نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۶، شماره ۴، اسفندماه ۱۳۸۱، از صفحه ۴۷۷ تا ۴۸۲

پایداری مجانبی اپراتورهای فوق کروی[۱]

غلامرضا شهریار حشمتی
استادیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۷/۱۰، تاریخ تصویب ۸۱/۱۱/۱۵)

چکیده

اپراتورهای فوق کروی برای اندازه $d\mu_\alpha(x)=(1-x^2)^\alpha dx$ تشکیل یک سیستم متعامد بر بازه $[-1,1]$ می دهند. برای $\alpha>-\frac{1}{2}$، فرمول ضرب گگنبائر[۲] نشان می دهد که هسته گگنبائر تصادفی است.

در این مقاله با درنظر گرفتن این هسته یک اپراتور مارکف[۳] $P_{\alpha x}$ تعریف می‌شود و با استفاده از خواص اپراتورهای مارکف پایداری مجانبی آن به ازای $\frac{1}{2}\le\alpha\le 0$ ثابت می‌گردد. سپس این نتیجه با استفاده از تکنیک های آنالیز هارمونیک[۴] برای $-\frac{1}{2}\ge\alpha$ تعمیم می‌یابد.

واژه‌های کلیدی : اپراتورهای مارکف، پایداری مجانبی، چند جمله‌ای‌های فوق کروی، هسته گگنبائر

مقدمه

اولین بار آنالیز هارمونیک در مورد چندجمله ای های فوق کروی توسط هیرشمن[۵] [۴] بررسی شد. بسیاری دیگر از خواص این چندجمله‌ای‌ها توسط گاسپر[۶] [۳،۲] به اثبات رسیده است. در مورد پایداری مجانبی اپراتورهای مارکف می توان به [۷] رجوع کرد.

فرض کنیم (Ω, A, μ) یک فضای اندازه و $D=\{f\in L^1(\Omega, d\mu)\,|\, f\ge 0,\ \|f\|_1=1\}$ فضای چگالی‌های آن باشد. هر اپراتور خطی $P: L^1\to L^1$ که در دو شرط زیر صدق کند یک اپراتور مارکف نامیده می‌شود.

الف) $Pf\ge 0$ برای هر $f\ge 0$ و $f\in L^1$؛

ب) $\|Pf\|_1=\|f\|_1$ برای هر $f\ge 0$ و $f\in L^1$.

اگر P یک اپراتور مارکف باشد، $\{P^m\}$ بطور مجانبی پایدار نامیده می‌شود هرگاه یک چگالی $f^*\in D$ وجود داشته باشد به طوری که $Pf^*=f^*$ و

$$\lim_{m\to\infty}\|P^m f-f^*\|_1=0 \quad \text{برای هر } f\in D \tag{1}$$

هر هسته تصادفی[۷] K، یعنی هر تابع اندازه پذیر $k:\Omega\times\Omega\to\mathbf{R}$ که در دو شرط زیر

$$k(x,y)\ge 0$$

$$\int_\Omega k(x,y)d\mu(x)=1$$

صدق کند، با رابطه

$$Pf(x)=\int_\Omega k(x,y)f(y)d\mu(y),\quad f\in L^1$$

یک اپراتور انتگرال تعریف می‌کند که یک اپراتور مارکف است (به [۶] یا [۷] رجوع شود).

در [۷] یک شرط کافی برای پایداری مجانبی $\{P^m\}$ بصورت زیر بیان شده است:

لم[۸]۱. فرض کنیم P یک اپراتور مارکف و $k_m:\Omega\times\Omega\to\mathbf{R}+$ هسته تصادفی متناظر با P^m باشد، در این صورت، شرط

$$\int_\Omega \inf_{y\in\Omega} k_m(x,y)d\mu(x)>0 \tag{2}$$

پایداری مجانبی $\{P^m\}$ را نتیجه می‌دهد.

در این مقاله، با درنظر گرفتن هسته گگنبائر یک اپراتور مارکف بصورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم

$$Q_n^\alpha(x)=\frac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}(1-x^2)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{\alpha+n}$$

چند جمله‌ای فوق کروی[۹] از مرتبه n و با اندیس $\alpha>-1$ باشد، لازم به ذکر است که این چند جمله‌ای‌ها به ازای $\alpha=-\frac{1}{2}$ چند جمله‌ای های چیبیچف[۱۰] نوع اول :

$$Q_n^{-\frac{1}{2}}(\cos\theta) = \cos n\theta$$

به ازای $\alpha = 0$، چند جمله‌های لژاندر[11]،

$$Q_n^{0}(x) = P_n(x)$$

و به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، چند جمله‌ای های چبیچف نوع دوم می‌باشند.

$$Q_n^{\frac{1}{2}}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\sin\theta}$$

این چند جمله‌ای‌ها روی بازه $I = (-1,1)$ و برای اندازه $d\mu_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha dx$ با رابطه

$$\int_{-1}^{1} Q_m^\alpha(x)\, Q_n^\alpha(x)\, d\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 0 , & n\neq m \\ (\omega_n^\alpha)^{-1}, & n = m \end{cases}$$

که در آن

$$\omega_n^\alpha = \frac{(2n+2\alpha+1)\,\Gamma(n+2\alpha+1)}{2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)^2\,\Gamma(n+1)}$$

یک دستگاه متعامد تشکیل می دهند (به [1] رجوع شود).

این چند جمله‌ای‌ها دارای خواص زیراند [1].

$$Q_n^\alpha(1) = 1$$

(۳)

$$Q_0^\alpha(x) = 1\ ,\ Q_1^\alpha(x) = x$$

(۴)

$$Q_n^\alpha(-x) = (-1)^n\ Q_n^\alpha(x)$$

(۵)

$$n \geq 1 \text{ و } |x| < 1 ،\alpha > -\frac{1}{2} \text{ اگر } |Q_n^\alpha(x)| < 1$$

(۶)

$$(n\geq 1)\ \ Q_1^\alpha(x)Q_n^\alpha(x) = \frac{n}{2n+2\alpha+1} Q_{n-1}^\alpha(x) + \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} Q_{n+1}^\alpha(x).$$

(۷)

برای $\alpha > -\frac{1}{2}$، فرمول گگنبائر برقرار است [2]، [3].

$$(-1<x,y<1)\ Q_n^\alpha(x)\,Q_n^\alpha(y) = \int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z)\, Q_n^\alpha(z)\, d\mu_\alpha(z)$$

(۸)

با

$$G_\alpha(x,y,z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha(1-z^2)^\alpha}$$

که در آن f_+ قسمت مثبت[12] تابع f است. بنابراین

$$G_\alpha(x,y,z) \geq 0 .$$

با قرار دادن $n = 0$ در رابطه (۸) و استفاده از رابطه (۴) و تقارن G_α نسبت به x ، y و z بدست می‌آید.

$$\int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z)\, d\mu_\alpha(y) = 1$$

که نشان می دهد که G_α یک هسته تصادفی است.

بنابراین می‌توان اپراتور مارکف وابسته به G_α را که اپراتور فوق کروی نام دارد به صورت زیر تعریف کرد:

$$[P_{\alpha,x} f](y) = \int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z) f(z)\, d\mu_\alpha(z)$$

$$\forall f \in L^1(I, d\mu_\alpha) .$$

تقارن G_α نسبت به x ، y و z نتیجه می دهد.

$$[P_{\alpha,x} f](y) = [P_{\alpha,y} f](x)$$

و

$$\langle P_{\alpha,x} f, g\rangle = \langle f, P_{\alpha,y}\, g\rangle$$

(۹)

رابطه اخیر نشان می دهد که $P_{\alpha,x}$ در $L^2(d\mu_\alpha)$ یک اپراتور خود الحاقی است. هدف اصلی این مقاله، اثبات قضیه زیر است .

قضیه ۱

برای هر $\alpha > -\frac{1}{2}$ و هر $|x| < 1$ ، $\{P_{\alpha,x}^m\}$ بطور مجانبی پایدار است و چگالی حدی آن برابر است با ω_0^α ۱ که در آن ۱ تابع ثابت $1(x) = 1$ می‌باشد.

ابتدا با استفاده از لم۱ این قضیه را به ازای $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ ثابت کرده و سپس با استفاده از یک حاصلضرب تعمیم یافته در $L^1(d\mu_\alpha)$ و جبر A_α قضیه را برای هر $\alpha > -\frac{1}{2}$ تعمیم می‌دهیم.

اثبات قضیه ۱ به ازای $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$

فرض کنیم $X_{x,y} \subset (-1,1)$ تکیه گاه مثبت[13] تابع $z \to 1-x^2-y^2-z^2+2xyz$ باشد، یعنی ،

$$\int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z)d\mu_\alpha(z) = \int_{X_{x,y}} G_\alpha(x,y,z)d\mu_\alpha(z)$$

واضح است که برای هر x و y در (۱،۱-)، $X_{x,y}$ دارای اندازه مثبت است و $(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)^{\alpha-\frac{1}{2}} \ge 1$ برای هر $z \in X_{x,y}$ و هر $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$. بنابراین

$$\inf\left\{G_\alpha(x,y,z) \mid -1<x,y<1, z\in X_{x,y}\right\} \ge \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}, \ \forall \alpha \in [0,\frac{1}{2}]$$

رابطه اخیر نشان می دهد که لم۱ به ازای $m = 1$ برقرار است و در نتیجه $\{P_{\alpha,x}\}$ به ازای $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ بطور مجانبی پایدار می‌باشد.

حاصلضرب کانولوشن تعمیم یافته[14] در $L^1(d\mu_\alpha)$ و جبر A_α

برای هر f و g در $L^1(d\mu_\alpha)$ ، حاصلضرب کانولوشن تعمیم یافته f و g با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$(f*g)(x) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z)f(y)g(z)d\mu_\alpha(y)d\mu_\alpha(z) = <\bar{f}, P_{\alpha,x}g>$$

شایان ذکر است که این حاصلضرب برای هر $\alpha \ge -\frac{1}{2}$ یک حاصلضرب متمایزی است. لم های زیر نشان می دهند که این حاصلضرب دارای شباهت زیادی با حاصلضرب کانولوشن معمولی فضای L^1 است. در ادامه، نرم $f \in L^p(d\mu_\alpha)$ را با

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (d\mu_\alpha(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می کنیم :

لم ۲ ([۲]، [۳]).

الف) $L^1(d\mu_\alpha)$ با حاصلضرب * یک جبر باناخ[15] جابجائی نیمه ساده[16] است.

ب) فرض کنیم $1 \le p,q,r \le \infty$ و $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ ، اگر $f \in L^p(d\mu_\alpha)$ و $g \in L^q(d\mu_\alpha)$، آن گاه $f*g \in L^r(d\mu_\alpha)$ و داریم :

$$\|f*g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

برای هر $f \in L^1(d\mu_\alpha)$ ، ضریب فوریه تعمیم یافته f را با رابطه

$$\hat{f}(n) = \omega_n^\alpha \int_I f Q_n^\alpha \, d\mu_\alpha$$

تعریف می کنیم.

لم ۳. برای هر $f,g \in L^1(d\mu_\alpha)$ داریم

$$\widehat{f*g}(n) = (\omega_n^\alpha)^{-1} \hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

اثبات

این لم از رابطه

$$\widehat{f*g}(n) = \omega_n^\alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x)g(y)d\mu_\alpha(x) d\mu_\alpha(y) \int_{-1}^{1} G_\alpha(x,y,z)Q_n^\alpha(z)d\mu_\alpha(z)$$

و رابطه (۸) نتیجه می‌شود.

حال فرض کنیم A_α جبر توابع f پیوسته روی بازه I ، به صورت

$$f = \sum_{n\ge 0} \hat{f}(n)Q_n^\alpha$$

باشد به طوری که $\|f\|_\alpha = \sum_{n\ge 0} |\hat{f}(n)| < \infty$.

لم ۴. A_α با نرم $\|.\|_\alpha$ برای حاصلضرب ساده توابع یک جبر باناخ جابجائی است.

اثبات

کافی است ثابت کنیم

$$\|fg\|_\alpha \le \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha . \quad (10)$$

رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر

$$Q_m^\alpha Q_n^\alpha = \sum_r h_{m,n,r}^\alpha Q_r^\alpha$$

(۱۱)

نوشت که در آن r روی مجموعه اعداد طبیعی به طوری که $h^\alpha_{m,n,r}\neq 0$ یعنی روی مجموعه اعداد طبیعی $|n-m|\le r\le n+m$ و $m+n+r$ زوج تغییر می‌کند.

با محاسبه (۱۱) در نقطه $x = 1$ بدست می‌آید:

$$\sum_r h^\alpha_{n,m,r} = 1$$

(۱۲)

بنابراین اگر $f = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)Q_n^\alpha$ و $g = \sum_{n\geq 0} \hat{g}(n)Q_n^\alpha$ با استفاده از روابط تعامد بین Q_r^α و Q_k^α بدست می آید.

$$\widehat{fg}(k) = \omega_k^\alpha \int_I \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \hat{f}(n)Q_n^\alpha(x)\hat{g}(m)Q_m^\alpha(x)Q_k^\alpha(x)d\mu_\alpha(x)$$

$$= \omega_k^\alpha \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \hat{f}(n)\hat{g}(m) \int_I \sum_r h^\alpha_{n,m,r} Q_r^\alpha(x)Q_k^\alpha(x)d\mu_\alpha(x)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} h^\alpha_{n,m,k}\hat{f}(n)\hat{g}(m)$$

بالاخره با استفاده از رابطه (۱۲) داریم :

$$\|fg\|_\alpha = \sum_{k\geq 0} |\widehat{fg}(k)| = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} |\hat{f}(n)\hat{g}(m)(\sum_{n\geq 0} h^\alpha_{n,m,k})| \leq (\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|)(\sum_{m\geq 0} |\hat{g}(m)|)$$

که رابطه (۱۰) را نتیجه می دهد. از لم زیر در ادامه استفاده می‌شود.

لم ۵. برای هر $f\in A_\alpha$، توابع $g,h\in L^2(d\mu_\alpha)$ وجود دارند به طوری که $f = g*h$ و به طوری که

$$\|f\|_\alpha = \|g\|_2^2 = \|h\|_2^2$$

(۱۳)

برعکس اگر $g,h\in L^2(d\mu_\alpha)$ آنگاه $g*h\in A_\alpha$ و

$$\|g*h\|_\alpha \leq \|g\|_2 \|h\|_2$$

(۱۴)

اثبات

برای هر $f\in A_\alpha$، تعریف می کنیم $\hat{g}(n) = \sqrt{\omega_n^\alpha |\hat{f}(n)|}$،

$$\hat{h}(n) = \begin{cases} 0 & , \ \hat{f}(n) = 0 \\ \sqrt{\omega_n^\alpha}\dfrac{\hat{f}(n)}{\sqrt{|\hat{f}(n)|}} & , \ \hat{f}(n)\neq 0 \end{cases}$$

$$h = \sum_{n\geq 0} \hat{h}(n) Q_n^\alpha \quad \text{و} \quad g = \sum_{n\geq 0} \hat{g}(n) Q_n^\alpha$$

طبق لم ۳،

$$\widehat{g*h}(n) = (\omega_n^\alpha)^{-1}\hat{g}(n)\hat{h}(n) = \hat{f}(n)$$

چون $\{\sqrt{\omega_n^\alpha}\, Q_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ یک دستگاه متعامد کامل یکه[17] در $L^2(d\mu_\alpha)$ است و $\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)| < \infty$، بدست می آید $f = g*h$ و رابطه (۱۳) نیز از فرمول پارسوال[18] نتیجه می‌شود.

برعکس اگر $g,h\in L^2(d\mu_\alpha)$، با استفاده از نامساوی کشی - شوارتز، داریم

$$\sum_{n\geq 0} |\widehat{g*h}(n)| = \sum_{n\geq 0} |\frac{1}{\omega_n^\alpha}\hat{g}(n)\hat{h}(n)|$$

$$\leq (\sum_{n\geq 0} |\frac{1}{\omega_n^\alpha}\hat{g}(n)^2|)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\omega_n^\alpha} |\hat{h}(n)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

که رابطه (۱۴) را نتیجه می دهد.

لم ۶. انژکسیون[19] A_α در $L^1(d\mu_\alpha)$ پیوسته است و برای هر p $(1\leq p < \infty)$، A_α در $L^p(d\mu_\alpha)$ چگال می‌باشد.

اثبات

فرض کنیم $f = \sum_{n\geq 0} a_n Q_n^\alpha$ با $\sum_{n\geq 0} |a_n| < \infty$، چون $|Q_n^\alpha(x)| \leq 1$ ازای هر $|x| \leq 1$، داریم

$$\|f\|_1 \le \sum_{n\ge 0} |a_n| \int_T |Q_n^\alpha(x)| d\mu_\alpha(x) \le$$

$$\frac{1}{\omega_0^\alpha} \sum_{n\ge 0} |a_n| = \frac{1}{\omega_0^\alpha} \|f\|_\alpha \qquad (۱۵)$$

چگالی A_α در $L^p(d\mu_\alpha)$ از $C^\infty(I)\subset A_\alpha$ نتیجه می‌شود.

لم ۷. اپراتور فوق کروی $P_{\alpha,x}$ جبر A_α را در خودش می نگارد و یک انقباض[۲۰] این جبر است.

اثبات .

از فرمول (۸) داریم :

$$\widehat{P_{\alpha,x} f}(n) = \omega_0^\alpha \int_I \left(\int_I G_\alpha(x,y,z) f(z) d\mu_\alpha(z) \right) Q_n^\alpha(y) d\mu_\alpha(y)$$

$$= \omega_0^\alpha \int_I Q_n^\alpha(x) Q_n^\alpha(z) f(z) d\mu_\alpha(z) = Q_n^\alpha(x) \hat{f}(n)$$

بنابراین ، طبق رابطه (۶) ،

$$\|P_{\alpha,x} f\|_\alpha = \sum_{n\ge 0} |\widehat{P_{\alpha,x} f}(n)| =$$

$$\sum_{n\ge 0} |Q_n^\alpha(x)\hat{f}(n)| \le \sum_{n\ge 0} |\hat{f}(n)| = \|f\|_\alpha$$

اثبات قضیه ۱

فرض کنیم $D_0 = D\cap A_\alpha$ ، چون طبق لم ۶ ، A_α در $L^1(d\mu_\alpha)$ چگال است، D_0 نیز در D چگال است. به علاوه چون $P_{\alpha,x}$ یک اپراتور مارکف و بنابراین یک انقباض L^1 است، کافی است شرط (۱) را برای تنها $f\in D_0$ بررسی کنیم.

طبق فرمول (۸) برای $f\in D_0$ داریم ،

$$[P_{\alpha,x}^m f](y) = \sum_{n\ge 0} Q_n^\alpha(x)^m Q_n^\alpha(y) \hat{f}(n)$$

ولی برای $f\in D_0$ ،

$$\hat{f}(0) = \omega_0^\alpha \int_I f d\mu_\alpha = \omega_0^\alpha \, 1$$

بنابراین، طبق روابط (۱۴) و (۱۵)،

$$\lim_{m\to\infty} \|P_{\alpha,x}^m f - \omega_0^\alpha 1\|_1 \le$$

$$\lim_{m\to\infty} (\omega_0^\alpha)^{-1} \sum_{n\ge 1} |Q_n^\alpha(x)^m \hat{f}(n)| = 0$$

در اینجا جای حد و سیگما را با استفاده از همگرائی مسلط[۲۱] عوض کرده و از شرط آنکه به ازای هر $x\in I$ ، $\lim_{m\to\infty} |Q_n^\alpha(x)|^m = 0$ استفاده نموده‌ایم.

نتیجه‌گیری

پایداری مجانبی اپراتور فوق کروی که یک اپراتور مارکف می‌باشد به اثبات رسید.

تقدیر و تشکر

این مقاله تحقیقی، مستخرج از طرح پژوهشی ۶۱۱/۳/۶۹۴ با پشتیبانی مالی و معنوی دانشکده فنی دانشگاه تهران میسر گردید. لازم می دانم از دانشگاه تهران و دانشکده فنی بخاطر پشتیبانی بی دریغشان از امر پژوهش تشکر نمایم.

مراجع

1 - Erdelyi, A. (1953). *Higher transcendental functions,* Vol. 1, MacGraw Hill, New York.

2 - Gasper, G. (1971). "Positivity and the convolution structure for Jacobi series." *Ann. Math., 93,* PP. 112-118.

3 - Gasper, G. (1972). "Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel." *Ann. Math., 95* PP. 261-280.

4 - Hirschman, Jr., I. I. (1956). "Harmonic analysis and the ultraspherical polynomials." *Symposium of the Conference on Harmonic Analysis (Cornell).*

5 - Hirschman, Jr. (1956). *Sur les polynomes ultraspheriques, C. R. Acad. Sci.,* Paris 242, PP. 2212-2214.

6 - Lasota, A. and Mackey, M. (1958). *Probabilistic properties of deterministic systems,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, London.

7 - Lasota, A. and Mackey, M. (1994). *Chaos, fractals and noise, stochastic aspects of dynamics,* Springer Verlag, Berlin, New York.

8 - Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach lattices,* Springer Verlag, New York, Berlin.

9 - Schaefer, H. (1974). *Banach lattices and positive operators,* Springer Verlag, New York Berlin.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Ultraspherical Operators

2 - Gegenbauer

3 - Markov

4 - Harmonic Analysis

5 - Hirschman

6 - Gasper

7 - Stochastic Kernel

8 - Lemma

9 - Ultraspherical Polynomial

10 - Tchebichef

11 - Legendre

12 - Positive Part

13 - Positive Support

14 - Generalized Convolution Product

15 - Banach

16 - Semisimple

17 - Complete Orthonormal System

18 - Parseral

19 - Injection

20 - Contraction

21 - Dominated Convergence