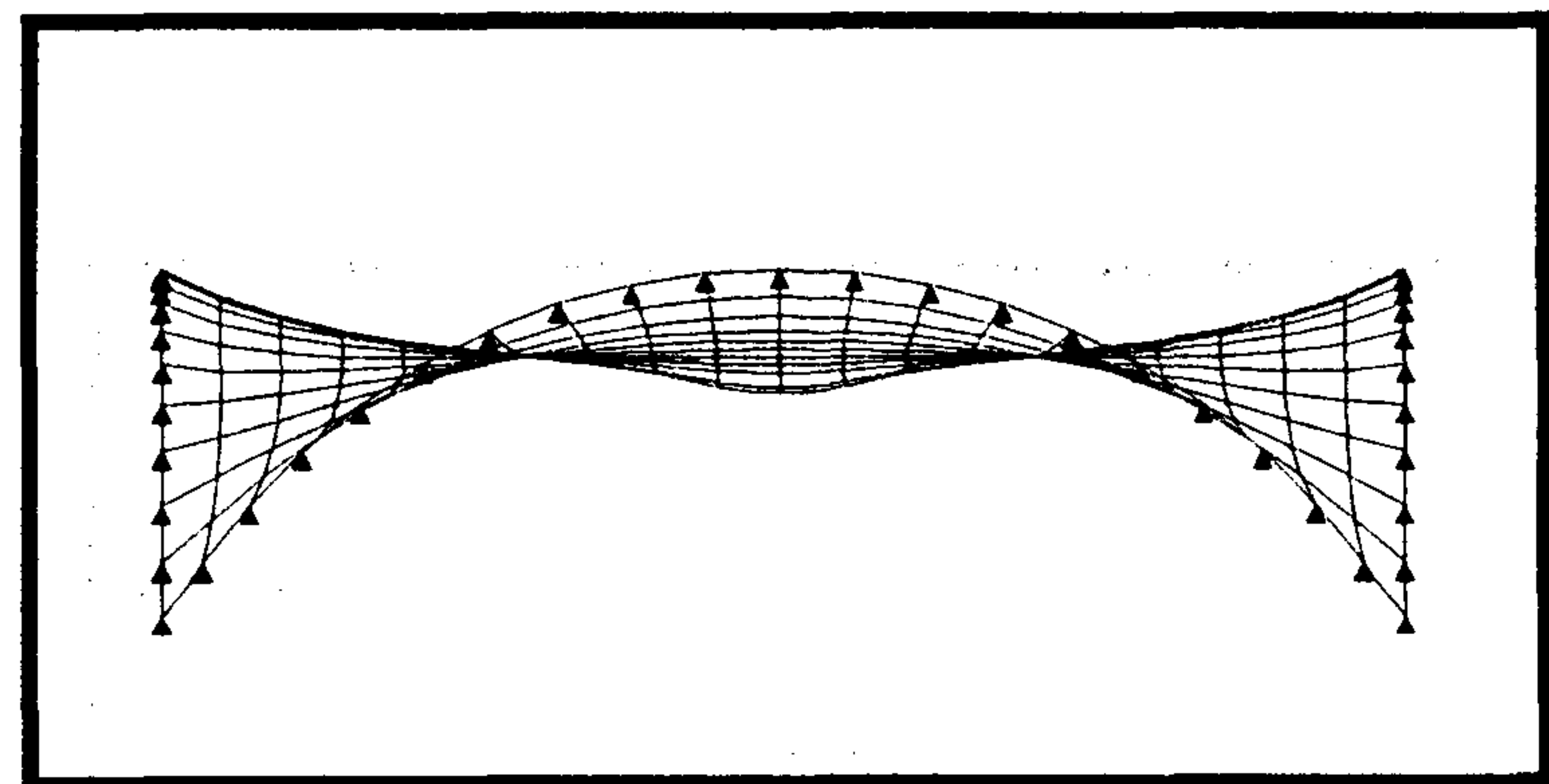
مثال ۴ - در این مثال نمونه‌ای از یک سقف معلق با بار گسترده بررسی شده است. این شبکه شامل ۴۴۱ گره و ۸۴۰ المان است و بطوریکه در شکل زیر دیده می‌شود در هر چهار گوشه گره‌ها مقید شده‌اند

بار گذاری این مسئله به این صورت است که تمامی گره‌های چهار لبه بر روی یک قوس دایره‌ای بالا آورده و

بدست آمده بود با نتیجه حاصل از روش بار گسترده که در این مقاله ارائه شده، مقایسه گردید و ملاحظه شد که با افزایش تعداد تقسیمات، جواب در هر دو روش به یک مقدار همگرا می‌شود که اولاً دلالت بر صحت عملکرد این روش داشت و ثانیاً با مقایسه پارامترهای دو روش در جداول (۱) و (۲) مزیت استفاده از بار گسترده نشان داده شد. در مثالهای بعدی قابلیت این روش در تحلیل شبکه های بزرگتر بررسی گردیده است.



شکل ۸: شبکه مربعی مثال ۴ بعد از بار گذاری.



شکل ۹: نمای جانبی شبکه مربعی مثال ۴ بعد از بار گذاری.

برخی مقادیر بدست آمده از تحلیل شبکه فوق در جدول زیر داده شده است:

جدول ۴: نتایج مربوط به مثال ۴.

۲/۳۷۱۴	بیشترین طول ثانویه (متر)
۰/۷۵۴۹	بیشترین کشش در کابل (نیوتن)
۱۱/۷۴۵	ماکزیمم ارتفاع (متر)
۰/۳۷۰۸	کمترین کشش در کابل (نیوتن)

### نتیجه گیری

معادلات مربوط به تعادل شبکه کابل و همچنین معادلات بار گسترده بر روی کابل ها، به روش آرام سازی دینامیکی در یک برنامه کامپیوتری مورد استفاده قرار گرفت. در مثال اول نشان داده شد که نتایج بدست آمده از این روش با جواب تحلیلی یکسان است سپس در مثال دوم جوابی که با روش بار گرهی [۱]



## مراجع

- 1 - Atai, A. A. (1994). Equilibrium analysis of elastic and elasto-plastic cable networks. University of Alberta, Mechanical Dept., Master Thesis, PP. 1-33.
- 2 - Steigmann, D. J. (1990). "Minimum-energy configurations of elastic cable networks." *CSME*, Vol. 14, No. 3, PP. 47-50.
- 3 - Barnes, M. R. (1991). "Non-linear numerical solution methods for static and dynamic analysis of tension structures." *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, No. 7, PP. 38-56.
- 4 - Buchholdt, H. A. and McMilan, B. R. (1971). "Iterative methods for the solution of pretensioned cable structures and pin-jointed assemblies having significant geometrical displacements." *Proc. 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames*, Tokyo and Kyoto, PP. 305-316.
- 5 - Underwood, P. (1983). *Dynamic relaxation*. Edited by T. Bleytschko and T.J.R. Hughes, Elsevier Science Publishers B. V., PP. 245-265
- 6 - Barnes, M. R. (1974). "Dynamic relaxation analysis of tension networks." *Proceedings of International Conference on Tension Roof Structures*, London.