

# حل دقیق معادلات لایه مرزی برای یک سیال ویسکوالاستیک از نوع مرتبه دوم در جریان بالای یک صفحه ساکن

کیوان صادقی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مهدی شریفی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۱۲/۱۹، تاریخ تصویب ۸۱/۸/۴)

## چکیده

در این مقاله، اثر خواص الاستیک یک سیال (غیر نیوتنی) بر روی خصوصیات لایه مرزی آن بطور نظری مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، جریان آرام سیال ویسکوالاستیکی از نوع مرتبه ۲ را در بالای یک صفحه ساکن در نظر گرفته و تاثیر الاستیسیته سیال را بر روی ضریب اصطکاک پوسته ای آن بررسی نموده ایم. برای بدست آوردن معادلات حرکت، با توجه به بالا بودن عدد رینولدز، از تقریب لایه مرزی استفاده شده است. در مرحله بعد با استفاده از مفهوم تابع جریان و نیز معرفی نمودن یک متغیر تشابه ای، معادلات لایه مرزی برای سیال مورد نظر از فرم PDE به یک تک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه ۴ از نوع ODE تبدیل شدند. با توجه به ظاهر شدن مولفه مکانی X در این معادله، نتیجه گرفته شد که پروفیل های سرعت غیر متشابه هستند. با دسته بندی X در یک گروه بدون بعد (که عدد دورا یا عدد الاستیک نامیده میشود) سعی شد که برای این جریان خاص حلهای مشابه بطور موضعی پیدا شود. برای حل این معادله از ترکیبی از روش پرتابه ای و روش تفاضل محدود استفاده شد. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که اگر الاستیسیته سیال به اندازه کافی بالا باشد، سرعت سیال در داخل لایه مرزی ممکن است از سرعت سیال در خارج از این لایه بیشتر گردد. محاسبات انجام شده همچنین نشان می دهد که در مورد سیالات ویسکوالاستیک، تنش برشی در دیواره بیش از مقدار آن برای یک سیال نیوتنی است و هر چقدر الاستیسیته سیال بیشتر باشد این اختلاف نیز بیشتر می گردد. در مورد ضخامت لایه مرزی نیز محاسبات انجام شده حاکی از آن است که الاستیسیته سیال موجب کاهش در ضخامت لایه مرزی می گردد.

**واژه های کلیدی:** سیال ویسکوالاستیک، سیال مرتبه دوم، لایه مرزی، جریان بلازیوس، روش پرتابی، روش تفاضل

محدود

## مقدمه

نبوده است. ایده اساسی در این تئوری، تقسیم بندی جریان حول یک جسم ضخیم به یک ناحیه لزج و یک ناحیه غیرلزج است. در سایه این تقسیم بندی، نه تنها امکان مدلسازی ریاضی بسیاری از جریانهای پیچیده فراهم گردید بلکه در اغلب موارد این امکان بوجود آمد که بتوان معادلات حاکمه را بدون نیاز به روشهای پیچیده و در زمانی کوتاه حل نمود. نتایج حاصل از حل این معادلات تقریباً در تمامی موارد با نتایج تجربی هماهنگی بسیار خوبی نشان می دادند بطوریکه این تئوری بسرعت از طرف جامعه مهندسی مهر تایید دریافت نمود.

علیرغم موفقیت های چشمگیر تئوری لایه مرزی، باید به این نکته اذعان داشت که متاسفانه این تئوری فقط در مورد

مکانیک سیالات، همچون بسیاری از علوم دیگر، رشد و گسترش خود را تا حد زیادی مدیون برخی از ایده ها و تئوریهای انقلابی همچون تئوری لایه مرزی و تئوری فیلم نازک می باشد. از میان این تئوریها، بی تردید تئوری لایه مرزی از جایگاهی ویژه در این علم برخوردار است. این تئوری که در سال ۱۹۰۴ میلادی توسط پرائتل ابداع گردید و از آن تحت عنوان تقریب لایه مرزی نیز یاد می شود [۱] خیلی سریع کارآیی خود را در شاخه های مختلف علم مکانیک سیالات بویژه هوانوردی نشان داد. در واقع میتوان به جرات ادعا نمود که موفقیت های چشمگیر علوم هوانوردی در اوایل قرن بیستم و قبل از اختراع کامپیوتر بدون استفاده از این تئوری هرگز امکان پذیر

است از اینرو نمیتوان از آن انتظار داشت که بتواند رفتار سیالات مهمی همچون محلولها و مذابهای پلیمری را (که بوضوح دارای خواص الاستیک می‌باشند) حتی بطور کیفی توجیه نماید.

سئوالی که در اینجا مطرح می‌گردد این است که چگونه میتوان ایده‌لایه‌مرزی را به یک سیال غیرنیوتنی از نوع ویسکوالاستیک تعمیم داد. برای پاسخ به این سؤال لازم است در معادله‌اساسی سیال مورد نظر علاوه بر ویسکوزیته آن، خواص الاستیک سیال نیز ظاهر شوند. متأسفانه در اغلب موارد معادلات اساسی سیالات ویسکوالاستیک بقدری پیچیده هستند که امکان استفاده از آنها در یک تحلیل تئوریک لایه‌مرزی وجود ندارد. از میان انواع مختلف سیالات ویسکوالاستیک، سیال مرتبه‌دو را میتوان به تعبیری جزو ساده‌ترین مدل‌های رئولوژیک بشمار آورد. این مدل رئولوژیک بکرات در مباحث مربوط به سیالات ویسکوالاستیک بکار رفته و می‌رود. در مطالعات مربوط به لایه‌های مرزی نیز پس از مقاله بحث بر انگیز Walters و Beard [۱۰] از این مدل رئولوژیک استفاده وسیعی شده و می‌شود [۱۱، ۱۲]. Walters و Beard رفتار یک سیال مرتبه‌۲ را در جریانی با نقطه سکون مورد مطالعه قرار دادند و به این نتیجه غیر مترقبه رسیدند که برای چنین سیالی، سرعت در داخل لایه‌مرزی باید بیش از سرعت در خارج از لایه گردد (این پیش بینی پس از گذشت نزدیک به ۳۰ سال هنوز از طریق آزمایشگاهی تایید نشده است!). در سالهای بعد، دنیای رئولوژی شاهد کاربرد وسیع سیال مرتبه‌۲ در انواع دیگر جریانهای لایه‌مرزی بوده است. از میان این جریانها، جریان در بالای یک صفحه ساکن بعلاوه اهمیت تاریخی آن (رجوع شود به حل کلاسیک بلازیوس) همواره مورد توجه محققین بوده است. بعنوان مثال، Activos و همکارانش [۴] لایه‌مرزی سیالات غیر نیوتنی از نوع نمایی را در بالای یک صفحه ساکن مورد مطالعه قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که در مورد سیالاتی که ویسکوزیته آنها با نرخ برش کاهش می‌یابد ضخامت لایه‌مرزی و ضریب اصطکاک کمتر از مقدار نیوتنی خواهد بود. در مورد سیالات ویسکوالاستیک Harris [۱۳] با استفاده از معادله انتگرال مومنتم استدلال نمود که در جریان بلازیوس، خواص الاستیک

سیالات نیوتنی کاربرد دارد و این در حالی است که در بسیاری از صنایع با سیالاتی سرو کار داریم که دارای رفتاری غیر نیوتنی هستند. محلولها و مذابهای پلیمری، مواد غذایی نیمه جامد، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگها و سوخته‌های پیشرفته، مواد دارویی، روغنهای چهار فصل، چسبهای مایع و انواع امولسیونها و سوسپانسیونها جزو سیالاتی بشمار می‌روند که بوضوح از تئوری لایه‌مرزی پرانتل تبعیت نمی‌نمایند. با توجه به اینکه در بسیاری از فرآیندها (همچون تولید نوار چسب و یا ساخت انواع قطعات پلاستیکی با استفاده از روش اگستروژن) امکان تشکیل لایه‌مرزی یک سیال غیر نیوتنی بر روی یک سطح جامد (بعنوان مثال، دیواره‌های یک قالب) وجود دارد بنابراین نیاز به یک تئوری قوی در مورد لایه‌مرزی سیالات غیر نیوتنی، مشابه آنچه که در مورد سیالات نیوتنی وجود دارد، همواره احساس می‌شده است [۸-۲].

علیرغم اهمیت موضوع در مورد سیالات غیر نیوتنی، متأسفانه باید اعتراف نمود که امکان دستیابی به یک تئوری جامع در مورد این دسته از سیالات (حداقل در آینده‌ای نزدیک) دور از تصور است. مشکل عمده در این رابطه، تنوع معادلات اساسی در مورد سیالات غیر نیوتنی است [۹]. در ضمن ویسکوزیته سیالات مزبور معمولاً ثابت نیست و با نرخ برش تغییر می‌کند که این امر به همراه خواص الاستیک سیالات مزبور، در کلی‌ترین حالت آن، پیچیدگی مبحث را دوچندان می‌نماید. خوشبختانه در بسیاری از موارد، سیالات غیر نیوتنی رفتار ویسکوزی از خود نشان می‌دهند که بخوبی توسط یک معادله توانی قابل بیان است. سیالات مزبور اصطلاحاً سیالات نمایی<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. مهمترین ویژگی این سیالات در این است که ویسکوزیته آنها ثابت نبوده و تابعی از نرخ برش است. با توجه به سادگی معادله اساسی این گونه سیالات نسبت به سایر انواع سیالات غیرنیوتنی، تعجبی ندارد که مطالعات اولیه در مورد لایه‌مرزی سیالات غیرنیوتنی مختص به این نوع خاص از سیالات بوده است [۵، ۴]. در حقیقت باید اذعان نمود که حتی امروزه نیز بخش عمده‌ای از مقالات علمی در مورد سیالات غیر نیوتنی به مطالعه این نوع خاص از سیالات اختصاص دارد [۶]. با اینوصف باید توجه داشت که یک سیال نمایی فاقد خواص الاستیک

توجه به اینکه هدف اصلی این کار تحقیقاتی مطالعه اثر خواص الاستیک یک سیال بر لایه مرزی آن است، بنظر می‌رسد که  $\Psi_1$  بتواند بتهنهایی اهداف این پروژه را برآورده نماید. در ضمن متذکر می‌گردد که در معادله ۱ از نوع خاصی از مشتق زمانی به نام مشتق Oldroyd استفاده شده‌است (از مشتق مزبور تحت عنوان Upper-Convected Time Derivative نیز یاد می‌شود که با علامت مثلث وارونه،  $\nabla$ ، در بالای کمیت مورد نظر مشخص می‌گردد). مشتق مزبور هنگامیکه بر روی یک تنسور همچون  $D$  اثر کند علاوه بر ترم آشنای مشتق مادی (که با یک نقطه در بالای کمیت مورد نظر نشان داده می‌شود) دو ترم دیگر بصورت زیر تولید می‌کند:

$$\overset{\nabla}{D} = \dot{D} - \nabla \tilde{V}^T \cdot \tilde{D} - \tilde{D} \cdot \nabla \tilde{V}, \quad (2)$$

با این تعریف خاص از مشتق زمانی، نه تنها خواص سیال مستقل از دستگاه مختصات می‌گردند بلکه مطابق انتظار، دوران ذرات سیال نیز نخواهد توانست تنش را در سیال القا نماید. در نتیجه، معادله اساسی سیال (که به تعبیری جزو خواص ماده است و به ساختار درونی آن مربوط می‌شود) مستقل از دستگاه مختصات و حرکت ناظر می‌گردد. لازم بذکر است که در متون رئولوژی استفاده از تعاریف دیگری از مشتق زمانی به جای مشتق فوق الذکر نیز رایج است. ارزش مشتق بکار رفته در این مقاله در این است که دارای پشتوانه مولکولی است و در تئوری جنبشی نیز ظاهر می‌شود. ویژگی بارز این مشتق در این است که در دستگاه مختصات خاصی نوشته شده است که بردارهای پایه آن همچون عناصر مادی و به همراه آنها دچار تغییر شکل و دوران می‌گردند [۱۳].

نگاهی مجدد به معادله (۱) نشان می‌دهد که اختلاف عمده یک سیال مرتبه ۲ با یک سیال نیوتنی تنها در دو ترمی است که ضرایب الاستیک  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  را وارد معادله می‌کنند. با توجه به اینکه ضرایب مزبور الزاماً در تغییر شکلهای کوچک اندازه گیری می‌شوند میتوان نتیجه گرفت که یک سیال مرتبه ۲ در واقع فاصله چندانی با یک سیال نیوتنی ندارد. در حقیقت، اگر تنسور تنش را بصورت یک سری بر حسب تنسور نرخ تغییر شکل بنویسیم (بدون در نظر گرفتن ترم فشار) در اینصورت سیال نیوتنی، ترم

یک سیال باید موجب افزایش در ضخامت لایه مرزی و نیز ضریب اصطکاک نسبت به حالت نیوتنی گردد. از طرف دیگر، در مورد یک سیال مرتبه دوم Hassanien [۱۴] با استفاده از روش Perturbation نشان داد که در جریان بالای یک صفحه ساکن، الاستیسیته سیال باید موجب کاهش در ضریب اصطکاک پوسته ای گردد.

در این مقاله برای اینکه بتوانیم نتایج خود را با نتایج سایر محققین مقایسه نماییم از مدل رئولوژیک یک سیال مرتبه ۲ استفاده نموده ایم. با اینوصف برای تعمیم نتایج حاصله به اعداد الاستیک بالا، نشان خواهیم داد که میتوان از ترکیبی از روش پرتابه‌ای<sup>۲</sup> و روش تفاضل محدود<sup>۳</sup> به همراه بسط سری تیلر استفاده کرد و معادلات لایه مرزی یک سیال مرتبه ۲ را در بالای یک صفحه ساکن با دقت زیاد و برای محدوده وسیعی از عدد الاستیک (که تاکنون امکان دستیابی بدان میسر نبوده است) حل نمود.

## معادلات حاکمه

معادله اساسی<sup>۴</sup> یک سیال ویسکوالاستیک تراکم ناپذیر از نوع مرتبه دوم در کلی‌ترین حالت آن به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵]:

$$\tilde{T} = -p\tilde{I} + 2\mu_0\tilde{D} - \Psi_{1,0}\overset{\nabla}{D} + 4\Psi_{2,0}\tilde{D}\cdot\tilde{D}, \quad (1)$$

در رابطه فوق،  $T$  تنسور تنش کل،  $I$  تنسور واحد،  $2D$  تنسور شدت تغییر شکل،  $p$  فشار،  $\mu$  ویسکوزیته،  $\Psi_1$  ضریب اصلی تنش قائم و  $\Psi_2$  ضریب فرعی تنش قائم هستند (این دو ضریب در واقع معرف خواص الاستیک یک سیال غیر نیوتنی می‌باشند و میتوان آنها را به زمان طبیعی سیال  $\lambda$  نیز مربوط نمود). اندیس صفر در رابطه فوق بدین معناست که سه خاصیت  $\mu$ ،  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  باید هر سه در نرخهای برش بسیار کوچک (نزدیک به صفر) اندازه گیری شوند. در ضمن لازم بذکر است که معمولاً  $\Psi_1$  کمیتی مثبت و بر عکس آن  $\Psi_2$  کمیتی منفی است. از نظر مقدار نیز معمولاً  $\Psi_2$  بسیار کوچکتر از  $\Psi_1$  است و در اغلب موارد بر طبق فرضیه Weissenberg آن را برابر با صفر در نظر می‌گیرند [۱۶]. در این مقاله هم برای سادگی و هم به منظور امکان مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج دیگر محققان مقدار  $\Psi_2$  برابر با صفر در نظر گرفته شده‌است. با

$$\psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{vx} U_{\infty} \quad (6)$$

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{vx}} \quad (7)$$

در روابط فوق،  $f(\eta)$  تابع جریان بی‌بعد است. با جایگذاری عبارات فوق در معادلات (۳) و (۴) میتوان به معادله دیفرانسیل زیر که یک معادله ODE غیر خطی از مرتبه ۴ است، رسید:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{K}{2} (f f^{iv} + 2f f'' - f'^2) = 0 \quad (8)$$

که شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (9)$$

در رابطه (۸)، ضریب  $K$  برابر با نسبت  $\frac{\alpha^* U_{\infty}}{vx}$  است که عددی بدون بعد بشمار می‌رود و معرف رفتار الاستیک یک سیال است ( $K$  را میتوان بصورت عدد بدون بعد Weissenberg و یا Deborah که هر دو معرف الاستیسیته یک سیال می باشند نیز تعبیر نمود). در ضمن با توجه به حضور  $x$  در معادله (۸) واضح است که حل تشابهی<sup>۵</sup> برای این جریان وجود ندارد. با اینوصف، در فرم فعلی وجود  $x$  مانعی برای حل این معادله بشمار نمی‌رود و میتوان با تغییر  $K$  در یک  $x$  معین (بعبارت دیگر در یک عدد رینولدز معین،  $Re_x$ ) اثر خواص الاستیک سیال را بطور موضعی بر خصوصیات لایه مرزی آن بررسی نمود.<sup>۶</sup>

### روش حل

معادله (۸) یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه ۴ است که با توجه به موجود بودن تنها ۳ شرط مرزی، واضح است که حل این معادله بطریق تحلیلی و یا عددی (با استفاده از روشهای متداولی همچون رانج کوتا، روش پرتابه‌ای و یا روش تفاضل محدود) ممکن نیست. از طرف دیگر، در نقطه  $\eta = 0$  مقدار  $f$  (ضریب  $f^{iv}$ ) برابر با صفر است، این بدان معناست که نقطه  $\eta = 0$  نقطه منفرد<sup>۷</sup> برای معادله (۸) است که در نتیجه دشواری حل معادله مزبور در مراحل اولیه آن بیشتر می‌شود. از این رو

اول این سری و سیال مرتبه ۲ ترم دوم سری مزبور را تشکیل خواهند داد (به همین دلیل، سیالات نیوتنی را اصطلاحاً سیالات مرتبه اول نیز می‌نامند). حسن بزرگ یک سیال مرتبه دوم در این است که همچون یک سیال نیوتنی ویسکوزیته آن ثابت است و در نتیجه میتوان از اثرات پیچیده کننده ویسکوزیته اجتناب نمود و صرفاً بر روی تأثیری که الاستیسیته یک سیال بر خصوصیات لایه مرزی آن میگذارد تمرکز نمود.

پس از تصمیم گیری در مورد نوع سیال، در گام بعد لازم است مولفه های تنسور تنش را در معادلات حرکت Cauchy قرار دهیم و سپس با استفاده از ایده‌های مربوط به تقریب لایه مرزی، معادلات مزبور را ساده نماییم. با انجام این کار میتوان نشان داد که برای اینکه تنشهای الاستیک در یک لایه مرزی حائز اهمیت گردند لازم است زمان طبیعی سیال از نظر مرتبه، بزرگتر از ویسکوزیته سینماتیک آن باشد. در ضمن میتوان نشان داد [۱۷] که برای یک سیال مرتبه ۲ معادلات پیوستگی و مومنوم به صورت زیر در خواهند آمد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha^* (u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) \quad (4)$$

شرایط مرزی معادله فوق بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} @ y = 0; u = 0; v = 0 \\ @ y \rightarrow \infty; u = U_{\infty} \end{aligned} \quad (5)$$

در روابط فوق  $u$  و  $v$  مؤلفه های سرعت در داخل لایه مرزی و  $U_{\infty}$  سرعت جریان آزاد می‌باشد.  $v$  ویسکوزیته سینماتیک سیال و  $\alpha^*$  نیز ضریبی در ارتباط با الاستیسیته سیال و برابر با نسبت  $\Psi_1 / \rho L^2$  است که در آن  $L$  طول صفحه می باشد. حال با معرفی تابع جریان  $\Psi$  و با بی‌بعد نمودن آن با استفاده از متغیر تشابه ای  $\eta$  میتوان روابط زیر را نوشت:

$$\frac{y_3^{j+1} - y_3^{j-1}}{2h} + \frac{1}{2}y_1^j y_3^j + \frac{K}{2} (y_1^j \frac{y_3^{j+1} - 2y_3^j + y_3^{j-1}}{h^2} + 2y_2^j y_3^j - y_3^{j2}) = 0 \quad (14)$$

از رابطه بالا میتوان  $y_3^{j+1}$  را به طور صریح بدست آورد:

$$y_3^{j+1} = (1 + \frac{K}{h} y_1^j)^{-1} (y_3^{j-1} - h y_1^j y_3^j - K (y_1^j \frac{-2y_3^j + y_3^{j-1}}{h} + 2h y_2^j y_3^j - h y_3^{j2})) \quad (15)$$

$y_1$  و  $y_2$  را نیز میتوان بر حسب مشتقات آنها به فرم زیر نوشت:

$$y_2^{j+1} = y_2^j + \frac{1}{2}h(y_3^j + y_3^{j+1}), \quad (16)$$

$$y_1^{j+1} = y_1^j + \frac{1}{2}h(y_2^j + y_2^{j+1}), \quad (17)$$

شرایط مرزی (۱۲) نیز بصورت زیر در می آیند:

$$y_1^0 = 0, y_2^0 = 0, y_2^N = 1, \quad (18)$$

حال اگر برای استفاده از روش پرتابه‌ای، حدس اولیه‌ای برای  $f''(0)$  (که در واقع همان  $y_3^0$  است) انتخاب شود، در صورتیکه بتوان  $y_3^1$  را معلوم نمود، می‌توان  $y_2^1$  و  $y_1^1$  را بترتیب از (۱۶) و (۱۷) محاسبه نمود. با مشخص شدن این دو مقدار  $y_3^2$  از رابطه (۱۵) بدست می‌آید. برای محاسبه باقی مقادیر ( $j > 1$ )، لازم است ابتدا مقادیر  $y_2^{j+1}$  و  $y_1^{j+1}$  را از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه نمود، سپس با استفاده از آنها  $y_3^{j+1}$  را از (۱۵) بدست آورد و این عمل را تا جایی که  $j$  برابر با  $N-1$  شود، تکرار نمود. در انتهای محاسبات، مقدار بدست آمده برای  $y_2^N$  با شرط مرزی آن در بینهایت (رابطه ۱۸) مقایسه می‌شود، در صورتیکه با آن اختلاف داشته باشد، با استفاده از شیوه‌های متداول محاسبات عددی (همچون روش Secant)، حدس اولیه در مورد  $f''(0)$  اصلاح شده و عملیات تا رسیدن به نتیجه مطلوب تکرار می‌شود.

جای تعجب نیست که برای حل این معادله و یا معادلاتی مشابه آن معمولاً از روش Perturbation استفاده شده و می‌شود. در حقیقت Hassanien [۱۰] برای حل این معادله تابع  $f$  را به صورت مجموع  $f = f_0 + Kf_1$  نظر گرفت و با این فرض که  $K$  بسیار کوچک باشد، معادله (۸) را با استفاده از روش Perturbation به دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۳ برحسب  $f_0$  و  $f_1$  (که قابل حل بطریق عددی بودند) تبدیل نمود. با اینوصف محدودیتهای روش مزبور مانع از آن شده‌است که Hassanien بتواند محاسبات را برای مقادیر  $K$  بیش از ۰.۲ انجام دهد. در نتیجه، میتوان براحتی ادعا نمود که حل انجام شده توسط وی حل کاملی به شمار نمی‌رود (بزودی نشان خواهیم داد که برای ظهور برخی پدیده‌های غیر نیوتنی، که تا به امروز توسط Hassanien و یا دیگر محققان گزارش نشده‌است، لازم است مقدار  $K$  بزرگتر از ۰.۴ باشد). در این مقاله با استفاده از یک روش ابتکاری که برای نخستین بار توسط Ariel [۱۸] در مورد جریان با نقطه سکون بکار برده شده است معادله (۸) برای اعداد الاستیک بالاتر از ۰.۲ حل شده است. روش مزبور در واقع ترکیبی از روش تفاضل محدود و روش پرتابه‌ای به همراه بسط سری تیلر است. نخستین گام در استفاده از این روش معرفی نمودن تبدیلات زیر است:

$$y_1 = f, y_2 = f', y_3 = f'', y_3' = f''', y_3'' = f^{iv} \quad (10)$$

با اعمال تبدیلات فوق در روابط (۸) و (۹) به معادلات زیر خواهیم رسید.

$$y_3' + \frac{1}{2}y_1 y_3 + \frac{K}{2}(y_1 y_3'' + 2y_2 y_3 - y_3^2) = 0 \quad (11)$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1, \quad (12)$$

حال برای استفاده از روش عددی، تقسیم‌بندی زیر را که در آن  $N$  عددی بزرگ (با مقیاس لایه مرزی) و  $h$  تقسیم بندی است، در نظر می‌گیریم:

$$\eta_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

با جایگذاری تقریب تفاضل محدود مرکزی برای  $y_3$  و مشتقات آن در معادله (۱۱) به رابطه زیر خواهیم رسید:

سیال) بطور پیوسته، لحظه‌ای فرا می‌رسد که به ازای آن سرعت در داخل لایه مرزی از سرعت جریان اصلی تجاوز می‌کند. در جریان بالای یک صفحه ساکن، این پدیده در مقادیر  $K$  بزرگتر از  $0.4$  شروع شده و در  $K=1$  با وضوح بیشتری قابل مشاهده است. چنین پدیده‌ای تاکنون در جریان بالای یک صفحه ساکن گزارش نشده است، اما پدیده‌ای مشابه با آن در مورد جریانی با نقطه سکون قبلا توسط Beard و Walters ذکر شده است [۱۰]. توجه این پدیده از نظر فیزیکی چندان ساده نیست اما بنظر میرسد که در اثر تغییر شکل ذرات سیال در داخل لایه مرزی، تنشهای الاستیک از نوع قائم ایجاد شوند که این تنشها (در صورتیکه به اندازه کافی بزرگ باشند) می‌توانند براحتی موجب شتاب‌دادن به ذرات سیال گردند و آنها را به سرعتی بیش از سرعت جریان در خارج از لایه مرزی برسانند [۱۹].

شکل (۲) توزیع  $C_f$  را بر حسب  $K$  برای سیال مورد نظر نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده میشود در اثر الاستیسیته سیال، ضریب اصطکاک از مقدار نیوتنی آن بیشتر می‌گردد و هر چقدر این الاستیسیته (بعبارت دیگر  $K$ ) بیشتر باشد میزان افزایش در ضریب  $C_f$  نیز بیشتر خواهد بود. این پیش‌بینی با پیش‌بینی Harris در مورد این سیال (که با استفاده از معادله انتگرال ممنوم بدست آمده است) در تطابق کامل است اما با پیش‌بینی Hassanien که با استفاده از روش Perturbation بدست آمده است در تضاد است. با توجه به اینکه از نقطه نظر فیزیکی، بنظر می‌رسد که در اثر ظهور تنشهای الاستیک در سیال، گرادیان سرعت در مجاور دیواره و در نتیجه آن تنش برشی در دیواره افزایش یابد از اینرو اعتبار نتایج بدست آمده توسط Hassanien مورد شک و تردید می‌باشد.

شکل (۳) تاثیر خواص الاستیک یک سیال را بر روی ضخامت لایه مرزی آن نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، با افزایش در پارامتر الاستیک،  $K$ ، پیش‌بینی می‌گردد که ضخامت لایه مرزی کاهش یابد. این موضوع بر خلاف پیش‌بینی Harris است و از آن میتوان به این نتیجه گیری مهم دست یافت که برای یک سیال ویسکوالاستیک امکان تشکیل لایه مرزی حتی در

برای معلوم کردن  $y_3^1$ ، ابتدا بسط سری تیلر آن، حول  $\eta=0$  با دقت  $O(h^2)$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_3^1 = y_3^0 + h(y_3^0)' + \frac{h^2}{2!}(y_3^0)'' + \dots \quad (19)$$

مطابق با معادله (۱۰) میتوان در رابطه فوق  $y_3^0$  را با  $f''(0)$  جایگزین نمود:

$$y_3^1 = f''(0) + hf'''(0) + \frac{h^2}{2!}f^{iv}(0) + \dots, \quad (20)$$

از رابطه (۸) در  $\eta=0$ ، میتوان  $f'''(0)$  و نیز با مشتقگیری از آن،  $f^{iv}(0)$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$f'''(0) = \frac{K}{2}f''^2(0) \quad (21)$$

$$f^{iv}(0) = K(f''(0)f'''(0) - f''^2(0)) \quad (22)$$

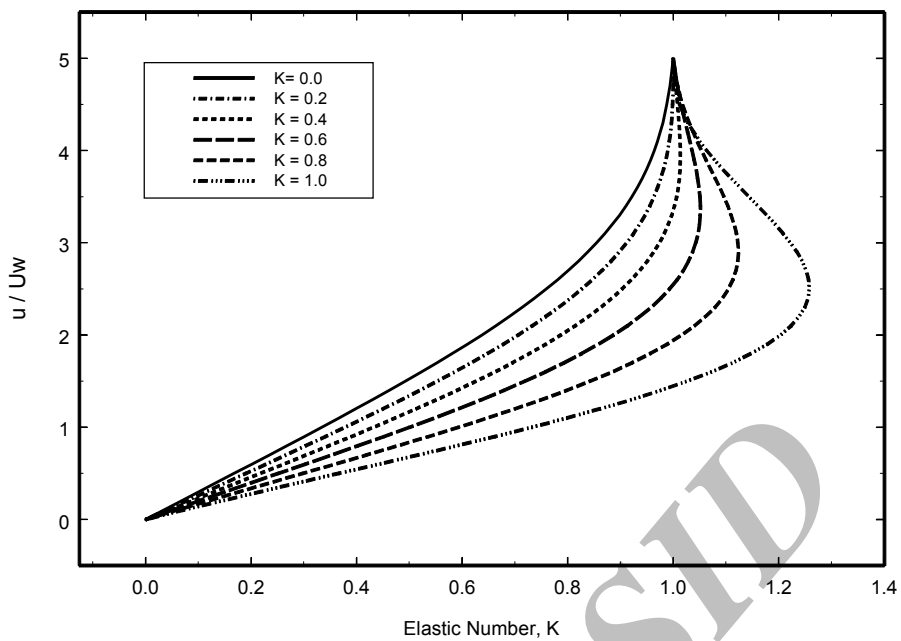
با معلوم شدن  $f''(0)$  و  $f'''(0)$  از روابط فوق،  $y_3^1$  از بدست می‌آید، بدین ترتیب کلیه روابط لازم برای حل معادله (۸) معلوم می‌شوند و میتوان بر اساس آنها پروفیل سرعت در لایه مرزی و نیز توزیع تنش برشی در دیواره (یا ضریب اصطکاک) را طبق روابط زیر بر حسب عدد رینولدز  $Re_x$  و یا عدد دیورا  $De_x$  (همان  $K$ ) محاسبه کرد.

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{f''(0)}{\sqrt{Re_x}} \quad (23)$$

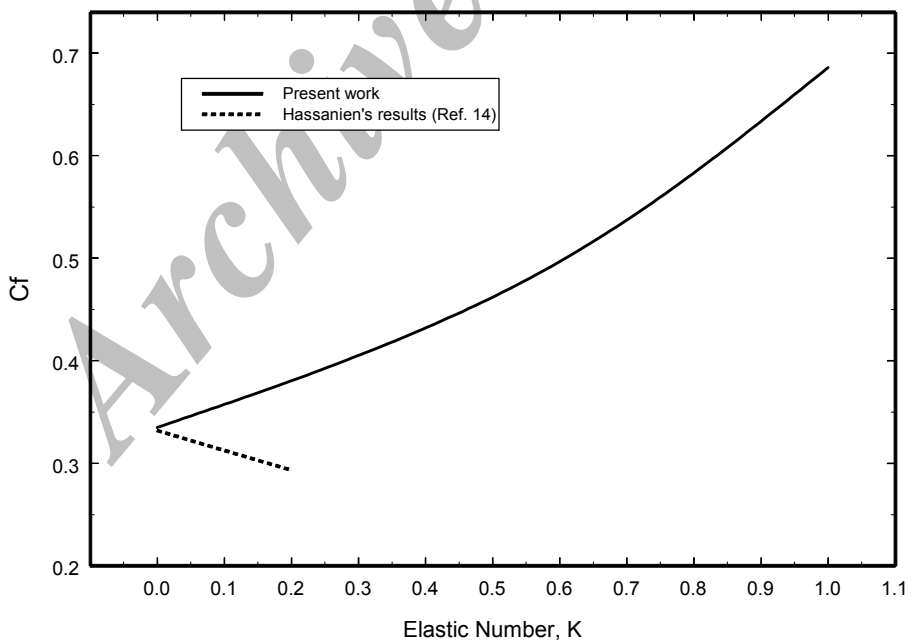
$$Re_x = \frac{xU_\infty}{\nu}, \quad De_x = \frac{\Psi_1 U_\infty}{\mu L^2 x} \quad (24)$$

### نتایج بدست آمده

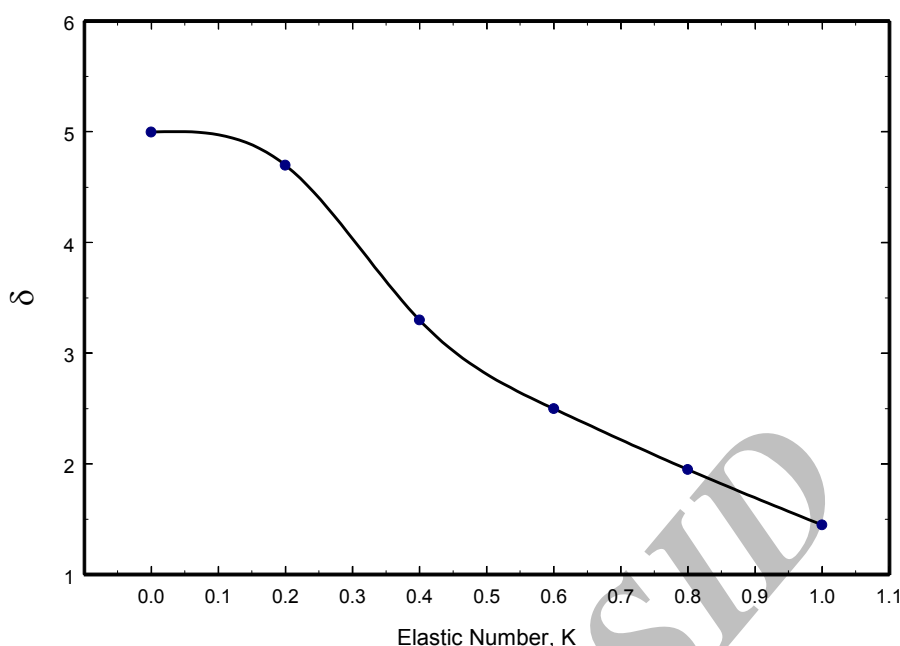
شکل (۱) توزیع سرعت در داخل لایه مرزی را برای جریان آرام یک سیال مرتبه دوم بر روی یک صفحه ثابت به ازای مقادیر مختلف  $K$  نشان می‌دهد. در این شکل، نمودار  $K=0$  متناظر با حل بلازیوس برای یک سیال نیوتنی است [۱]. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش  $K$  (بعبارت دیگر با افزایش الاستیسیته



شکل ۱: پروفیل سرعت در مقادیر مختلف عدد الاستیک  $K$ .



شکل ۲: اثر عدد الاستیک  $K$  بر ضریب اصطکاک.



شکل ۳: اثر عدد الاستیک K بر ضخامت لایه مرزی (بصورت بدون بعد).

می‌شود  $\psi_1$  موجب شتاب گرفتن سیال و در نتیجه کاهش ضخامت این لایه می‌گردد. در صورتی که K چندان بزرگ نباشد این دو پدیده اثر یکدیگر را تقریباً خنثی می‌نمایند و ضخامت لایه مرزی با افزایش K تغییر محسوسی نمی‌یابد. با بالا رفتن K تنشهای قائم بطور پیوسته افزایش می‌یابند و این در حالی است که اثرات مربوط به زمان طبیعی سیال تغییر چندانی نمی‌کنند. در نتیجه، لحظه‌ای فرا می‌رسد که کاهش در ضخامت این لایه در اثر تنشهای قائم بیش از آن است که  $\lambda$  بتواند آن را جبران نماید بطوریکه در عمل شاهد کاهش در ضخامت لایه مرزی خواهیم بود.

در خاتمه خاطر نشان می‌گردد که از آنجاییکه یک سیال ویسکوالاستیک از نوع مرتبه ۲ سیالی غیر نیوتنی با ویسکوزیته ثابت است بنابراین میتوان پذیرفت که مدل واقع بینانه ای برای یک سیال ویسکوالاستیک بشمار نمی‌رود. در حقیقت میتوان استدلال نمود که همان مکانیزمهاییکه که منجر به ظهور خواص الاستیک در یک سیال غیر نیوتنی میشوند بطور خودکار موجب کاهش در ویسکوزیته سیال با افزایش نرخ برش نیز میگردند. با اینوصف مدل ویسکوالاستیک مرتبه ۲ این امکان را فراهم

رینولدزهای کم نیز وجود دارد مشروط بر آنکه سیال به اندازه کافی الاستیک باشد.

### نتیجه گیری کلی

بر اساس محاسبات انجام شده در این پروژه به نظر می‌رسد که احتمالاً در مورد سیالات ویسکوالاستیک، تنشهای الاستیکی که در اثر تغییر شکل ذرات سیال در داخل لایه مرزی بوجود می‌آیند موجب شتاب گرفتن ذرات مزبور در این لایه می‌گردند و این امکان برای سیال بوجود می‌آید که سرعت آن به مقداری بیش از سرعت در خارج از این لایه (یعنی جایی که این تنشها وجود ندارند و یا ناچیز می‌باشند) تجاوز نماید. در ضمن، شتاب گرفتن سیال در اثر تنشهای الاستیک موجب می‌شود که گرادیان سرعت در مجاورت دیواره نسبت به مقدار نیوتنی آن بیشتر گردد که در نتیجه آن تنش برشی و به عبارتی دیگر ضریب اصطکاک پیوسته ای افزایش می‌یابد. در مورد ضخامت لایه مرزی نیز میتوان گفت که در یک سیال ویسکوالاستیک، دو خاصیت  $\lambda$  و  $\psi_1$  از نظر تأثیری که بر ضخامت لایه مرزی دارند در خلاف جهت هم عمل می‌نمایند. در حالیکه  $\lambda$  باعث افزایش ضخامت این لایه



استفاده شود تا دقت پیش بینیهای انجام شده توسط مدل مرتبه ۲ چک شود.

### تشکر و قدردانی

انجام این پروژه در قالب طرح تحقیقاتی مصوب شورای پژوهشی دانشگاه تهران صورت گرفته است که بدینوسیله نگارندگان این مقاله از بودجه‌ای که توسط این دانشگاه در اختیار آنان قرار داده شده است صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایند.

می‌سازد تا بتوان بطور خالص تاثیر خواص الاستیک سیال را بر خصوصیات لایه مرزی آن بررسی نمود و از این نظر مدل مناسبی بشمار میرود. با توجه به اینکه مدل مزبور در جریانهای آهسته دارای دقت بیشتری است بنابراین پیش بینیهای انجام شده با استفاده از این مدل در اعداد الاستیک بالا ممکن است از نظر کمی دارای اشکال باشد. در تحقیقات آتی در نظر است از مدلهای واقع بینانه تری همچون مدل ماگسول که برای سیالات بسیار الاستیک کاربرد دارد و در عین حال ویسکوزیته آن نیز ثابت است

### مراجع

- 1 - Schlichting, H. (1964). *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, New York.
- 2 - Sakiadis, B. (1961). "Boundary layer behaviour on continuous solid surface." *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 7, PP. 221.
- 3 - Denn, M. M. (1967). "Boundary layer flows for a class of elastic fluids." *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 22, PP. 395.
- 4 - Acrivos, A., Shah, M. J. and Peterson, E. E. (1960). "Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces." *A.I.Ch.E., J.*, Vol. 6, PP. 312.
- 5 - Schowalter, W. R. (1960). "The application of boundary layer theory to power-law pseudoplastic fluids." *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 6, No. 1.
- 6 - Rao. J. H. (1999). "Momentum and heat transfer in a power-law fluid with arbitrary injection/suction at a moving wall." *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, PP. 2837.
- 7 - Renardy, M. (1997). "High weissenberg number boundary layers for the upper convected maxwell fluid." *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 68, PP. 125.
- 8 - Massoudi, M. (2001). "Local non-similarity solutions for the flow of a non-newtonian fluid over a wedge." *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, PP. 961.
- 9 - Larson, R. G. (1988). *Constitutive equations for polymer melts and solutions*, Butterworths, Boston.
- 10 - Beard D. W. and Walters, K. (1964). "Elastico-viscous boundary layer flows." *Proc. Camb. Phil Soc.*, Vol. 60, PP. 667.
- 11 - Ponterli, G. (1995). "Flow of a fluid of second-order over a stretching sheet." *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 30, No. 3, PP. 287.
- 12 - Rajagopal, K. R., Gupta, A. S. and Wineman, A. S. (1980). "On a boundary layer theory for non-newtonian fluids." *Lett. Appl. Engng. Sci.*, Vol. 18, PP. 875.
- 13 - Harris, J. (1977). *Rheology and non-newtonian flow*, Longman.
- 14 - Hassanien, (1996). "Flow and heat transfer on a continuous flat surface moving in a parallel free stream of powe-law fluid." *App. Modelling*, Vol. 20, PP. 779.
- 15 - Macosko C. W. (1994). *Rheology: Principles, Measurements, and Applications*, VCH publishers.
- 16 - Bird, R. B., Armstrong, R. C. and Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, 2nd edition, John Wiley & Sons.

- 17 - Harnoy, A. (1979). "The role of the fluid relaxation time in laminar elastico-viscous boundary layers." *Rheologica Acta*, Vol. 18, PP. 210.
- 18 - Ariel, D. (1992). "A hybrid method for computing the flow of viscoelastic fluids." *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 14, PP. 757.
- 19 – Sharifi, M. (2002). *Viscoelastic boundary layers*, M. A. Sc. Thesis, University of Tehran.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Power –Law Fluids
- 2 – Shooting Method
- 3 – Finite Difference
- 4 – Constitutive Equation
- 5 – Similarity Solution
- 6 – Local Similarity Solution
- 7 - Singularity

Archive of SID