نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۶، شماره ۴، اسفندماه ۱۳۸۱، از صفحه ۴۸۳ تا ۴۹۳

بررسی و تحلیل تیر دو سر مفصل با بار محوری

احمد فیض دیزجی

استادیار گروه مهندسی علوم پایه – دانشکده فنی – دانشگاه تهران

رامبد رستگاری

دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک – دانشگاه خواجه نصیر طوسی

(تاریخ دریافت ۸۰/۸/۵ ، تاریخ تصویب ۸۱/۹/۲)

چکیده

معادلات دینامیکی تیر دوسرمفصل که یک تکیه گاه آن می‌تواند در امتداد تیر حرکت آزاد داشته باشد و جرمی متمرکز در وسط آن قرار گرفته و به صورت متناوب با حرکت تکیه گاهش تحریک می شود، یک معادله دیفرانسیل غیر خطی معمولی است که حل صریح برای آن وجود ندارد. در این مقاله پس از استخراج معادلات حرکت، شرایط وجود جواب با استفاده از تابع گرین و قضایای نقطه ثابت مورد بررسی قرار گرفته و وجود جواب هارمونیک به اثبات می‌رسد. همچنین با توجه به ساختار معادلات دیفرانسیل حرکتی، وجود پاسخ نوسانی مستقلاً بررسی شده که شرط وجود جواب پریودیک مستقلاً بدست خواهد آمد. با این تحلیل امکان پیش بینی اینکه جواب به سمت صفر میل می‌نماید و یا اینکه پریودیک خواهد بود فراهم خواهد شد.

واژه های کلیدی : جواب پریودیک، تیر دو سر مفصل، معادله لاگرانژ، تحریک، جواب اساسی، تابع گرین، تئوری آرزلا –اسکولی، قضیه شادر، مجموعه فشرده، سیکل حدی

مقدمه

در مدلسازی حرکتی بسیاری از سیستم های دینامیکی شاهد آن هستیم که معادلات حرکت مدل تقریب زده شده منجر به معادلات دیفرانسیل غیر خطی می شود. به عنوان نمونه مدل دینامیکی سیستم هایی از قبیل آنتن ها، برجها، روباتهایی با بازوهای ارتجاعی و سازه های فضایی منجر به تشکیل معادلات مذکور می گردد. محققین در بررسی چنین سیستم هایی مساله را برای دو حالت تحریک اجباری و ارتعاشات آزاد سیستم مورد بررسی قرار داده اند. Chen مساله ارتعاش تیر کاملاً ارتجاعی را با جرم متمرکز در انتهایش مورد بررسی قرار داد[۱]. وی از روش جدا سازی متغیرها بهره جست و مدهای خطی سیستم را بدون تحریک اجباری بررسی کرد. Parnell و Cobble معادلات خطی جابجایی اویلر_برنولی را برای یک تیر یکنواخت یکسر درگیر که بار یکنواختی را تحمل نموده و جرم متمرکزی در انتهایش متصل است بررسی نمودند[۲]. To [۳] یک حل تحلیلی را برای پایه آنتن با جرم متمرکز در انتهایش به دست آورده است. او تیر اویلر_برنولی را به منظور رسیدن به یک عبارت تحلیلی برای فرکانس های طبیعی و شکل مودهای متناظر آنها به دست آورد. Laura و Gutierrez [٤] کار To را ادامه دادند و یک حل برای تیرهای غیر یکنواخت با جرم متمرکز در سرش را به دست آوردند. Liu و Huang [٥] مساله ارتعاشات اجباری برای تیر یکسر درگیر دارای جرم نقطه ای در انتهایش را حل نمودند. Hoppmann یک تیر با ارتعاشات اجباری ویژه که جرمی متمرکز در وسط آن قرار داشت را بدون تحقیق بر تاثیرات شرایط اولیه بررسی کرده است[٦]. اسماعیل زاده و نخعی[٧] به بررسی وجود جواب پریودیک برای تیر یکسر در گیر با جرم متمرکز در انتها با تحریک هارمونیک خارجی با استفاده از قضایای نقطه ثابت پرداخته اند.

این دسته از معادلات در حالت کلی دارای حل تحلیلی نیستند و بناچار از روشهای حل عددی بهره گرفته می شود. لازمه استفاده از حل عددی بررسی تحلیلی وجود جواب برای معادلات مزبور می‌باشد. در این مقاله بررسی و اثبات وجود جواب پریودیک برای معادلات دینامیکی تیر دوسرمفصل که یک تکیه گاه آن می‌تواند در امتداد تیر

حرکت آزاد داشته باشد و جرمی متمرکز در وسط آن قرار گرفته و به صورت متناوب با حرکت تکیه گاهش تحریک می شود، انجام پذیرفته است. همچنین از روش مستقلی شرایط وجود جوابهای نوسانی پایدار با استفاده از تحلیل معادلات دیفرانسیل به دست آمده است. با استفاده از نتایج این روش امکان بررسی اینکه پاسخ هامونیک بوده و یا اینکه به صفر میل خواهد نمود فراهم شده است.

معادله حرکت

شکل (۱) یک تیر دو سر مفصل که یک تکیه گاه آن می تواند در جهت طولی حرکت آزاد داشته باشد را با طول l و جرم متمرکز m در وسط تیر نشان می دهد که در صفحه xy مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای سیستم دارای خواص مجزا فرض شده اند یعنی جرم تیر به صورت نقطه ای در مرکز تیر قرار گرفته است. تیر دارای خاصیت ارتجاعی در محدوده الاستیک ناب می‌باشد. تکیه گاه آزاد در جهت طولی به وسیله تحریک نوسانی u با فرکانس $\frac{\omega}{2\pi}$ تحریک می گردد.

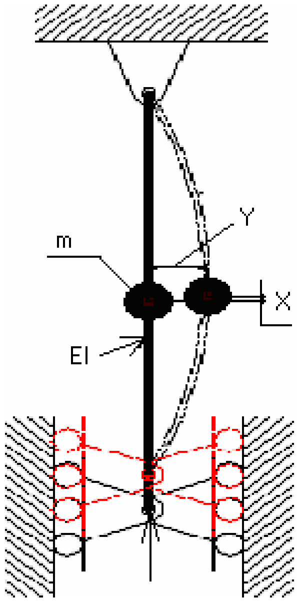
متغیر X نیز معرف حرکت طولی جرم متمرکز در شرایط بدون تحریک می باشد.
برای به دست آوردن معادله حرکت برای سیستم از روش لاگرانژ بهره می گیریم. انرژی جنبشی T برای تیر فوق تنها وابسته به جرم متمرکز در وسط آن می باشد. بنابر این انرژی جنبشی سیستم برابر خواهد بود با:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{Y}^2 + \left(\dot{X} + \dot{u}\right)^2\right] \qquad (۱)$$

که Y جابجایی جانبی جرم متمرکز و X جابجای طولی آن می باشد با توجه به متمرکز بودن جرم تیر انرژی جنبشی ناشی از دوران و پیچش ناچیز و قابل اغماض می باشد.

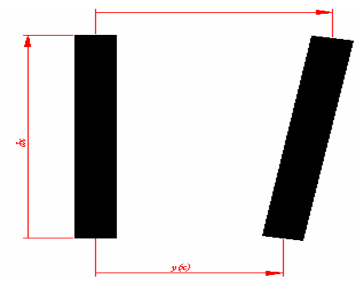
انرژی پتانسیل کل سیستم V ، شامل انرژی کرنشی
مربوط به کمانش تیر و انرژی پتانسیل مربوط بــــه جرم
متمرکز، برابر است با:

$$V = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx + mg\left(X + u\right) \qquad (۲)$$



شکل ۱ : تیر دو سر مفصل که یکسر در جهت طولی آزادی حرکت دارد و با u تحریک می شود.

$$y(x)+\frac{\partial y}{\partial x}dx$$



dx

$y(x)$

شکل ۲: تغییر طول المان dx با فاصله x از مبدا.

تغییر طول تیر در جهت طولی از شکل (۲) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$ds=\sqrt{dx^2+(\frac{\partial y}{\partial x}dx)^2}-dx=\left(\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}-1\right)dx$$

(۳)

که ds معرف تغییر طول المان جزء dx می باشد.

با فرض اینکه شرط $1 \gg \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ برقرار باشد رابطه (۳) به صورت زیر ساده می گردد:

$$ds=1+\tfrac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2+\cdots-1\approx\tfrac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

(٤)

بنابراین جابجایی طولی مرکز جرم ناشی از تغییر شکل تیر برابر خواهد بود با:

$$X\approx\tfrac{1}{2}\int_0^{l/2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2dx$$

(٥)

می توان جابجایی جانبی تیر را با تفکیک متغیر بر حسب شکل مودهای نوسانی تیر که تابعی از x، و ارتعاشات مرکز جرم تیر که تابعی از زمان است، نوشت:

$$y(x,t)=y(l/2,t)\Phi(x)=Y\Phi(x)$$

(٦)

که $\Phi(x)$ شکل مودهای نرمالایز شده می باشد و برابر است با:

$$\Phi(x) = \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

(٧)

با جایگذاری معادله (٦) در معادلات (٢) و (٥) می توان رابطه انرژی پتانسیل و جابجایی طولی مرکز جرم سیستم را به صورت زیر ساده نمود:

$$V = \tfrac{1}{2}EIY^2\int_0^l(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^2dx + mg(X+u)$$
$$= \tfrac{1}{2}EIY^2A + mg(X+u)$$

(٨)

$$X = \tfrac{1}{2}Y^2\int_0^{l/2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2dx = \tfrac{1}{2}BY^2$$

(٩)

که

$$A = \int_0^l(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^2dx$$

(١٠)

$$B = \int_0^{l/2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2dx$$

(١١)

با گرفتن مشتق زمانی از معادله (٩) خواهیم داشت:

$$\dot{X} = BY\dot{Y}$$

(١٢)

با جایگذاری معادله (١٢) در معادله (١) انرژی جنبشی سیستم برابر خواهد بود با:

$$T = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{Y}^2 + (BY\dot{Y}+\dot{u})^2\right] =$$
$$\tfrac{1}{2}m\left[\dot{Y}^2 + B^2Y^2\dot{Y}^2 + \dot{u}^2 + 2BY\dot{Y}\dot{u}\right]$$

(١٣)

با محاسبه جمله های معادله لاگرانژ در ذیل قادر به استخراج معادله دیفرانسیلی حرکت خواهیم بود.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} = m\left[\dot{Y} + B^2Y^2\dot{Y} + BY\dot{u}\right]$$

(١٤_الف)

با محاسبه جمله های معادله لاگرانژ و جایگزینی آنها در (١٤ – الف) خواهیم داشت:

$$m\left[(1+B^2Y^2)\ddot{Y}\right] +$$
$$m\left[2B^2Y\dot{Y}^2 + B\dot{Y}\dot{u} - B^2Y\dot{Y}^2 - B\dot{Y}\dot{u}\right]$$
$$+ mBY\ddot{u} + EIYA + mgBY = 0$$

(١٤_ب)

با ساده سازی معادله (١٤_ب) خواهیم داشت:

$$(1+B^2Y^2)\ddot{Y} + B^2Y\dot{Y}^2 + \left[\frac{EIA}{m} + B\ddot{u} + +gB\right]Y = 0$$

(١٥)

معادله حاصله یک معادله دیفرانسیلی معمولی و غیر خطی است که با صرفنظر کردن از جملات غیر خطی تبدیل به معادله "Matheiu" می گردد.

تحریک سیستم یک تحریک هارمونیک ساده با فرکانس $\frac{\omega}{2\pi}$ در نظر گرفته می‌شود:

$$u = Q\cos(\omega t)$$

(۱۶)

با محاسبه مشتقات اول و دوم معادله (۷) نسبت به X به دست می آید:

$$\Phi'(x) = \frac{n\pi}{l}\cos(\frac{n\pi}{l}x)$$

(۱۷_الف)

$$\Phi''(x) = -(\frac{n\pi}{l})^2\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

(۱۷_ب)

با قرار دادن معادله (۱۷) در معادله (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$A = (\frac{n\pi}{l})^4\int_0^l \sin^2(\frac{n\pi}{l}x)dx = \frac{(n\pi)^4}{2l^3}$$

(۱۸)

$$B = (\frac{n\pi}{l})^2\int_0^{l/2} \cos^2(\frac{n\pi}{l}x)dx = \frac{(n\pi)^2}{4l}$$

(۱۹)

با گرفتن مشتق دوم زمانی از (۱٦) بدست می آید:

$$\ddot{u} = -Q\omega^2\cos(\omega t)$$

(۲۰)

تحلیل ریاضی سیستم با تحریک پایه آزاد

کمیت بی بعد η به عنوان متغیر مستقل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\eta = \omega t$$

(۲۱)

متغیر وابسته ξ نیز به شکل زیر تعریف می گردد:

$$\xi = BY$$

(۲۲)

از طرفین معادله (۲۲) نسبت به زمان دو بار مشتق می گیریم:

$$Y = \frac{\xi}{B} \Rightarrow \dot{Y} = \frac{\dot{\xi}}{B} = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}}{B} = \frac{\xi'\omega}{B} \Rightarrow \xi' = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{B\dot{Y}}{\omega}$$

(۲۳)

$$\dot{Y} = \frac{\omega\xi'}{B} \Rightarrow \ddot{Y} = \frac{\omega\frac{d}{dt}\xi'}{B} = \frac{\omega\xi''\frac{\partial\eta}{\partial t}}{B} = \frac{\xi''\omega^2}{B} \Rightarrow \xi'' = \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{B\ddot{Y}}{\omega^2}$$

(۲٤)

بنا بر این با جایگذاری معادلات (۲۱) تا (۲٤)در معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$(1+\xi^2)\frac{\omega^2}{B}\xi'' + \xi\frac{\omega^2}{B}\xi'^2 + \left[\frac{EIA}{m} + gB - BQ\omega^2\cos(\eta)\right]\frac{\xi}{B} = 0$$

(۲۵)

با ضرب طرفین معادله (۲۵) در $\frac{B}{\omega^2}$ و تغییر متغیرجهت ساده نویسی خواهیم داشت:

$$(1+\xi^2)\xi'' + \xi\xi'^2 + [C + D\cos(\eta)]\xi = 0$$

(۲٦)

که

$$C=\frac{\frac{EIA}{m}+gB}{\omega^2}$$

(۲۷)

$$D=-BQ$$

(۲۸)

هدف این قسمت یافتن بازه ای مناسب جهت بررسی وجود جواب پریودیک برای معادله دیفرانسیل (۲٦) می باشد. لذا معادله (۲٦) را مجدداً به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\xi''+\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\xi'^2+\frac{C+D\cos(\eta)}{(1+\xi^2)}\xi=$$
$$\xi''+F(\xi,\xi',\eta)=0$$

(۲۹)

با باز نویسی مجدد معادله (۲٦) به شکل جدید داریم:

$$\xi''+C\xi=C\xi-F(\xi,\xi',\eta)=$$
$$\xi\frac{C\xi^2-D\cos(\eta)}{1+\xi^2}-\xi\frac{\xi'^2}{1+\xi^2}$$

(۳۰)

برای اینکه جواب هارمونیک باشد لازم است که شرایط زمانی زیر بر قرار باشد:

$$\xi(0)=\xi(\tau)$$

(۳۱_الف)

$$\xi'(0)=\xi'(\tau)$$

(۳۱_ب)

بنابراین مطلوبست یافتن شرایط کافی برای وجود جوابی با
دوره تناوب τ و یا حداقل حل معادله (۳۰) با شرایط مرزی (۳۱).
واضح است که یک جواب بنیادی برای معادله (۳۰) یعنی جواب:

$$\xi''+C\xi=\delta(\eta-\xi)$$

(۳۲)

به همراه شرایط (۳۱)، تابع تعمیم یافته گرین $G(s,\eta)$ را
تولید می کند که در معادله انتگرال زیر صدق خواهد نمود.

$$\xi(\eta)=\int_0^{\tau}G(s,\eta)f(\xi(s),\xi'(s),\eta)ds$$

(۳۳)

که داریم:

$$f(\xi,\xi',\eta)=\xi\frac{C\xi^2-D\cos(\eta)}{1+\xi^2}-\xi\frac{\xi'^2}{1+\xi^2}$$

(۳٤)

بنا براین در بازه $0\le\eta\le\tau$ یک جواب اساسی برای معادله (۳۲) که در شرایط مرزی(۳۱) صدق می کند به شکل زیـــر به دست می آید:
جواب عمومی معادله (۳۲) برابر است با:

$$G=\begin{cases}A_1\cos(\sqrt{C}\,\eta)+A_2\sin(\sqrt{C}\,\eta) & 0\le\eta\le s\\ B_1\cos(\sqrt{C}\,\eta)+B_2\sin(\sqrt{C}\,\eta) & s\le\eta\le\tau\end{cases}$$

(۳۵)

که باید در شرط ذیل صدق نماید:

$$G(s,0)=G(s,\tau)$$

(۳٦)

با اعمال شرط (۳٦) در معادله (۳۵)، پارامترهای B_1,B_2 برحسب A_1,A_2 به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1\cos(\sqrt{C}\,\tau)-A_2\sin(\sqrt{C}\,\tau)\\ B_2 &= A_2\cos(\sqrt{C}\,\tau)+A_1\sin(\sqrt{C}\,\tau)\end{aligned}$$

(۳۷)

و خواهیم داشت:

$$G=\begin{cases} A_1\cos\sqrt{C}\,\eta+A_2\sin\sqrt{C}\,\eta & 0\le\eta\le s\\ A_1\cos\sqrt{C}(\eta-\tau)+A_2\sin\sqrt{C}(\eta-\tau) & s\le\eta\le\tau\end{cases}$$

(۳۸)

حال اگر از معادله (۳۲) در بازه $(0,\tau)$ نسبت به η انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\left.\frac{dG(s,\eta)}{d\eta}\right|_0^{\tau}+C\int_0^{\tau}G(s,\eta)d\eta=1$$

(۳۹)

با اعمال دو شرط پیوستگی تابع پاسخ در $\eta=s$ و همچنین عدم جهش مشتق تابع در $\eta=s$ که بر معادله (۳۹) اعمال می شود، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A_1\left(\cos\sqrt{C}\,s-\cos\sqrt{C}\,(s-\tau)\right)+\\ A_2\left(\sin\sqrt{C}\,s-\sin\sqrt{C}\,(s-\tau)\right)=0\\ A_1\left(\sin\sqrt{C}\,s-\sin\sqrt{C}\,(s-\tau)\right)-\\ A_2\left(\cos\sqrt{C}\,s-\cos\sqrt{C}\,(s-\tau)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{C}}\end{cases}$$

(٤۰)

از حل دو معادله دو مجهول (٤۰) مقادیر ذیل برای پارامترهای A_1,A_2 به دست می‌آیند:

$$A_2=\frac{\sin(\sqrt{C}(s-\frac{\tau}{2}))}{2\sqrt{C}\sin(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau)}$$

$$A_1=\frac{\cos(\sqrt{C}(s-\frac{\tau}{2}))}{2\sqrt{C}\sin(\frac{\sqrt{C}}{2}\tau)}$$

(٤۱)

و به این ترتیب تابع گرین متناظر به دست می‌آید:

$$G(s,\eta)=G(\eta,s)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\sqrt{C}(s-\eta-\frac{\tau}{2}))}{2\sqrt{C}\sin(\sqrt{C}\frac{\tau}{2})} & 0\le\eta\le s\le\tau\\[2ex] \dfrac{\cos(\sqrt{C}(s-\eta+\frac{\tau}{2}))}{2\sqrt{C}\sin(\sqrt{C}\frac{\tau}{2})} & 0\le s\le\eta\le\tau\end{cases}$$

(٤۲)

حال هدف این است که نشان دهیم معادله انتگرال (۳۳) دارای جواب پریودیک می‌باشد. ابتدا نرم ماکزیمم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M=\mathrm{Max}\left\{\left|f(\xi(s),\xi'(s),\eta)\right|,\quad (\xi,\xi')\in Z\right\}$$

(٤۳)

که فرض می شود مقدار مثبت $K_1 > 0$ وجود دارد به گونه ای که:

$$M \le CK_1$$

(٤٤)

و

$$Z = \left\{(\xi,\xi') \in R^2,\ \ |\xi| \le K_1 \ \ ,\ \ |\xi'| \le \sqrt{C}K_1\right\}$$

(٤٥)

حال زیرمجموعه S از فضای باناخ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S = \left\{\xi(\eta) \in C(0,\tau),\ \ |\xi(\eta)| \le K_1,\ \ |\xi'(\eta)| \le \sqrt{C}\,K_1\right\}$$

(٤٦)

همانطور که مشاهده می شود این زیر مجموعه یک زیر مجموعه بسته می‌باشد و نرم تعریف شده برای این فضای باناخ نرم ماکزیمم تعریف شده در معادله (٤٣) می‌باشد.

همانطور که در صفحه ۱۰۷ مرجع [۸] آمده است، فضای توابع با نرم بی نهایت فضای باناخ را تشکیل می دهند. حال نشان می دهیم که این زیر مجموعه، یک زیر مجموعه محدب است.

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ \xi_1(\eta),\xi_2(\eta) \in S\\ \ \ \forall\ \ \ a \in [0,1]\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$a[\xi_1(\eta) - \xi_2(\eta)] + \xi_2(\eta) \in S$$

(٤٧ـالف)

یا

$$a\xi_1(\eta) + (1-a)\xi_2(\eta) \in S$$

(٤٧ـب)

که بنا بر تعریف مجموعه محدب، مجموعه S محدب می باشد.

حال تبدیل پیوسته U را بر زیر مجموعه باناخ S به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$U(\xi(\eta)) = \int_0^\tau G(s,\eta)\,f(\xi(s),\xi'(s),\eta)\,ds$$

(٤٨)

$$\frac{d}{d\eta}[U(\xi(\eta))] = \int_0^\tau \frac{dG(s,\eta)}{d\eta} f(\xi(s),\xi'(s),\eta)\,ds$$

(٤٩)

لازم به ذکر است که پیوستگی تابع U در تئوری (٦-٤٢) مرجع [٨] اثبات شده است. حال در صدد یافتن سوپریمم مقادیر نگاشت شده توسط تبدیل U و U′ می‌باشیم. می‌توان همانطور که در مرجع [۹] نشان داده شده است مقادیر سوپریمم را برای نگاشتهای پیوسته تعریف شده در (٤٨) و (٤٩) به شکل زیر نوشت:

$$|U(\xi)| \le \frac{2+\tau\sqrt{C}}{2C}M$$

(٥٠)

$$\left|\frac{d}{d\eta}U(\xi)\right| \le \frac{2+\tau\sqrt{C}}{2\sqrt{C}}M$$

(۵۱)

برای اینکه نگاشت U، S را به طور پیوسته به خودش در بازه $0 \le \eta \le \tau$ بنگارد بنا به رابطه (٤٦) باید داشته باشیم:

$$\frac{2+\tau\sqrt{C}}{2C}M \le K_1$$

(۵۲)

$$\frac{2+\tau\sqrt{C}}{2\sqrt{C}}M \le \sqrt{C}K_1$$

(۵۳)

به وضوح روشن است که دو رابطه (۵۲) و (۵۳) هر دو منجر به نامعادله زیر خواهند شد:

$$\tau \le \frac{2(CK_1 - M)}{M\sqrt{C}}$$

(٥٤)

که با شرط (٤٤) سمت راست نامعادله (٥٤) مثبت خواهد بود. مشاهده می شود که می‌توان K_1 را به گونه‌ای یافت که دو نامعادله (٤٤) و (٥٤) توامان اقناع شوند.

همانطور که از نامعادلات پیداست اپراتور U(s) به طور یکنواخت کراندار می‌باشد. با این فرض که f تنها عضو خانواده توابع خود می باشد در اینصورت اپراتور U(s) به طور یکنواخت پیوسته خواهد بود. لذا بنابر تئوری Arzela_Ascoli زیر مجموعه S و هم تبدیل U(s) هر دو به صورت نسبی فشرده می باشند.

تئوری *Arzela _ Ascoli*

یک مجموعه توابع در C[a,b] که نرم ماکزیمم برای آنها تعریف شده است به صورت نسبی فشرده هستند اگر و تنها اگر به صورت یکنواخت کراندار و هم پیوسته باشند [۸].

حال بنا بر قضیه دوم شاودر، زیر مجموعه بسته محدب در فضای نرم‌دار (فضای باناخ) S و زیر مجموعه R از S که به صورت نسبی فشرده می باشد ($R \equiv U(S) \subset S$) وجود دارند. هر تبدیل پیوسته که S را به R بنگارد دارای یک نقطه ثابت می باشد[۸].

بنابراین تبدیل U دارای حد اقل یک نقطه ثابت می باشد یعنی اینکه معادله انتگرال (۳۳) دارای جواب می باشد.

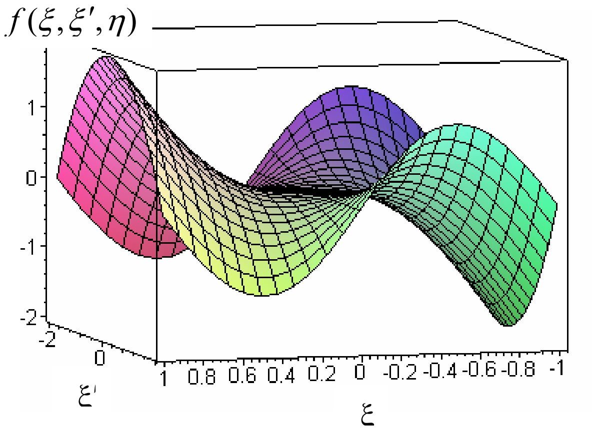
حال در صدد یافتن کمیت M که در رابطه (٤۳) تعریف شده است می باشیم. با توجه به اینکه $f(\xi,\xi',\eta)$ در

مجموعه بسته Z در معادله (٤۵)، پیوسته و کراندار می‌باشد لذا $f(\xi,\xi',\eta)$ دارای یک

مینیمم و یک ماکزیمم مطلق در بازه مذکور می‌باشد. بنابراین M باید وجود داشته باشد.

معادله (٣٤) را مجدداً باز نویسی می کنیم:

$$f(\xi,\xi',\eta)=C\xi-\frac{\xi\xi'^2}{1+\xi^2}-\frac{C+D\cos(\eta)}{1+\xi^2}\xi$$



شکل ٣: نمایش تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ **برای** $k_1=1$ **و** $C=4$.

(٥٥ـالف)

$$f(\xi,\xi',\eta)=\frac{\xi}{1+\xi^2}\left[C\xi^2-\xi'^2-D\cos(\eta)\right]$$

(٥٥ـب)

می‌توان نشان داد که ماکزیمم تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ برای $K_1\le 2$ در $(K_1,0,0)$ رخ می‌دهد. همچنین برای $K_1>2$ مقدار ماکزیمم تابع در $(-\frac{k_1}{\sqrt{3+k_1^2}},\sqrt{C}k_1,\pi)$ به دست می‌آید.

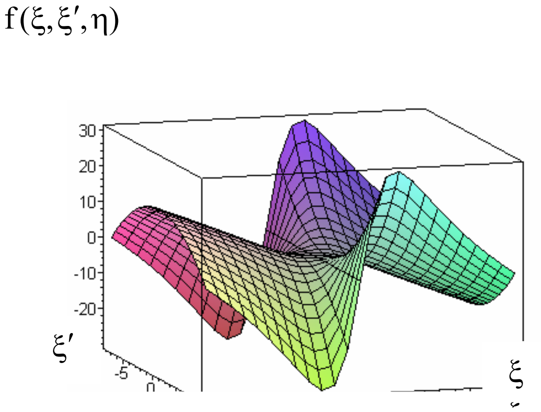
شکل (٣) رفتار تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ را با چشم پوشی از جمله شامل $\cos(\eta)$ برای $k_1=1$ و $C=4$ را نشان می دهد.

همانطور که در شکل (٤) نیز مشاهده می گردد به ازای $k_1>2$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع به ازای $(-\frac{k_1}{\sqrt{3+k_1^2}},\sqrt{C}k_1,\pi)$ به دست می آید.

می توان نشان داد که:

$$M=\mathrm{Max}(|f(\xi,\xi',\eta)|)=\mathrm{Max}(\frac{|C\xi^3-\xi\xi'^2-D\cos(\eta)|}{1+\xi^2})\le$$
$$\mathrm{Max}(|C\xi^3-\xi\xi'^2-D\cos(\eta)|)$$

(٥٦)



شکل ٤ : نمایش تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ **برای** $k_1=4$ **و** $C=4$.

حال با فرض اینکه $k_1\le 2$ باشد مقدار ماکزیمم تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ برابر خواهد شد با:

$$M=\mathrm{Max}(f(\xi,\xi',\eta))\big|_{(k_1,0,0)}\le Ck_1^3-Dk_1$$

(٥٧)

و اگر $k_1 > 2$ باشد مقدار ماکزیمم تابع $f(\xi,\xi',\eta)$ برابر خواهد شد با:

$$M = Max(f(\xi,\xi',\eta)|_{(\frac{-k_1}{\sqrt{3+k_1^2}},\sqrt{Ck_1},\pi)}) \le g(k_1,C,D)$$

(٥٨)

از طرفی بنا به نا مساوی (٤١) برای $k_1 > 0$ داریم:

$$M \le Ck_1$$

(٥٩)

برای ارضا معادله (٥٦) با شرط $k_1 \le 2$ روابط (٥٤) و (٥٦) را به شکل زیر تلفیق می‌نماییم:

$$M \le Ck_1^3 - Dk_1 \le Ck_1$$

(٦٠)

لذا باید داشته باشیم:

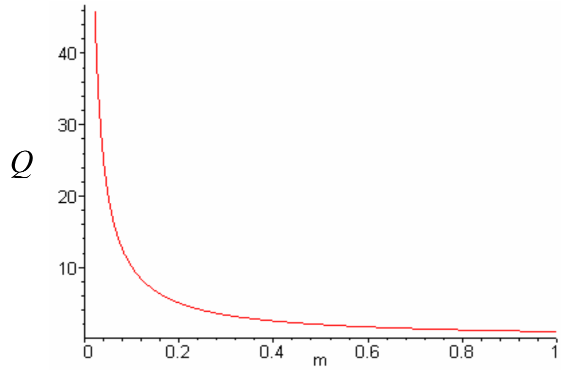
$$k_1^2 \le 1 + \frac{D}{C}$$

(٦١)

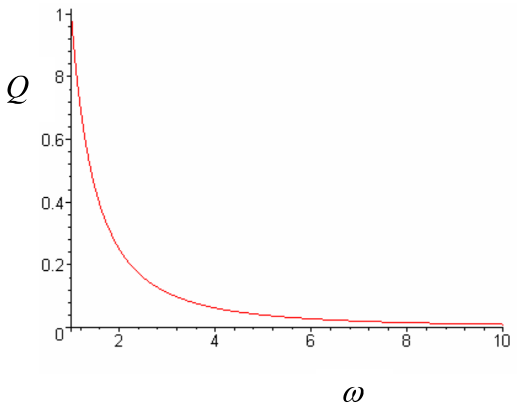
شرط اینکه معادله (٦١) برقرار باشد این است که $C > -D$ باشد که در اینصورت سمت راست معادله (٥٨) مقداری مثبت خواهد بود. با اعمال شرط فوق و استفاده از روابط (٢٧) و (٢٨) به نامعادله زیر دست می یابیم:

$$Q \le \frac{h(EI,l,g)}{m\omega^2}$$

(٦٢)



شکل ٥ : محدوده دامنه تحریک بر حسب تغییر جرم متمرکز.



شکل ٦ : محدوده دامنه تحریک بر حسب تغییر سرعت زاویه‌ای.

معادله (٦٢) نشان می دهد که دامنه تحریک، رابطه معکوس با جرم متمرکز در

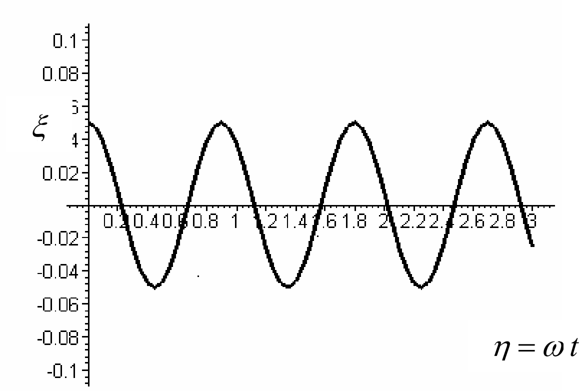
وسط تیر دارد یعنی اینکه با افزایش جرم متمرکز دامنه تحریک محدودتر می گردد.
همچنین دامنه تحریک نسبت عکس با مجذور سرعت زاویه‌ای دارد و مفهوم آن این است که هر چه فرکانس تحریک بیشتر شود، دامنه تحریک با نسبت جذر کاهش می یابد (شکل (٦)) تا معادلات دیفرانسیل غیر خطی حاکم دارای پاسخ گردد.
شکل (٧) پاسخ معادله دیفرانسیل (٢٦) را نشان می دهد. لازم به ذکر است که شروط (٦٢) و (٦١) به ازای $k_l \leq 0.997$ بر قرار می باشند.
پارامترهای انتخابی عبارتند از:

$$B = 0.25\pi^2$$
$$C = 48.95$$
$$D = -0.247$$
$$\xi(0) = 0.05$$
$$\xi'(0) = 0$$

(٦٣–الف)

$$m = 1$$
$$l = 1$$
$$EI = 100$$
$$\omega = 100$$
$$Q = 0.1$$
$$A = .5\pi^4$$

(٦٣–ب)



شکل ٧ : پاسخ معادله دیفراسیل غیر خطی به تحریک هارمونیک.

همانطور که مشاهده می شود داریم:

$$C > -D \qquad (٦٤)$$

و بنابر معادله (٦٢) داریم:

$$Q \leq 19.84 \qquad (٦٥)$$

اگر شرط (٦٥) محقق نگردد دیگر تضمینی برای وجود جواب پریودیک وجود نخواهد داشت. نمودار شکل (٨) نیز پاسخ معادله دیفرانسیل (٢٩) را به‌ازای مقادیر پارامتریک تعیین شده در رابطه (٦٣) در فضای فازی نشان می دهد. همانطور که مشاهده می گردد در این فضا پاسخ سیستم به یک Limit Cycle میل می نماید که نشانگر پریودیک بودن پاسخ می‌باشد.

بررسی تحلیلی وجود جواب نوسانی برای سیستم

در این قسمت روشی دیگر برای بررسی وجود جواب نوسانی برای مدل شکل(۱) که با معادله دیفرانسیل (۲٦) مدلسازی شده است را بررسی می نماییم.

معادله (۲٦) را می توان به شکل جدیدی بازنویسی نمود:

$$\sqrt{(1+\xi^2)}\xi''+\frac{\xi\xi'^2}{\sqrt{(1+\xi^2)}}+\frac{[\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\eta)]\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)}}=0$$

(٦٦)

دو ترم اول معادله (٦٣) یک دیفرانسیل کامل را نشان می دهد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\xi'\sqrt{1+\xi^2})+\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\eta)}{\sqrt{1+\xi^2}}\xi=0$$

(٦٧)

با انتگرالگیری از رابطه (٦٤) در بازه 0 تا η خواهیم داشت:

$$\xi'\sqrt{1+\xi^2}\Big|_0^{\eta}+\int_0^{\eta}\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\mathrm{s})}{\sqrt{1+\xi^2(\mathrm{s})}}\xi(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}=0$$

(٦٨-الف)

$$\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}+\int_0^{\eta}\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\mathrm{s})}{\sqrt{1+\xi^2(\mathrm{s})}}\xi(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}=\xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)}$$

(٦٨-ب)

اکنون حالت $\mathrm{C}\geq-\mathrm{D}$ را در نظر می‌گیریم. در اینصورت $\mathrm{C}\geq-\mathrm{D}\cos(\mathrm{s})$ ، یعنی $\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\mathrm{s})\geq0$. این فرض نوسانی بودن پاسخ سیستم را تضمین می‌نماید که در ذیل به تشریح آن می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم $\xi(0)>0$. آنگاه لااقل در یک همسایگی داریم $\xi(\eta)>0$.

چون

$$(1+\xi^2)\frac{\xi''}{\xi}+\xi'^2+[\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\eta)]\Longrightarrow\frac{\xi''}{\xi}\leq0$$

(٦٩)

لذا به ازای این مقادیر η، $\xi''(\eta)<0$ و بنا بر قضیه میانگین وقتی $\eta>0$ در همسایگی مذکور باشد $\xi'(\eta)-\xi(0)=\eta\xi''(\eta)<0$ ، یعنی $\xi'(\eta)<\xi'(0)$. بنابراین با ترقی $\eta>0$ ابتدا انتگرال در (٦٨-ب) مثبت است و ترقی می‌کند و لذا حاصلضرب $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ تنزل خواهد کرد. اگر به ازای این η ها، $\xi'(\eta)>0$ باشد آنگاه این وضعیت نمیتواند برای مدت طولانی ادامه یابد زیرا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\frac{\xi(\mathrm{s})}{\sqrt{1+\xi^2(\mathrm{s})}}\right]=\frac{\xi'(\mathrm{s})}{\left(1+\xi^2(\mathrm{s})\right)^{\frac{3}{2}}}>0$$

(۷۰)

بنابراین داریم:

$$\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}+\int_0^{\eta}\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}\cos(\mathrm{s})}{\sqrt{1+\xi^2(0)}}\xi(0)\,\mathrm{ds}<\xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)}$$

(۷۱-الف)

یعنی

$$\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}+\left(C\eta+D\sin(\eta)\right)\frac{\xi(0)}{\sqrt{1+\xi^2(0)}}<\xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)}$$

(۷۱–ب)

که طرف چپ رابطه (۷۱–ب) مثبت و بدون کران بالا افزایش می‌یابد در صورتیکه طرف راست (۷۱–ب) ثابت است. پس باید پس از مدت کوتاهی $\xi'(\eta)<0$ و تابع $\xi(\eta)$ نزولی شود. در اینصورت با وجود تنزل $\xi(\eta)$، به علت مثبت بودن آن انتگرال سمت چپ (٦٨–ب) صعودی است و این وضع ادامه دارد تا $\xi(s)$ صفر و سپس منفی شود. اگر $\xi(s)$ صفر نشود و همواره مثبت باقی بماند،

آنگاه باید با افزایش s مقادیر $\xi(s)$ به صفر میل کند زیرا در غیر اینصورت به ازای α مثبت ثابتی باید $\xi(s)>\alpha$ و $\mathrm{Inf}(f(s))=\alpha$, $f(s)\to\alpha$ در اینصورت با افزایش η مثبت چون $\frac{\xi''(s)}{\xi(s)}<0$، لذا $\xi''(\eta)$ منفی و $\xi'(\eta)$ نزولی است. پس به ازای هر $\varepsilon>0$ یک M>0 موجود است به گونه‌ای که $\eta>M\Rightarrow|f(\eta)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$. بنا براین داریم:

$$\forall\,\eta_1,\eta_2>M\Rightarrow|f(\eta_2)-f(\eta_1)|<\varepsilon$$

(۷۲)

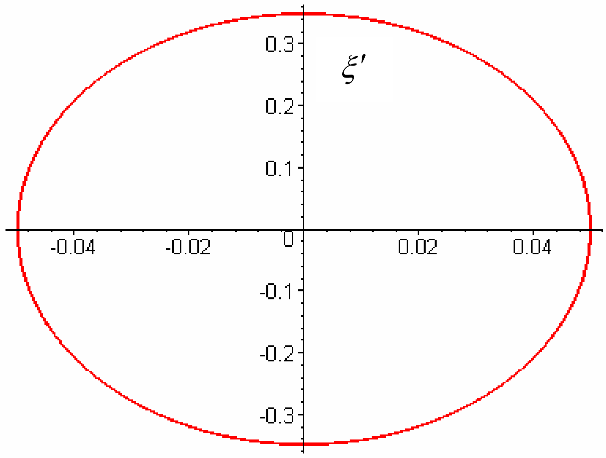
و بنابر قضیه میانگین داریم:

$$|f(\eta_2)-f(\eta_2)|=|\eta_2-\eta_1||f'(c)|<\varepsilon$$

(۷۳)

چون $\varepsilon>0$ به دلخواه می‌تواند کوچک باشد اگر در (۷۳) قرار $\eta\to\infty$ دهیم، آنگاه به تناقض می‌رسیم. بنابراین یا باید $\lim_{\eta\to\infty}\xi(\eta)=0$ و یا اینکه بعد از مدت کوتاهی (متناهی) باید $\xi(\eta)$ صفر و سپس منفی شود. وقتی با افزایش η مقادیر $\xi(\eta)$ منفی است، آنگاه انتگرال

موجود در سمت چپ (٦٨–ب) کاهش می‌یابد. در اینصورت $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ افزایش می‌یابد در حالی که منفی است. از دیدگاه دیگر نیز چون $\frac{d}{d\eta}\left[\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}\right]=-\frac{C+D\cos(\eta)}{\sqrt{1+\xi^2(\eta)}}\xi(\eta)$، لذا وقتی $\xi(\eta)$ صفر شد، تابع حاصلضرب $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ نیز به مینیمم مقدار خود خواهد رسید.



شکل ۸: پاسخ معادله (۲۹) در فضای فاز.

با ادامه افزایش η چون $\xi(s)$ منفی است, لذا انتگرال در (٦٨-ب) باز هم کاهش می یابد و $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ افزایش پیدا می کند تا اینکه این حاصلضرب به صفر برسد, یعنی در لحظه ای مقدار $\xi'(\eta)$ صفر شود (اگر حاصلضرب مذکور به صفر نرسد و همچنان منفی بماند باز هم به تناقض می رسیم) بعد از آن $\xi'(\eta)$ مثبت می شود. یعنی تابع $\xi(\eta)$ از مینیمم مقدار خود گذشته و شروع به ترقی می کند و $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ همچنان افزایش می یابد در حالیکه مثبت است. (یعنی افزایش $\xi'(\eta)$ باید کاهش $\xi^2(\eta)$ را جبران کند) در لحظه η_* انـــتگرال سمت چپ (٦٨-ب) صفر شود, می رسیم به رابطه $\xi'(\eta_*)\sqrt{1+\xi^2(\eta_*)} = \xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)}$. چون $\xi(\eta_*)<0$ ، لذا انتگرال سمت چپ (٦٨-ب) به کاهش خود ادامه می‌دهد و منفی می‌شود. با افزایش η چون اکنون $\xi'(\eta)>0$، لذا تابع $\xi(\eta)$ صعودی است تا در $\eta=\eta_{**}$ صفر شود و مجدداً مثبت شود و به لحظه τ ای برسیم که $\xi(\tau)>0$ و انتگرال سمت چپ (٦٨-ب) مجدداً به صفر برسد. نقطه $\eta=\eta_{**}$ نقطه ماکزیمم موضعی حاصلضرب $\xi'(\eta)\sqrt{1+\xi^2(\eta)}$ و نقطه مینیمم موضعی انتگرال سمت چپ (٦٨-ب) می‌باشد. با مثبت شدن مجدد تابع $\xi(\eta)$ و با افزایش η به لحظه $\eta=\tau$ می‌رسیم که در آن انتگرال سمت چپ (٦٨-ب) صفر می‌شود. در این لحظه مجدداً به تساوی $\xi'(\tau)\sqrt{1+\xi^2(\tau)} = \xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)}$ می‌رسیم. بازه $[0,\tau]$ یک دوره تغییرات تابع $\xi(\eta)$ را نمایش می‌دهد که شاهد پاسخی نوسانی می‌باشیم. مشابه مطالب تبیین شده فوق را می‌توان برای حالتی که $\xi(0)<0$ باشد نیز گسترش داد.

همانطور که مشاهده شد رابطه (٦٨-ب) در انتهای بازه $[0,\tau]$ به رابطه زیر تبدیل می‌گردد:

$$\xi'(\tau)\sqrt{1+\xi^2(\tau)} = \xi'(0)\sqrt{1+\xi^2(0)} \qquad (٧٤)$$

در قسمت قبل با استفاده از قضایای نقطه ثابت شاودر وجود پاسخ پریدیک به اثبات رسید. بنابر این می‌توان نتیجه گرفت که

پاسخ سیستم در صفحه فازی با شرط $C \geq -D$ به یک Limit Cycle میل خواهد نمود. حال اگر $\xi(\tau) < \xi(0)$ باشد در اینصورت بنابر رابطه (۷٤)، $\xi'(\tau) > \xi'(0)$ خواهد بود و نشانگر این است که شرایط اولیه در داخل Limit Cycle قرار گرفته است که پاسخ سیستم به آن نزدیک خواهد شد.

در صورتیکه $\xi(\tau) > \xi(0)$ باشد، بنابر رابطه (۷٤)، $\xi'(\tau) < \xi'(0)$ خواهد شد که در اینصورت یا با وجود Limit Cycle شرایط اولیه در خارج آن واقع است و یا بنا به آنچه تشریح شد، سیستم دارای Limit Cycle نبوده و پاسخ مستقیماً به سمت صفر میل می‌نماید.

در صورتیکه $\xi(\tau) = \xi(0)$ باشد، بنابر رابطه (۷٤)، $\xi'(\tau) = \xi'(0)$ خواهد بـــود که در اینصورت شرایط اولیه

مستقیماً بر روی Limit Cycle قرار دارد و پاسخ سیستم نوسانی کامل می‌باشد.

نتیجه گیری

ارتعاشات جانبی تیر الاستیک یک سر مفصل ثابت و یک سر مفصل متحرک در راستای تیر، تبدیل به معادله پارامتریک دیفرانسیل معمولی غیر خطی (۱۵) یا (۲٦) شد. رفتار ارتجاعی تیر با تحریک دینامیکی u و فرکانس ω شکل گرفته است. نشان داده شد که به ازای حدهای بالای $|Y| \le K$ و $|\dot{Y}| \le \sqrt{C}K$، هر شرط اولیه‌ای منجر به پاسخ پریودیک خواهد شد. در واقع حد بالای K وجود پاسخ پریودیک را با توجه به نامعادله (۵۸) با دوره تناوب τ تضمین می کند.

همچنین با استفاده مستقیم از معادلات دیفرانسیـــــل (۲٦) وجود پاسخ نوسانی مستقلاً بررسی شد که شرط وجود جواب پریودیک مجدداً بدست آمد. با این تحلیل امکان پیش بینی اینکه جواب به سمت صفر میل می‌نماید و یا اینکه پریودیک خواهد بود فراهم شده است.

مراجع

1 - Chen, Y. (1963). "On the vibration of beams or rods carrying a connected mass." *Trans. ASME. J. Appl. Mech.,* Vol. 30, PP. 310.

2 – Parnell, L. A. and Cobble, M. H. (1976). "Lateral displacement of a vibrating cantilever beam with a concentrated mass." *J. Sound Vib.*, Vol. 44, No. 4, PP. 499.

3 - To, C. W. S. (1982). “Vibration of a cantilever beam with a base excitation and tip mass.” *J. Sound Vib.,* Vol. 83, PP. 445.

4 – Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H. (1986). “Vibration of an elastically restrained cantilever beam of varying cross-section with tip mass of finite length.” *J. Sound Vib.*, Vol. 108, PP. 123.

5 – Liu, W. H. and Huage, C. C. (1998). “Vibration of a constrained beam carrying a heavy tip body.” *J. Sound Vib.,* Vol. 123, No. 15.

6 - Hoppmann, W. H. (1952). “Forced lateral vibration of beam carrying a concentrated mass.” *Trans ASME. Journal of Applied Mechanics 19,* PP. 301-307.

7 – Esmailzadeh, E. and Nakaie-Jazar, G. (1998). “Periodic behavior of a cantilever beam with end mass subjected to harmonic base excitation.” *Int. J. Non-Linear Mechanics,* Vol. 33, No. 4, PP. 567-577.

8 - Griffel, D. H. (1988). *Applied functional analysis,* Third Edition, ELLIS HORWOOD LIMITED, Bristo.

9 – Mehri, B. and Hamedani, G. G. (1975). “On the existence of periodic solutions of non-linear second order differential equations.” *SIAM Journal of Applied Mathematics,* Vol. 29, PP. 72-76.