

## اعمال روش نیمه لاگرانژی - نیمه‌ضمنی برای حل معادلات آب کم عمق

وحید اصفهانیان

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

خسرو اشرفی

دانشجوی دکتری پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو

(تاریخ دریافت ۸۱/۸/۲۹، تاریخ تصویب ۸۲/۹/۲۲)

### چکیده

در این مقاله روش نیمه لاگرانژی نیمه‌ضمنی برای حل معادلات آب کم عمق در مختصات کارتزین به کار برده شده است. برای حل معادلات آب کم عمق از شبکه  $C$ -آراکاو استفاده شده است. روش نیمه لاگرانژی که به صورت نیمه‌ضمنی به معادلات آب کم عمق اعمال می‌شود به صورت نامشروط پایدار است، بنابراین یکی از مشکلات روش‌های اویلری که کوچک بودن گام زمانی می‌باشد، با به کار بردن این روش مرتفع می‌شود. دقت روش نیمه لاگرانژی-نیمه‌ضمنی با دقت میان‌یابی‌های انجام شده در این روش تعیین می‌شود، در اینجا از میان‌یابی درجه سوم که یکی از روش‌های دقیق میان‌یابی است، استفاده شده است. صحت این روش به وسیله حل کانال آب یک‌بعدی در مقایسه با حل تحلیلی مشخصه‌ها مورد تأیید قرار گرفته است. همچنین این روش در حالت دوبعدی به یک جریان کانال هوا که دارای شرایط مرزی دوره‌ای در مرزهای شرقی و غربی و شرایط مرزی سخت در مرزهای شمالی و جنوبی است، اعمال شده است. این روش در حالت یک‌بعدی و دوبعدی به لحاظ پایداری کمیتهایی مانند انرژی کل، آنستروپی و عمق متوسط شاره بسیار خوب عمل می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** روش نیمه لاگرانژی - نیمه‌ضمنی، معادلات آب کم عمق، گام زمانی، میان‌یابی

### مقدمه

همکارانش (۱۹۹۰) مورد استفاده قرار گرفت، اشاره نمود

[۱].

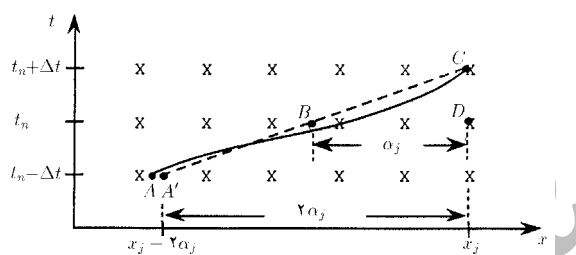
معادلات حاکم بر جریان بعد از اعمال روش نیمه لاگرانژی - نیمه‌ضمنی به یک معادله هلمهولتز برای ارتفاع ژئوپتانسیل و معادلات تکانه تبدیل می‌شوند. در کارهای انجام گرفته (که در بالا به طور مختصر به آنها اشاره شد)، در اعمال شرایط مرزی به معادله هلمهولتز حتماً باید مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل در مرزها داده شده باشد. معمولاً در شبیه‌سازی‌های عددی وضع هوا در حرکت‌های میان مقیاس<sup>۳</sup> مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل به راحتی در دسترس نیستند ولی دسترسی به مقادیر میدان باد آسانتر است. با استفاده از این مقادیر و همچنین بسط مناسب معادلات حاکم می‌توان به معادلاتی در مرزها دست پیدا کرد که تابعی از مولفه‌های سرعت باد باشند. چگونگی انجام این عمل به صورت مبسوط در قسمت‌های بعدی مقاله آمده است.

### دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری

معادلات اساسی دینامیک شارها را می‌توان از

روش‌های گسسته‌سازی که بر پایه رفتار نیمه لاگرانژی<sup>۱</sup> معادله فرارفت<sup>۲</sup> بنانهاده شدند برای انتگرال‌گیری زمانی کارا در پیش‌بینی‌های عددی وضع هوا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این روش گام‌های زمانی بزرگتر از روش‌هایی است که اساس و پایه آنها روش اویلری می‌باشد، در صورتی که از لحاظ دقت چیزی از دست نمی‌رود. مطالعاتی که برای کاربرد این روش در حل معادلات آب کم عمق انجام شده است به دهه ۸۰ میلادی برمی‌گردد که می‌توان به کارهای ربرت (۱۹۸۱، ۱۹۸۲)، استینفرز و تمپرتن (۱۹۸۶)، پرسر و لسلی (۱۹۸۸)، مکدونالد و بتیز (۱۹۸۹) و کت و استینفرز (۱۹۹۰) اشاره نمود. همچنین این روش در مدل‌های کژ فشار شبکه‌ای نیز مورد استفاده قرار گرفت. از جمله این کارها می‌توان به روش سه‌مرحله‌ای نیمه لاگرانژی که برای مختصه سیگما توسط ربرت و همکارانش (۱۹۸۵) و تانگی و همکارانش (۱۹۸۹) و همچنین روش سه‌مرحله‌ای نیمه لاگرانژی که برای مختصات غیر هیدرواستاتیک به وسیله تانگی و

موازی نیستند و نهایتاً به نقاط نامنظمی می‌رسند. روش نیمه‌لاگرانژی در واقع ایده‌ای است که این مشکل را برطرف می‌کند. در روش نیمه‌لاگرانژی یک‌سری نقاط منظم به‌عنوان نقاط شبکه انتخاب می‌شوند و در هر گام زمانی خطوط مشخصه‌ای که از این نقاط می‌گذرند مورد بررسی قرار می‌گیرند، برخلاف حالت قبل که یک‌سری خطوط مشخصه معین از ابتدا تا انتهای زمان محاسبه مورد بررسی قرار می‌گرفتند، در روش نیمه‌لاگرانژی خطوط مشخصه عبوری از این نقاط با هر گام زمانی عوض می‌شوند. در واقع روش حل به‌این‌گونه است که خطوط مشخصه‌ای که اکنون در نقاط شبکه هستند دارای مشخصات نقطه‌ای هستند که در گام زمانی قبلی در نقاط دیگری بوده‌اند و این نقاط لزوماً بر نقاط شبکه انطباق ندارند. آنچه که در بالا بیان گردید به‌طریق بسیار گویاتری در شکل (۱) آمده‌است.



شکل ۱: شکل شماتیکی از روش نیمه‌لاگرانژی سه ترازه زمانی. خط مشخصه واقعی (منحنی پر) و خط مشخصه تخمینی (خط چین).  $(\alpha_j)$  فاصله‌ای است که ذره شماره در مدت  $\Delta t$  طی می‌کند (برگرفته از مرجع [۳])

در شکل (۱) سه گام زمانی  $t_n + \Delta t$ ،  $t_n$ ،  $t_n - \Delta t$  مشخص شده‌اند که هدف تعیین کمیت  $\psi$  در زمان  $t_n + \Delta t$  از داده‌های زمان قبل با یک تابع داده شده  $u(x, t)$ ، می‌باشد. خط مشخصه‌ای که در زمان  $t_n + \Delta t$  از نقطه  $C$  که یک نقطه شبکه است، می‌گذرد؛ در زمان  $t_n - \Delta t$  از نقطه  $A$  گذشته‌است که لزوماً بر روی نقاط شبکه نیست. پس کمیت  $\psi$  در زمان  $t_n + \Delta t$  همان مقداری را خواهد داشت که این نقطه در زمان  $t_n - \Delta t$  داشته‌است. ولی از آنجاکه تابع  $u$  با مکان و زمان تغییر می‌کند پس خط مشخصه یک منحنی می‌باشد. برای حل مسأله، این منحنی با یک خط مستقیم با استفاده از مقدار  $u$  در زمان  $t_n$  بر روی خط مشخصه تقریب زده

دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری مورد بررسی قرار داد. معادلات در شکل لاگرانژی، تغییرات جریان را با دنبال کردن حرکت یک ذره منفرد از شماره، بیان می‌کنند. ولی معادلات در شکل اویلری بیان‌کننده تغییرات جریان از مشاهدات یک نقطه ثابت در فضا می‌باشند (این نقطه می‌تواند یک نقطه ثابت بر روی یک مخصات چرخان همانند زمین که حرکت آن تأثیری از حرکت شماره نمی‌گیرد، باشد). اگر  $\psi$  یک متغیر اسکالر وابسته و  $S$  چشمه یا چاه این متغیر باشد، معادلات تغییرات زمانی  $\psi$  در دیدگاه لاگرانژی یک‌بعدی به شکل زیر نوشته می‌شود [۲].

$$\frac{d\psi}{dt} = S \quad (1)$$

همین معادله در دیدگاه اویلری به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = S \quad (2)$$

برای معادل سازی این دو دیدگاه از منظر ریاضی مشتق کلی به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$$

در معادله بالا برای سرعت داریم:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (3)$$

### روش نیمه‌لاگرانژی سه ترازه زمانی

اولین روش حلی که در دیدگاه لاگرانژی به ذهن می‌رسد این است که در ابتدا چون شرایط اولیه جریان معلوم است تعدادی از نقاط شماره به‌صورت منظم در نظر گرفته می‌شوند و از دو معادله (۱) و (۳) در زمان انتگرال‌گیری می‌کنیم. با توجه به‌اینکه مسیر ذرات شماره برای هر یک از آنها از معادله (۳) به‌دست می‌آید و این معادله برای نقاط مختلف با سرعت‌های متفاوت مسیرهای غیرموازی برای نقاط مختلف شماره ایجاد می‌کند، بنابراین نقاط جدید به‌دست آمده کاملاً غیریکنواخت هستند و هیچ ترتیب خاصی ندارند. در اکثر موارد خطوط مشخصه با یکدیگر

این نقاط رفع می‌گردد.

### میان‌یابی

در دیدگاه لاگرانژی پخش عددی<sup>۵</sup> هنگامی رخ می‌دهد که از میان‌یابی خطی استفاده شود. بنابراین روش‌های میان‌یابی که در الگوریتم‌های روش نیمه‌لاگرانژی به کار می‌روند دقت و کارایی روش را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در اکثر الگوریتم‌های روش نیمه‌لاگرانژی از مراتب بالاتر میان‌یابی برای دست‌یابی به دقت بالاتر استفاده می‌گردد. برای میان‌یابی می‌توان از میان‌یابی‌هایی از قبیل خطی، لاگرانژ درجه دوم، لاگرانژ درجه سوم، Spline درجه سوم و ... استفاده نمود. تحقیقات نشان داده‌است که میان‌یابی درجه سوم لاگرانژ یک انتخاب مناسب برای دقت مطلوب و هزینه محاسباتی کمتر می‌باشد.

### پالایش زمانی

برای جلوگیری از به‌وجود آمدن عدم جفت‌شدگی<sup>۶</sup> در گام‌های زمانی فرد و زوج از یک پالاینده زمانی در هر گام زمانی استفاده می‌شود. از آنجاکه هدف از به‌کارگیری پالاینده زمانی ایجاد جفت‌شدگی بین گام‌های زمانی زوج و فرد است پس این پالاینده زمانی در هر مرحله باید بر روی گام زمانی  $t - \Delta t$  انجام شود. پالاینده زمانی با استفاده از رابطه زیر برای یک متغیر  $\psi$  در زمان  $t - \Delta t$  به‌دست می‌آید.

$$\psi_f(x, t - \Delta t) = \psi(x, t - \Delta t) + \alpha [\psi_f(x, t - 2\Delta t) - 2\psi(x - \Delta t) + \psi(x, t)] \quad (7)$$

همه مقادیر  $\psi$  باید در نقاط شبکه باشند.  $\alpha$  پارامتری برای کنترل جفت‌شدگی می‌باشد.

### حل معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با استفاده از روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی

در ابتدا برای آشنایی با چگونگی اعمال روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی به یک دسته معادلات، حالت ساده معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی را در نظر می‌گیریم. برای ساده‌سازی بیشتر یک مختصات ساکن دکارتی در نظر

می‌شود. نقطه  $B$  در شکل (۱) این نقطه را نشان می‌دهد. نقطه  $A'$  نقطه تقریبی  $A$  می‌باشد که با تقریب ذکر شده به‌دست آمده‌است.

### روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی سه‌ترازه زمانی برای حل معادله فرارفت

معادله فرارفت واداشته<sup>۴</sup> به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d\psi}{dt} + G(x, t) = R(x, t) \quad (4)$$

در رابطه بالا  $G$  جمله‌های مربوط به موج‌های تند گرانی و  $R$  مربوط به مدهای کند راسبی و جمله‌های غیرخطی می‌باشند. روش نیمه‌لاگرانژی-نیمه‌ضمنی روشی است که در آن جمله‌های گرانی که به‌صورت خطی طراحی شده‌اند به‌صورت ضمنی با مقادیر  $\psi$  گسسته‌سازی شوند و جمله‌های غیرخطی و راسبی به‌صورت صریح به‌دست آیند. با این توضیح خواهیم داشت:

$$\frac{\psi^+ - \psi^-}{2\Delta t} + \frac{1}{2}(G^+ + G^-) = R^\circ \quad (5)$$

در معادله (۵) “+” و “-” و “o” به‌ترتیب بیان‌کننده نقطه مقصد  $(x_j, t + \Delta t)$ ، نقطه میانی خط مشخصه  $(x_j - \alpha_j, t)$  و نقطه مبدأ خط مشخصه یعنی  $(x_j - 2\alpha_j, t - \Delta t)$  می‌باشند. بنابراین برای تعیین مقدار  $R$  باید مقادیر آنرا در زمان  $t$  در نقاط  $x_j - \alpha_j$  میان‌یابی نمود. می‌توان مقادیر  $R^\circ$  را با متوسط‌گیری در مکان نیز به‌دست آورد.

$$R^x = \frac{1}{2} [R(x_j - 2\alpha_j, t) + R(x_j, t)]$$

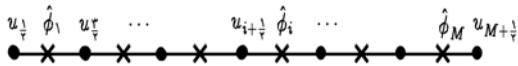
آنچه که هنوز نامشخص است مقدار  $\alpha_j$  می‌باشد. با توجه به شکل (۱)،  $\alpha_j$  را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\alpha_j = \Delta t u(x_j - \alpha_j, t_n) \quad (6)$$

مشکل دیگری که معادله (۵) دارد تعیین مقادیر  $\psi$  در نقاط  $(x_j - 2\alpha_j, t - \Delta t)$  می‌باشد که در نقاط شبکه واقع نیستند. این مشکل با یک میان‌یابی از نقاط شبکه به

برای  $u$  داده شده باشد یا برای  $\hat{\phi}$  کمی متفاوت خواهد بود. بنابراین الگوریتم حل برای این دو حالت به صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### الگوریتم حل با شرایط داده‌شده برای $u$



شکل ۲: شبکه  $C$ -آراکاو یک‌بعدی با شرایط مرزی  $u$ .

اگر شرایط مرزی برای  $u$  داده شده باشد یک شبکه مانند شکل (۲) بر روی ناحیه حل در نظر می‌گیریم. با توجه به این نکته که شرایط مرزی برای  $u$  داده شده‌اند و با توجه به شکل ۲ الگوریتم حل به صورت زیر خلاصه می‌شود.

۱. پیدا کردن شرایط مرزی برای  $\hat{\phi}$  با استفاده از معادلات حاکم و شرایط مرزی داده شده برای  $u$ .

۲. حل معادله (۱۰) و به دست آوردن مقادیر  $\hat{\phi}_x^+$ .

۳. محاسبه معادله (۱۱) برای  $u^+$ .

برای دستیابی به شرط مرزی سمت چپ برای  $\hat{\phi}$  دو معادله (۸) و (۹) را به صورت زیر گسسته می‌کنیم.

$$u_{i+1/2}^+ + \Delta t \frac{\hat{\phi}_{i+1}^+ - \hat{\phi}_i^+}{\Delta x} = P_{u_{i+1/2}} \quad (12)$$

$$\hat{\phi}_i^+ + \Delta t \Phi_o \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^+}{\Delta x} = P_{\phi_i} - 2\Delta t R_{\phi_i} \quad (13)$$

با استفاده از معادله (۱۲) مقدار  $u_{i+1/2}^+$  را برحسب بقیه پارامترها محاسبه و در رابطه (۱۳) جایگذاری می‌کنیم. بعد از انجام پاره‌ای محاسبات و قرار دادن  $i=1$  به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\left( \frac{-\Delta x^2}{\Phi_o \Delta t^2} - 1 \right) \hat{\phi}_1^+ + \hat{\phi}_2^+ = \text{RHS}_1 \quad (14)$$

که

$$\text{RHS}_1 = -\frac{\Delta x}{\Delta t} u_{1/2}^+ + \frac{\Delta x}{\Delta t} P_{u_{3/2}} - \frac{\Delta x^2}{\Phi_o \Delta t^2} P_{\phi_1} + \frac{2\Delta x^2}{\Phi_o \Delta t^2} R_{\phi_1}$$

گرفته می‌شود. پس معادلات حاکم، یکی معادله تکانه در جهت  $x$  و دیگری معادله پیوستگی می‌باشد. این معادلات به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\phi \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

که

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$  در معادلات بالا  $u$  سرعت و  $\phi = gh$  می‌باشند. که شتاب گرانی زمین و  $h$  عمق لایه مورد مطالعه هستند. قبل از اینکه این معادلات به صورت اصلی خود از هم جدا شوند، لازم است که مقدار  $\phi$  به یک مقدار متوسط ثابت به نام  $\Phi_o$  و یک مقدار متغیر به نام  $\hat{\phi}$  تقسیم شود.

$\phi = \Phi_o + \hat{\phi}$  با اعمال این تغییر به معادلات (۸) و (۹) و با اعمال روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی سه‌ترازه زمانی و ترکیب دو معادله با یکدیگر به معادلات زیر دست پیدا می‌کنیم:

$$\hat{\phi}_{xx}^+ - \frac{1}{\Delta t^2 \Phi_o} \hat{\phi}^+ = \frac{1}{\Delta t} P_{ux} - \frac{1}{\Delta t^2 \Phi_o} P_{\phi} \Phi_o + \frac{2}{\Delta t \Phi_o} R_{\phi} \quad (10)$$

$$u^+ + \Delta t \hat{\phi}_x^+ = P_u \quad (11)$$

که در معادلات بالا  $P_u$ ،  $P_{\phi}$  و  $R_{\phi}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_u = u^- - \Delta t \hat{\phi}_x^-$$

$$P_{\phi} = \hat{\phi}^- - \Delta t \Phi_o u_x^-$$

$$R_{\phi} = (\hat{\phi} u_x)^{\circ}$$

معادله به دست آمده یک معادله هلمهولتز است که باید با یک شرایط مرزی به روش‌های تکراری حل گردد.

### الگوریتم حل

الگوریتم حل برای حالتی که شرایط مرزی

حل شده در نظر می‌گیریم. این مثال از مرجع [۶] برداشته شده‌است. در این مثال یک کانال پر از آب در نظر گرفته می‌شود که در شرایط اولیه دارای سرعت صفر و ارتفاع ۵ متر می‌باشد. این کانال با شرایط مرزی زیر از طرف چپ تخلیه می‌شود.

• شرایط مرزی برای طرف چپ:

$$q(0,t) = \begin{cases} -\frac{t}{10}, & 0 \leq t \leq 60 \\ -6 \left[ 6 - \frac{t-60}{10} \right], & 60 \leq t \leq 80 \\ -4, & t > 80 \end{cases} \quad (18)$$

• شرایط مرزی برای طرف راست:

$$q(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad l = 400 \text{ (m)} \quad (19)$$

در دو معادله بالا  $q$  دبی خروجی از دو طرف کانال می‌باشد که در واقع  $q = uh$  است. این شرایط مرزی با شرایط اولیه داده شده شرایط لازم برای حل مسأله را فراهم می‌کنند. با توجه به این نکته که مقدار دبی به‌عنوان شرایط مرزی داده شده‌است پس باید یک روش تکراری برای به‌دست آوردن شرایط مرزی به‌کار ببریم. از آنجاکه مقدار  $q$  در  $l = 400 \text{ (m)}$  صفر می‌باشد پس:

$$u = 0 \quad \text{در} \quad l = 400 \text{ (m)}$$

بنابراین روش تکراری برای تعیین شرایط مرزی  $u$  در  $l = 0$  به‌کار برده می‌شود. با توجه به اینکه مقدار  $u = 0$  در مرز  $l = 400 \text{ (m)}$  داده شده‌است می‌توانیم از الگوریتمی که برای این‌گونه مسائل در بخش‌های قبل مطرح شد استفاده کنیم. برای شرط مرزی  $u$  در مرز  $l = 0$  از تکرار برای تصحیح آن استفاده می‌کنیم. با اعمال شرایط اولیه و مرزی داده شده و استفاده از الگوریتم توضیح داده شده برای حل معادله هلمهولتز با توجه به شرایط مرزی داده شده برای  $u$  می‌توان این مثال را حل نمود. با حل این معادلات با توجه به این نکته که از یک شبکه  $C$ -آراکاو استفاده شده‌است، مقادیر  $u$  و  $h$  در نقاط یکسانی به‌دست نمی‌آیند و لذا مقادیر  $u(0,t)$  در مقایسه با مرجع [۶] به‌صورت جدول (۱) محاسبه می‌شوند. مقادیر  $h(0,t)$  محاسبه نمی‌شوند و مقادیر  $h(0.5,t)$  محاسبه می‌شوند که مقادیر آن در جدول (۱) داده شده‌اند. این

چون  $u$  به‌عنوان شرط مرزی داده شده‌است پس  $RHS_1$  معلوم است و یک معادله برای نقطه  $i=1$  به‌دست می‌آید. برای دستیابی به شرط مرزی سمت راست برای  $\hat{\phi}$  دو معادله (۸) و (۹) را به‌صورت زیر گسسته می‌کنیم.

$$u_{i-1/2}^+ + \Delta t \frac{\hat{\phi}_i^+ - \hat{\phi}_{i-1}^+}{\Delta x} = P_{ui-1/2} \quad (15)$$

$$\hat{\phi}_i^+ + \Delta t \Phi \cdot \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i-1/2}^+}{\Delta x} = P_{\phi_i} - 2\Delta t R_{\phi_i} \quad (16)$$

با استفاده از معادله (۱۵) مقدار  $u_{i-1/2}^+$  را برحسب بقیه پارامترها محاسبه و در رابطه (۱۶) جایگذاری می‌کنیم. بعد از انجام پاره‌ای محاسبات و قرار دادن  $i=M$  خواهیم داشت:

$$-\phi_{M-1}^+ + \left( \frac{\Delta x^2}{\Phi \cdot \Delta t^2} + 1 \right) \phi_M^+ = RHS_M \quad (17)$$

که

$$RHS_M = -\frac{\Delta x}{\Delta t} u_{M+1/2}^+ + \frac{\Delta x}{\Delta t} P_{uM-1/2} - \frac{\Delta x^2}{\Phi \cdot \Delta t^2} P_{\phi_M} + \frac{2\Delta x^2}{\Phi \cdot \Delta t^2} R_{\phi_M}$$

چون  $u$  به‌عنوان شرط مرزی داده شده‌است پس  $RHS_M$  معلوم است و یک معادله برای نقطه  $i=M$  به‌دست می‌آید. بقیه مراحل به‌سادگی انجام می‌شود [۵،۴].

### الگوریتم حل با شرایط داده شده برای $\hat{\phi}$

اگر شرایط مرزی به‌جای اینکه برحسب  $u$  داده شوند برحسب  $\hat{\phi}$  داده شوند، همه مراحل حل مانند قبل می‌باشند به‌جز موردی که در آن از معادله هلمهولتز مقادیر  $\hat{\phi}^+$  به‌دست می‌آیند که دیگر نیازی به پیدا کردن رابطه‌هایی برای مرزها از مقادیر  $u$  نمی‌باشد. با توجه به شکل ۲ دیگر مقادیر  $u_{1/2}$  و  $u_{M+1/2}$  وجود ندارند و شبکه از  $\hat{\phi}_1$  شروع و به  $\hat{\phi}_M$  ختم می‌شود.

### حل یک مثال

برای اطمینان از درستی برنامه نوشته شده یک مثال

جغرافیایی،  $g$  شتاب گرانی زمین و  $h$  عمق لایه مورد مطالعه هستند. برای به کار بردن این معادلات در یک منطقه محدود باید این معادلات به یک مختصات مسطح مانند نقشه استروگرافیک تبدیل شوند. برای دستیابی به این هدف داریم:

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$X$  و  $Y$  یک دستگاه مختصات دکارتی می باشد و  $\lambda$  معرف طول جغرافیایی می باشد. در رابطه بالا  $m = \frac{1+\sin \Theta_0}{1-\sin \Theta_0}$  پارامتر تبدیل نقشه می باشد.  $\Theta_0$  عرض جغرافیایی است که صفحه تصویر آنرا قطع می کند. با اعمال این تغییر مختصات به معادلات (۲۰) تا (۲۲) و تقسیم  $\phi$  به دو قسمت به صورت  $\hat{\phi} + \Phi = \phi$  معادلات آب کم عمق در مختصات کارترین  $X$  و  $Y$  به صورت زیر به دست می آیند.

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial X} + fV - K \frac{\partial S}{\partial X} \quad (23)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial Y} - fU - K \frac{\partial S}{\partial Y} \quad (24)$$

$$\frac{D\hat{\phi}}{Dt} = -S\Phi_0 \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - S\hat{\phi}_0 \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \quad (25)$$

که

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + S \left( U \frac{\partial}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

در روابط بالا  $S = m^2$  و  $K = \frac{U^2 + V^2}{2}$  می باشند. معادلات بالا شکل مناسب و مطلوب برای اعمال روش نیمه لاگرانژی-نیمه ضمنی را دارند.

### گسسته سازی زمانی معادلات

برای اعمال روش نیمه لاگرانژی-نیمه ضمنی در

مثال با  $\Delta x = 1(m)$ ،  $\Delta t = 1(s)$  و  $\alpha = 0.25$  (برای پالایندة زمانی) برای زمان های مختلف اجرا شده است. در مرجع [۶] در زمان  $t = 20(s)$  منطقه ای که از شرایط مرزی تأثیر نمی پذیرد  $x > 140.1(m)$  می باشد که این مقدار به روش نیمه لاگرانژی نیمه ضمنی نیز نزدیک  $140(m)$  به دست آمده است.

جدول ۱: مقایسه بین روش نیمه لاگرانژی نیمه ضمنی با مرجع [۶]، در این جدول  $h$  بر حسب متر،  $u$  بر حسب متر بر ثانیه و زمان بر حسب ثانیه می باشند.

	$t=10$	$t=20$	$t=30$	$t=40$	$t=50$	$t=60$
$h(0, t)$ [۶]	4.89	4.72	4.56	4.37	4.18	4.0
$h(0.5, t)$ روش نیمه لاگرانژی	4.86	4.70	4.54	4.37	4.18	3.98
$u(0, t)$ [۶]	-0.204	-0.423	-0.658	-0.915	-1.20	-1.50
$u(0, t)$ روش نیمه لاگرانژی	-0.206	-0.425	-0.661	-0.916	-1.20	-1.51

### حل معادلات آب کم عمق دوبعدی با استفاده از روش نیمه لاگرانژی-نیمه ضمنی معادلات حاکم

معادلات آب کم عمق برای یک جریان دوبعدی در یک مختصات چرخان مانند زمین به شکل زیر می باشند.

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - fv = 0 \quad (20)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + fu = 0 \quad (21)$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (22)$$

که

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

در معادلات بالا  $f = 2\Omega \sin \Theta$  پارامتر کوریولیس،  $u$  مؤلفه سرعت در جهت مختصه محلی  $x$  که در امتداد طول جغرافیایی قرار دارد،  $v$  مؤلفه سرعت در جهت مختصه محلی  $y$  که در امتداد عرض جغرافیایی قرار دارد و  $\phi = gh$  می باشند.  $\Omega$  سرعت زاویه ای زمین،  $\Theta$  عرض

$$\frac{V^+ - V^-}{2\Delta t} = -\frac{(1+\varepsilon)\hat{\phi}_Y^+ + (1-\varepsilon)\hat{\phi}_Y^-}{2} + \left(-fU - K \frac{\partial S}{\partial Y}\right)^{\text{traj}} \quad (27)$$

$$\frac{\hat{\phi}^+ - \hat{\phi}^-}{2\Delta t} = -S\Phi_0 \left( \frac{(1+\varepsilon)U_X^+ + (1-\varepsilon)U_X^-}{2} + \frac{(1+\varepsilon)V_Y^+ + (1-\varepsilon)V_Y^-}{2} \right) - \left[ S\hat{\phi} \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right]^{\text{traj}} \quad (28)$$

$\varepsilon$  پارامتری است که برای کاهش مسأله تشدیدهای به وجود آمده از نیروهای ایستور از قبیل توپوگرافی به کار می‌رود. از معادله (۲۶) نسبت به  $X$  و از معادله (۲۷) نسبت به  $Y$  مشتق می‌گیریم و مقادیر  $U_X^+$  و  $V_Y^+$  را محاسبه نموده در معادله (۲۸) جایگذاری می‌کنیم. با این جایگذاری و مرتب‌سازی، در نهایت معادلات برای حل به شکل زیر آماده می‌شوند:

$$\nabla^2 \hat{\phi}^+ - \frac{\hat{\phi}^+}{S\Phi_0(1+\varepsilon)^2 \Delta t^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)\Delta t} \left( \frac{\partial Q_U}{\partial X} + \frac{\partial Q_V}{\partial Y} \right) - \frac{1}{S\Phi_0(1+\varepsilon)^2 \Delta t^2} Q_\phi \quad (29)$$

$$U^+ + \Delta t(1+\varepsilon)\hat{\phi}_X^+ = P_U + 2\Delta t R_U^{\text{traj}} \quad (30)$$

$$V^+ + \Delta t(1+\varepsilon)\hat{\phi}_Y^+ = P_V + 2\Delta t R_V^{\text{traj}} \quad (31)$$

که در آنها

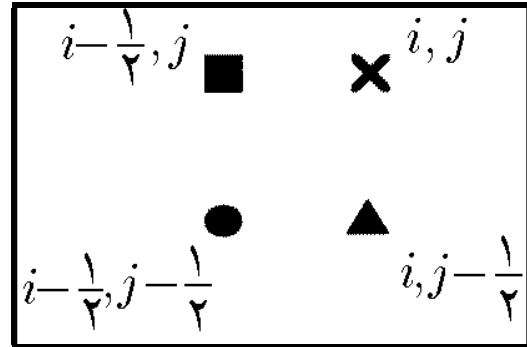
$$P_U = U^- - \Delta t(1-\varepsilon)\hat{\phi}_X^-$$

$$R_U^{\text{traj}} = \left( fV - K \frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\text{traj}}$$

$$P_V = V^- - \Delta t(1-\varepsilon)\hat{\phi}_Y^-$$

$$P_\phi = \hat{\phi}^- - S\Phi_0 \Delta t(1-\varepsilon)(U_X^- + V_Y^-)$$

ابتدا لازم است که یک شبکه مناسب انتخاب گردد. شبکه  $C$ -آراکاوا یکی از مناسب‌ترین شبکه‌ها برای معادلات آب کم‌عمق و معادلات حاکم بر جو زمین می‌باشد.



شکل ۳: چگونگی اندیس‌گذاری انواع نقاط در شبکه

$C$ -آراکاوا .

در اینجا نیز این شبکه انتخاب می‌شود. شبکه  $C$ -آراکاوا مطابق شکل (۳) می‌باشد. در این شکل، دایره توپر نقاط نوع  $f$  نامیده می‌شوند و در آن نقاط مقادیر  $f$  و  $S$  معلومند. نقاط مربع توپر نقاط نوع  $U$  نامیده می‌شوند و مقادیر  $U$  در این نقاط تعیین می‌شوند. مثلث توپر نقاط نوع  $V$  نامیده می‌شوند و مقادیر  $V$  در این نقاط مشخص می‌شوند. علامت ضربدر نقاط نوع  $\phi$  نامیده می‌شوند و مشخص کننده مقادیر  $\phi$  می‌باشند. از اندیس  $i$  برای گسسته‌سازی در جهت  $X$  و از اندیس  $j$  برای گسسته‌سازی در جهت  $Y$  استفاده می‌شود. بنابراین صحیح  $i$  و  $j$  برای نقاط نوع  $\phi$  استفاده می‌شود. بنابراین نقاط دیگر در همسایگی یک نقطه مانند  $(i, j)$  مطابق شکل (۳) نامگذاری می‌شوند. به این ترتیب نقاط نوع  $U$  با مقادیر کسری در  $i$ ، نقاط نوع  $V$  با مقادیر کسری در  $j$  و نقاط نوع  $f$  با مقادیر کسری در هر دو اندیس  $i$  و  $j$  بیان می‌شوند. با توجه به این شبکه معادله تکانه  $U$  در نقاط نوع  $U$ ، معادله تکانه  $V$  در نقاط نوع  $V$  و معادله  $\phi$  در نقاط نوع  $\phi$  در زمان گسسته‌سازی می‌شوند. با اعمال روش نیمه لاگرانژی-نیمه‌ضمنی داریم:

$$\frac{U^+ - U^-}{2\Delta t} = -\frac{(1+\varepsilon)\hat{\phi}_X^+ + (1-\varepsilon)\hat{\phi}_X^-}{2} + \left( fV - K \frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\text{traj}} \quad (26)$$

۵. مقادیر  $\hat{\phi}_Y^+$  در معادله (۳۱) قرار داده می‌شوند و مقادیر  $V^+$  به دست می‌آیند.

۶. با توجه به در دسترس بودن  $\hat{\phi}^+$ ،  $U^+$  و  $V^+$  یک گام زمانی تکمیل می‌شود و برای شروع گام بعدی مقادیر  $\hat{\phi}^+$ ،  $U^+$  و  $V^+$  با مقادیر  $\hat{\phi}^0$ ،  $U^0$  و  $V^0$  مقادیر  $\hat{\phi}^0$ ،  $U^0$  و  $V^0$  با مقادیر  $\hat{\phi}^-$ ،  $U^-$  و  $V^-$  جایگزین می‌شوند.

همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان گردید گسسته‌سازی‌ها در شبکه  $C$ -آراکاو انجام می‌گیرد پس گسسته‌سازی‌ها شامل مشتق‌گیری‌ها و متوسط‌گیری‌ها در نقاط شبکه خواهد بود [۷].

### گسسته‌سازی مکانی معادلات

معادلات نهایی یک معادله هلمهولتز برای  $\phi$ ، معادله تکانه در جهت  $X$  و معادله تکانه در جهت  $Y$  می‌باشند. با توجه به توزیع این مقادیر در شبکه  $C$ -آراکاو این معادلات به ترتیب در نقاط  $(i, j)$ ،  $(i-1/2, j)$  و  $(i, j-1/2)$  گسسته‌سازی می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \hat{\phi})_{i,j}^+ - \frac{\hat{\phi}_{i,j}^+}{\bar{S}_{i,j}^{XY} \Phi_0 (1+\varepsilon)^2 (\Delta t)^2} = \\ \frac{1}{(1+\varepsilon)\Delta t} [(\delta_X Q_U)_{i,j} + (\delta_Y Q_V)_{i,j}] - \\ \frac{1}{\bar{S}_{i,j}^{XY} \Phi_0 (1+\varepsilon)^2 (\Delta t)^2} (Q_\phi)_{i,j} \end{aligned} \quad (35)$$

$$(U)_{i-1/2,j}^+ + \Delta t(1+\varepsilon)(\delta_X \hat{\phi})_{i-1/2,j}^+ = (Q_U)_{i-1/2,j} \quad (36)$$

$$(V)_{i,j-1/2}^+ + \Delta t(1+\varepsilon)(\delta_Y \hat{\phi})_{i,j-1/2}^+ = (Q_V)_{i,j-1/2} \quad (37)$$

### شرایط مرزی برای معادله هلمهولتز

اگر شرایط مرزی برای  $\hat{\phi}$  داده شوند حل مسأله هلمهولتز به‌سادگی با اعمال این شرایط مرزی امکان‌پذیر است. در این‌صورت شبکه طوری در نظر گرفته می‌شود که

$$R_V^{\text{traj}} = \left( fV - K \frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\text{traj}}$$

$$R_\phi^{\text{traj}} = [-S\hat{\phi}(U_X + V_Y)]^{\text{traj}}$$

همچنین  $Q_\psi$  برای یک کمیت مانند  $\psi$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q_\psi = P_\psi + 2\Delta t R_\psi^{\text{traj}}$$

با توجه به معادله هلمهولتز به‌دست آمده مشاهده می‌شود که این معادله کاملاً از دو معادله (۳۰) و (۳۱) مستقل است و با یک شرایط مرزی داده شده به روش‌های تکراری تخفیفی قابل حل می‌باشد. در معادلات بالا مقدار  $R^{\text{traj}}$  برای یک کمیت مانند  $\psi$  به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} R_\psi^{\text{traj}} = \frac{(1+\varepsilon)R_\psi(X, Y, t)}{2} + \\ \frac{(1-\varepsilon)R_\psi(X-2\alpha, Y-2\gamma, t)}{2} \end{aligned} \quad (32)$$

در معادله بالا  $\alpha$  و  $\gamma$  مقادیر جابه‌جایی خطوط مشخصه در دو جهت  $X$  و  $Y$  می‌باشند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\alpha = \Delta t U(X - \alpha, Y - \gamma, t) \quad (33)$$

$$\gamma = \Delta t V(X - \alpha, Y - \gamma, t) \quad (34)$$

مقادیر  $\alpha$  و  $\gamma$  از روش تکراری به‌دست می‌آیند که در بخش‌های قبل توضیح داده شد. برای به‌دست آوردن مقادیر طرف راست که در نقاط شبکه نیستند، از میان‌یابی دوبعدی درجه سوم استفاده می‌شود. برای حل این معادلات مراحل ذیل انجام می‌گیرد:

۱. طرف راست این معادلات با توجه به این نکته که همه در زمان  $t$  و  $t - \Delta t$  هستند محاسبه می‌شوند.

۲. معادله (۲۹) با شرایط مرزی داده شده یا محاسبه شده، به روش‌های تکراری برای  $\hat{\phi}^+$  حل می‌شود.

۳. با استفاده از مقادیر  $\hat{\phi}^+$  که از مرحله قبل حاصل شدند مقادیر  $\hat{\phi}_Y^+$  و  $\hat{\phi}_X^+$  محاسبه می‌شوند.

۴. مقادیر  $\hat{\phi}_X^+$  در معادله (۳۰) قرار داده می‌شوند و مقادیر  $U^+$  به‌دست می‌آیند.



۲. اگر مقادیر  $V$  در مرزهای جنوبی-شمالی داده شوند.

با معلوم بودن مقادیر  $V$  در مرزهای جنوبی-شمالی به جای مقادیر  $\hat{\Phi}$ ، باید با استفاده از این مقادیر داده شده و معادلات حاکم دو معادله برای  $\hat{\Phi}$  استخراج نماییم. در اینجا نیز مانند حالت قبل شبکه را طوری در نظر می‌گیریم که نقاط نوع  $V$  در مرزهای مورد نظر قرار گیرند و داریم (الف) اعمال شرایط مرزی برحسب  $V$  داده شده در مرز جنوبی

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta Y^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} + \frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2} + 1 \right) \hat{\Phi}_{i,1}^+ \\ & - \hat{\Phi}_{i,2}^+ - \frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2} (\hat{\Phi}_{i-1,1}^+ + \hat{\Phi}_{i+1,1}^+) \\ & = \frac{\Delta Y^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} (Q_\Phi)_{i,1} \\ & - \frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_V)_{i,3/2} \\ & - \frac{\Delta Y^2}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_{UX})_{i,1} \\ & + \frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)} (V^+)_{i,1/2} \end{aligned} \quad (۴۰)$$

(ب) شرط مرزی داده شده برحسب  $V$  در مرز شمالی

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta Y^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} + \frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2} + 1 \right) \hat{\Phi}_{i,N}^+ \\ & - \hat{\Phi}_{i,N-1}^+ - \frac{\Delta Y^2}{\Delta X^2} (\hat{\Phi}_{i-1,N}^+ + \hat{\Phi}_{i+1,N}^+) \\ & = \frac{\Delta Y^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} (Q_\Phi)_{i,N} \\ & + \frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_V)_{i,N-1/2} \\ & - \frac{\Delta Y^2}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_{UX})_{i,N} \\ & - \frac{\Delta Y}{\Delta t(1+\varepsilon)} (V^+)_{i,N+1/2} \end{aligned} \quad (۴۱)$$

نقاط نوع  $\hat{\Phi}$  در مرزها قرار بگیرند، با این عمل دیگر نیازی به شرایط مرزی معادلات  $U$  و  $V$  نیست [۸]. در صورتی که به جای  $\hat{\Phi}$  در مرزهای شرقی-غربی مقادیر  $U$  یا در مرزهای جنوبی-شمالی مقادیر  $V$  داده شوند، چگونه باید عمل کرد؟

۱. اگر مقادیر  $U$  در مرزهای شرقی-غربی داده شوند.

با معلوم بودن مقادیر  $U$  در مرزهای شرقی-غربی به جای  $\hat{\Phi}$ ، باید از این مقادیر داده شده و معادلات حاکم دو معادله برای  $\hat{\Phi}$  استخراج نماییم. برای این کار شبکه را طوری در نظر می‌گیریم که نقاط نوع  $U$  در مرزهای مورد نظر قرار گیرند و معادلات مرزی مشابه حالت یک‌بعدی با کمی محاسبات بیشتر به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

(الف) شرط مرزی برحسب  $U$  داده شده در مرز غربی

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta X^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} + \frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2} + 1 \right) \hat{\Phi}_{1,j}^+ \\ & - \hat{\Phi}_{2,j}^+ - \frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2} (\hat{\Phi}_{1,j-1}^+ + \hat{\Phi}_{1,j+1}^+) \\ & = \frac{\Delta X^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} (Q_\Phi)_{1,j} \\ & - \frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_U)_{3/2,j} \\ & - \frac{\Delta X^2}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_{VY})_{1,j} \\ & + \frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)} (U^+)_{1/2,j} \end{aligned} \quad (۳۸)$$

(ب) شرط مرزی برحسب  $U$  داده شده در مرز شرقی

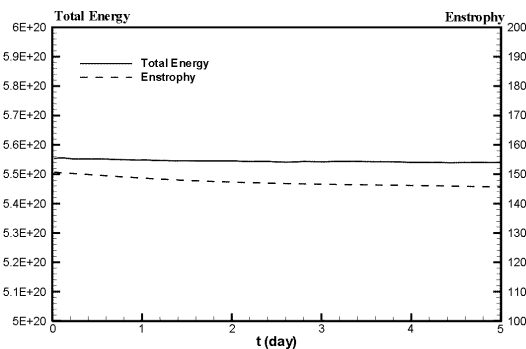
$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta X^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} + \frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2} + 1 \right) \hat{\Phi}_{M,j}^+ \\ & - \hat{\Phi}_{M-1,j}^+ - \frac{\Delta X^2}{\Delta Y^2} (\hat{\Phi}_{M,j-1}^+ + \hat{\Phi}_{M,j+1}^+) \\ & = \frac{\Delta X^2}{\bar{S}^{XY} \Phi_0 \Delta t^2 (1+\varepsilon)^2} (Q_\Phi)_{M,j} \\ & + \frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_U)_{M-1/2,j} \\ & - \frac{\Delta X^2}{\Delta t(1+\varepsilon)} (Q_{VY})_{M,j} \\ & - \frac{\Delta X}{\Delta t(1+\varepsilon)} (U^+)_{M+1/2,j} \end{aligned} \quad (۳۹)$$

که  $\beta = 1.5 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  و  $\hat{f} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  در این مسأله شرط مرزی دوره‌ای<sup>۷</sup> بر مرزهای غربی و شرقی حاکم است. بنابراین برای یک کمیت وابسته مانند  $\Psi$  داریم:

$$\Psi(X, Y, t) = \Psi(X + L, Y, t) \quad (45)$$

ولی در مرزهای شمالی و جنوبی هیچ‌گونه جرمی از شاره از ناحیه خارج نمی‌شود، یعنی داریم:

$$V(X, 0, t) = V(X, D, t) = 0 \quad (46)$$



شکل ۵: کمیت‌های پایستار انرژی کل بخش بر چگالی با واحد  $\text{Jm}^3/\text{kg}$  و آنستروفی بر حسب  $\text{m}^2/\text{s}^2$ .

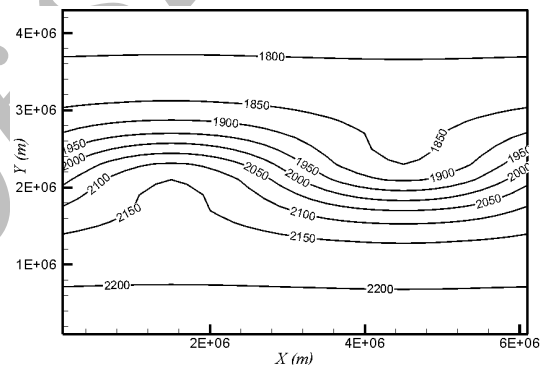
دو نکته در اعمال شرایط مرزی قابل ذکر است اول آنکه، در مرزهای غربی و شرقی در حل معادله هلمهولتز از شرایط مرزی دوره‌ای استفاده می‌شود و دیگر نیازی به محاسبه  $\hat{\phi}$  در مرزها نیست و دوم اینکه در مرزهای شمالی و جنوبی مقادیر  $V = 0$  داده شده‌اند که باید این مقادیر به دو معادله (۴۰) و (۴۱) اعمال شوند تا معادلات لازم برای  $\hat{\phi}$  در مرزهای شمالی و جنوبی به دست آیند. روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی به خوبی کمیت‌هایی مانند انرژی کل، ارتفاع متوسط و آنستروفی را پایسته نگه می‌دارد. این مطلب برای انرژی کل و آنستروفی در شکل (۵) و برای ارتفاع متوسط در شکل (۶) نشان داده شده‌است. نتایج اجرای کد نوشته شده برای حل مسأله ذکر شده برای پیش‌بینی یک و دو روزه ارتفاع ژئوپتانسیل به ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) آمده‌اند. این نتایج با شرایط  $\varepsilon = 0$ ،  $\Delta X = \Delta Y = 200 \text{ km}$ ،  $\Delta t = 1000 \text{ s}$  و ضریب پالایندگی زمانی  $\alpha = 0.05$  به دست آمده‌اند.

## نتایج حل عددی

برای بررسی چگونگی عملکرد روش نیمه‌لاگرانژی نیمه‌ضمنی این روش را به یک شرط اولیه داده شده با شرایط مرزی مشخص اعمال می‌کنیم. شرط اولیه برای  $h = \phi/g$  داده شده‌است و مقادیر  $U$  و  $V$  از تقریب زمینگرد به دست می‌آیند. شرط اولیه  $h$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۹].

$$h(X, Y) = H_0 + H_1 \tanh \frac{9(D/2 - Y)}{2D} + H_2 \sec^2 h^2 \frac{9(D/2 - Y)}{2D} \sin\left(\frac{2\pi X}{L}\right) \quad (47)$$

این شرط اولیه در شکل (۴) نشان داده شده‌است.



شکل ۴: میدان  $h$  اولیه ورودی به کد کامپیوتری، معادله (۴۲).

مؤلفه‌های میدان سرعت اولیه یعنی  $U$  و  $V$  از تقریب زمینگرد به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$U = \left(\frac{-g}{f}\right) \frac{\partial h}{\partial Y}, \quad V = \left(\frac{g}{f}\right) \frac{\partial h}{\partial X} \quad (48)$$

ناحیه مورد نظر یک مستطیل به طول  $L = 6000 \text{ (km)}$  و عرض  $D = 4400 \text{ (km)}$  می‌باشد که ثوابت زیر در آن تعریف شده‌اند.

$$H_0 = 2000 \text{ (m)}, \quad H_1 = 220 \text{ (m)}$$

$$H_2 = 133 \text{ (m)}, \quad g = 10 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$$

پارامتر کوریولیس یعنی  $f$  با رابطه زیر بیان می‌شود.

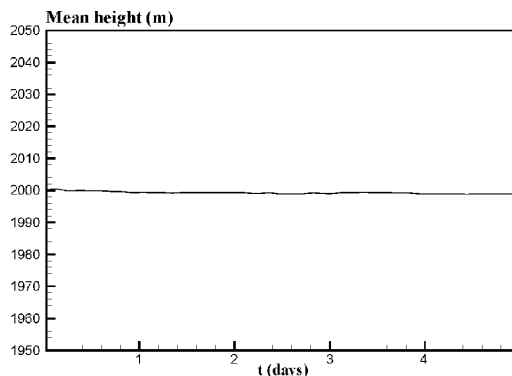
$$f = \hat{f} + \beta(Y - D/2) \quad (49)$$

### نتیجه گیری و جمع بندی

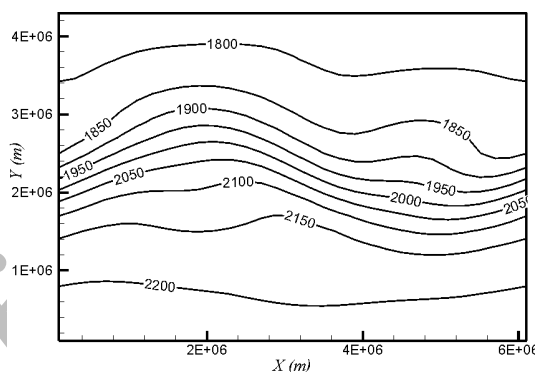
روش نیمه لاگرانژی-نیمه ضمنی برای حل معادلات آب کم عمق یک بعدی و دوبعدی به کار برده شد. دو نوع از شرایط مرزی یکی بر حسب مؤلفه های سرعت و دیگری بر حسب مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیل، بررسی شدند. در حالتی که مؤلفه های سرعت به عنوان شرایط مرزی داده می شوند روابط جدیدی برای اعمال این شرایط به معادله هلمهولتز به دست آمدند. از میان یابی درجه سوم برای به دست آوردن مقادیر مربوط به نقاط بین شبکه های استفاده شده است که یک انتخاب مناسب با توجه به هزینه های محاسباتی و دقت می باشد. روش مذکور شرط پایستاری کمیت هایی از قبیل انرژی کل، آنستروپی و ارتفاع میانگین را به خوبی ارضا می کند که بیانگر مدل سازی درست جمله های غیرخطی و مناسب بودن این روش برای این گونه معادلات می باشد.

### تشکر و قدردانی

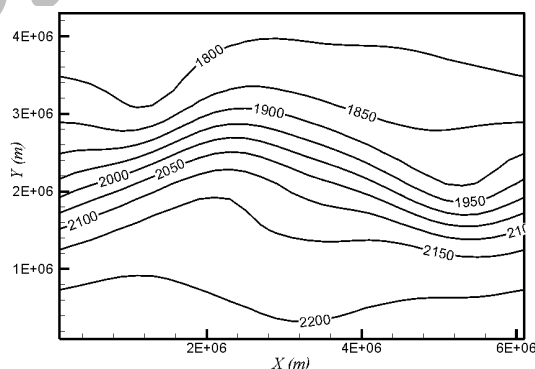
نویسندگان این مقاله کمال تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه تهران و پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو، به خاطر حمایت هایشان در انجام این تحقیق، ابراز می دارند.



شکل ۶: کمیت پایستار ارتفاع متوسط  $h$  (m).



شکل ۷: پیش بینی ۲۴ ساعته میدان  $h$ .



شکل ۸: پیش بینی ۴۸ ساعته میدان  $h$ .

### مراجع

- 1 - Ritchie, H. (1995). "Implementation of the semi-Lagrangian method in a high-resolution version of ECMWF forecast model." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 123, PP. 489-514.
- 2 - Duran, Dale R. (1999). *Numerical methods for wave equation in geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, New York, Inc.
- 3 - Staniforth, A. and Cote, J. (1991). "Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models--A review." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 119, PP. 2206-2223.
- 4 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi-Lagrangian schemes: the one-dimensional case. Part I." *HIRLAM Technical Report 43*.
- 5 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi-Lagrangian schemes: the one-dimensional case. Part II." *HIRLAM Technical Report 44*.

- 6 - Abbott, M. B. and Basco, D. R. (1989). *Computational fluid dynamics an introduction for engineers*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- 7 - Bergeron, G., Laprise, R. and Caya, D. with the participation of Robert, A., Giguere, M., Benoit, R. and Chartier, Y. (1994). *Formulation of the mesoscale compressible community, (MC2) model*. Report of Cooperative Center for Research in Mesometorology.
- 8 - McDonald, A. (1999). "Well-posed boundary conditions for semi--Lagrangian schemes: the tow-dimensional case." *HIRLAM Technical Report 45*.
- 9 - Navon, I. M., and Riphagen, H. A., (1979). "An implicit compact fourth--order algorithm for solving the shallow water equations in conservation-law form." *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 107, PP. 1107-1127.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Semi Lagrangian
- 2 - Semi Implicit
- 3 - Advection
- 4 - Forced Advection
- 5 - Numerical Diffusion
- 6 - Coupling
- 7 - Periodic

Archive of SID