

# تعیین تواترهای ارتعاشی دیوارهای برشی بازشودار با استفاده از روش المان مرزی و تکنیک تقابل دوگانه (DRM)

## شفیق مهرآئین

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

## اسدالله نورزاد

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۹/۷/۱۲، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۱/۸/۲۱، تاریخ تصویب ۸۲/۱۱/۱۸)

## چکیده

در این مقاله نحوه استفاده از روش المان مرزی با کمک تکنیک DRM<sup>۱</sup> در تحلیل دیوارهای برشی (خصوصاً دیوارهای برشی بازشودار) بررسی می شود. سپس چگونگی ساده سازی مسائلی که بار حجمی وجود دارد با استفاده از روش بسط تابعی<sup>۲</sup> و تکنیک مذکور از نظر می گذرد. به عبارت دیگر به کمک این دو روش انتگرالهای میدانی ناشی از بارهای حجمی موجود در روش المان مرزی که با ماهیت این روش تطابقی ندارند، به یکسری انتگرالهای مرزی تبدیل می شوند. در روند این ساده سازی و استفاده از روش بسط تابعی، توابع شکل مختلفی مورد بررسی قرار می گیرند و در ادامه تابع شکلی پیشنهاد می شود که در مقایسه با تابع شکل مرسوم در روش المان مرزی در محاسبه فرکانسهای ارتعاش آزاد دیوارهای برشی دارای خطای کمتری است. برای تعیین میزان دقت، جوابهای بدست آمده از این روش (فرکانسهای ارتعاش آزاد دیوار) با جوابهای حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه می شود و در نهایت نحوه تاثیر تابع شکل، شکل سازه (دیوار) و چگونگی شرایط مرزی در فرکانسهای ارتعاش آزاد مورد بررسی و نتیجه گیری قرار می گیرند.

## واژه های کلیدی: روش المان مرزی، روش تقابل دوگانه

## مقدمه

المان بندی یا شبکه بندی داخل دیوار مورد نیاز نیست. بدین ترتیب استفاده از روش المان مرزی<sup>۴</sup> در تحلیل دیواره های برشی برخلاف روش اجزاء محدود علاوه بر صرف زمان کمتر برای آماده سازی اطلاعات موردنیاز، محاسن دیگری را از قبیل دقت بیشتر در کمیت تنش در نقاط داخلی سازه، ذخیره سازی اطلاعات کمتر و طبعاً زمان پردازش کمتر، نیاز کمتر به اطلاعات غیرضروری و قابلیت کاربرد بهتر و راحت تر در محیط های غیرقابل تراکم دار است [۱].

## مقایسه ویژگیهای روش المان مرزی و روش

### اجزاء محدود

### قابلیت کاربرد

کلیه روشهای المان مرزی، حلهای اساسی<sup>۵</sup> معادله حاکم بر حوزه را که در فضای بی نهایت انجام می گیرد، به عنوان تابع وزنی مورد استفاده قرار می دهند و به همین دلیل المان بندی در حوزه مورد نیاز نیست. این

دیوارهای برشی یکی از عناصر مقاوم در برابر زلزله و نیروهای دینامیکی در ساختمانهای بتنی محسوب می شوند. از طرف دیگر طراحی و تحلیل دیوارهای برشی در ساختمانهای بلند مستلزم المان بندی زیاد و طبعاً وارد کردند داده های با حجم زیاد به برنامه های رایانه ای می باشد مخصوصاً در دیوارهای برشی که در آنها بازشو<sup>۳</sup> وجود دارد، زیرا محاسبه و تعیین توزیع تنش در اطراف این بازشوها، هنگامیکه دیوار تحت بارگذاری دینامیکی قرار دارد، جهت (بارگذاری) رسیدن به دقت مناسب محتاج المان بندی ریزتر در اطراف این بازشوها است. بدین ترتیب طراحی این عناصر که مستلزم تغییر ابعاد و اندازه ها است صرف زمان بیشتری را طلب می کند. بررسی این عنصر سازه ای با استفاده از روش المان مرزی برخلاف روش اجزاء محدود که محتاج المان بندی داخل دیوار است، فقط نیازمند المان بندی مرز جسم می باشد و

المان بندی، جداسازی المانها و تقریب های عددی است که موجب پیدایش جوابها و حل تقریبی نسبت به حل دقیق می شود. لازم به ذکر است که انتگرال گیریهای عددی اغلب نسبت به مشتق گیری های عددی پایدارتر و دقیق تر می باشند. که البته در روش المان مرزی از انتگرال گیریهای عددی استفاده می شود و هیچ نیازی به مشتق گیری عددی از متغیرهای مربوطه نیست [۱].

## فرمول سازی تحلیلی در روش المان مرزی

### حل اساسی مساله در حالت دو بعدی

باتوجه به حل مساله کلومین (بار نقطه ای در فضای بی نهایت)، جواب اساسی این مساله بصورت ذیل خواهد بود [۲]:

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r} \right] \left[ (3-4\nu)\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] \quad (1)$$

و مقدار ترکشن نیز در نقطه Q برابر خواهد شد با:

$$T_{ij} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right) \quad (2)$$

در روابط (۱) و (۲) فاصله بین نقطه P (محل وارد شدن بار نقطه ای) و نقطه Q (که تغییر مکانها و ترکش ها در آن مورد نظر است) می باشد. بردار تغییر مکان و ترکشن<sup>۶</sup> (بردار تنش) مذکور که از حل کلومین بدست آمده اند، اساس روش المان مرزی را شکل می دهند.  $\nu$  نسبت پواسون و عملگر  $\partial$  نمایانگر مشتق،  $\mu$  مدول برشی،  $V_{ij}$  بردار تغییر مکان و  $T_{ij}$  بردار ترکشن می باشند.

### رابطه انتگرالی برای محاسبه تغییر مکانها

برای رسیدن به یک سیستم معادلات جبری خطی با جواب یکتا، می توان از تئوری بتی<sup>۷</sup> روی مرزهای میدان مورد بررسی استفاده کرد. رابطه انتگرالی (۳) بیانگر تئوری کار متقابل می باشد:

خصوصیت موجب بسط گستره کاربرد در مسائلی که مورد علاقه مهندسين است، می شود. نه تنها تمامی مسائلی که قابل حل با روش اجزاء محدود می باشند توسط روش المان مرزی نیز قابل حل هستند. بلکه در مسائلی که روش اجزاء محدود توان حل ندارد (محیطهای نامحدود)، این روش قابلیت کاربرد خوبی از خود نشان می دهد [۱].

### ابعاد مسئله

روش المان مرزی این قابلیت را دارد که بعد مساله را به اندازه یک واحد کاهش دهد. بدین معنی که در مسائل دوبعدی، این روش تحلیل، یک معادله انتگرالی مرزی یک بعدی بوجود می آورد و متشابهها در مسائل سه بعدی فقط معادلات انتگرالی روی سطح بوجود می آیند که بدین ترتیب یک بعد از ابعاد فیزیکی مساله در حین تحلیل کاسته خواهد شد. لذا در بسیاری از مسائل علمی با استفاده از روش المان مرزی گسسته سازی ساده مرز مورد نظر در حل مساله، لزوماً ما را به یک سیستم معادلات جبری توأم خواهد رساند که در مقایسه با المان بندی حجم جسم یا مساله موردنظر، المانهای بسیار اندکی مورد استفاده قرار خواهد گرفت [۱].

### مدلسازی داخل پیوسته

در روش المان مرزی، در مدلسازی یک سیستم، فقط مرز هندسی جسم مدلسازی می شود. به محض اینکه اطلاعات مرزی مورد نیاز بدست آمد، می توان متغیرهای لازم را در هر نقطه دلخواه، داخل حجم جسم باتوجه به مقادیر بدست آمده مرزی بدست آورد. علاوه بر این، حل مورد بحث در داخل حجم، کاملاً پیوسته خواهد بود. یکی از نتایج ویژگی نخست این است که با بدست آوردن مقادیر مرزی، می توان متغیرهای موردنیاز را در هر نقطه داخل حجم جسم، بدون اینکه از قبل مشخص شده باشد و یا المان بندی شرکت کرده باشد بدست آورد و نیز در این حالت جوابها در این نقاط از دقت بیشتری برخوردار هستند [۱].

### توزیع دقت و خطا

معادله انتگرال مرزی، خود بیان حل دقیق مساله مورد نظر می باشد. به همین علت خطاهای مربوط به

$$\int_{S+S_\varepsilon} U_{ij}(P, Q)t_i(Q)ds + \int_V U_{ij}(p, q)f_i(q)dv = \int_{S+S_\varepsilon} T_{ij}(P, Q)u_i(Q)ds \quad (5)$$

اگر مقدار  $\varepsilon$  را به سمت صفر میل دهیم روابط زیر بدست خواهند آمد :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} U_{ij}(P, Q)t_i(Q)ds = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(P, Q)u_i(Q)ds = cu_j(P) \quad (6)$$

لذا معادله انتگرال مرزی بصورت زیر در خواهد آمد :

$$c_i u_i(P) = \int_S U_{ij}(P, Q)t_i(Q)ds - \int_S T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds + \int_V U_{ij}(P, Q)f_j(Q)dv \quad (7)$$

با المان بندی مرز جسم و با تغییر محل وارد شدن بار نقطه ای  $P$  از یک گره به گره دیگر و محاسبه انتگرالهای موجود در رابطه (۸) دستگاه معادلات جبری خطی به صورت زیر نمایان خواهد شد:

$$[H][u] = [G][t] + [b] \quad (8)$$

که در آن ماتریسهای  $H$  و  $G$  به ترتیب شامل انتگرالهای هسته ای  $T_{ij}$  و  $U_{ij}$  می باشند. شایان ذکر است که عبارت  $cu_i(p)$  فقط در اعضاء قطری ماتریس  $H$  شرکت می کند (وقتی که  $P$  روی  $Q$  منطبق می شود). اکنون با اعمال شرایط مرزی (ترکشن ها و تغییر مکانهای معلوم) دستگاه معادلات جبری (۹) به راحتی قابل حل خواهد بود [۲].

### روش تقابل دوگانه (DRM)

روش تقابل دوگانه برای انتقال انتگرالهای میدانی ناشی از بار حجمی به انتگرالهایی که بر روی مرز میدان حساب می شوند، می تواند استفاده شود [۳]. بطور کلی انتگرال میدانی موجود در رابطه (۸) را می توان به صورت زیر نشان داد :

$$\int_V U_{ij} b_i dv \quad (9)$$

$$\int_S t_i^{(a)} u_i^{(b)} ds + \int_V f_i^{(a)} u_i^{(b)} dv$$

$$\int_S t_i^{(b)} u_i^{(a)} ds + \int_V f_i^{(b)} u_i^{(a)} dv \quad (3)$$

که  $u_i$  برابر تغییر مکان،  $f_i$  بار حجمی و  $t_i$  ترکشن در نقاط مرزی است.

در این حال مجموعه تغییرمکانها، نیروها و ترکشن هایی که در رابطه (۳) ذکر شده اند بصورت زیر تعریف می گردند:

مجموعه (a) : این مجموعه در حقیقت شامل مساله واقعی است که در آن  $u_i^{(a)}$  تغییرمکانها و  $t_i^{(a)}$  ترکشن هائی هستند که در ابتدای کار مجهول می باشند و در نهایت باید شرایط مرزی را ارضاء کنند.

مجموعه (b) : این مجموعه شامل  $u_i^{(b)}$  یا تغییر مکانهای معلوم و  $t_i^{(b)}$  یا ترکشن های معلوم می باشند که باید شرایط تعادل و سازگاری را ارضاء کنند. یکی از این مجموعه ها می تواند مجموعه تغییر مکانها و ترکشن های مربوط به نقطه  $Q$  از یک سطح یک جسم به ابعاد بینهایت باشد که تحت بار نقطه ای واحد در نقطه داخلی  $P$  قرار گرفته است (مساله کلوین). لذا در معادله بتی (رابطه ۳) می توان جایگزاری های زیر را انجام داد:

$$u_i^{(a)} = u_i(Q) \quad t_i^{(a)} = t_i(Q) \quad f_i^{(a)} = f_i(q)$$

$$u_i^{(b)} = U_{ij}(P, Q) \quad t_i^{(b)} = T_{ij}(P, Q) \quad f_i^{(b)} = 0 \quad (4)$$

که در آن  $U_{ij}$  و  $T_{ij}$  را می توان از روابط (۱) و (۲) بدست آورد. توجه به نکته الزامی است که در رابطه (۴) انتگرال نیروی حجمی یک انتگرال روی حجم جسم است و در رابطه (۵)  $q$  یک نقطه داخلی است و نباید آن را با نقطه  $Q$  یا هر نقطه مرزی دیگر اشتباه گرفت.

نکته مهم : در مساله کلوین تغییر مکانها و ترکشن ها وابسته به فاصله  $q$  و  $f$  و یا به عبارت دیگر وابسته به  $r(P, Q)$  می باشند. حال اگر نقطه  $P$  به نقاط مرزی  $Q$  نزدیک شود، مقدار  $r(P, Q)$  به سمت صفر میل می کند. برای حل این مشکل کره ای به شعاع کوچک  $\varepsilon$  و به سطح  $S_\varepsilon$  را در نظر می گیریم که نقطه  $P$  مرکز آن باشد. در این صورت رابطه (۴) به شکل زیر در خواهد آمد:

بدست آید. سپس با استفاده از روش باقیمانده وزنی<sup>۹</sup> و حل اساسی بدست آمده که یا تابع زمان است و یا در صورت استفاده از تبدیلهای انتگرالی، تابع تواتر، مقادیر ویژه محاسبه می شوند. در این روش تعیین مقادیر ویژه بسیار مشکل خواهد بود زیرا درایه های ماتریس مربوطه که مقادیر ویژه باید از آن بدست آیند به تابع تواتر خواهند شد.

۲ - در این روش از حل اساسی استاتیکی استفاده می شود (معادله حاکم بدون حضور ترم اینرسی مورد توجه قرار می گیرد) و سپس ترم اینرسی موجود بعنوان بار حجمی مورد تحلیل قرار می گیرند در این حالت اعضاء ماتریسی که برای تعیین مقاومت ویژه مورد استفاده قرار می گیرد، تابع زمان یا تواتر نخواهند بود و محاسبه تواترهای ارتعاش آزاد (مقادیر ویژه) به سهولت امکانپذیر است. در ادامه این روش به تفصیل بررسی می شود. گرچه روش تقریبی است، اما همانطور که در مقاله ملاحظه می گردد، با انتخاب تابع مناسب، می توان به دقت مناسب دست یافت.

$$b = -\hat{p}\ddot{u}$$

(۱۵)

گام بعدی در فرمول بندی روابط، معرفی تابع تقریب برای بار حجمی  $\hat{p}\ddot{u}$  می باشد یعنی:

$$\hat{p}\ddot{u}_k(x, y, t) = \sum_{j=1}^{iv} f^j(x, y) a_k^j(t)$$

(۱۶)

اگر رابطه فوق را بصورت ماتریسی بنویسیم داریم:

$$\hat{p}\ddot{u} = Fa$$

(۱۷)

اکنون با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$Hu - Gt = -\rho(H\hat{u} - G\hat{t})F^{-1}\ddot{u}$$

(۱۸)

و یا به شکل خلاصه تر:

$$M\ddot{u} + Hu = Gt$$

(۱۹)

که در آن ماتریس  $M$  برابر است با:

$$M = \rho(H\hat{u} - G\hat{t})F^{-1}$$

(۲۰)

اکنون برای عبارت  $b_i$  در رابطه فوق می توان از رابطه تقریبی (۱۱) استفاده کرد:

$$b = \sum_{j=1}^{iv} f^j a^j$$

(۱۰)

$a^j$  ضرایبی هستند که در ابتدای کار مجهول می باشند.  $f^j$  ها نیز توابع تقریب یا توابع شکل هستند. در حقیقت معادله فوق را می توان برای  $N$  نقطه مرزی بکار برد. اگر بتوان حلهای خاص  $\hat{u}_{mk}^j$  را پیدا کرد به گونه ای که معادله نویر<sup>۸</sup> را ارضاء کند یعنی:

$$\mu u_{mk, ll}^j + \frac{\mu}{1 - 2\nu} u_{lk, lm}^j = \delta_{mk} f^j$$

(۱۱)

آنگاه با جایگذاری رابطه (۱۱) در معادله (۸) و با بکارگیری اصل تقابل در انتگرال میدانی خواهیم داشت:

$$c_k u_k^i = \int_S u_{lk} t_k ds - \int_S T_{lk} u_k d_s + \sum_{j=1}^N a_m^j$$

$$\left( c_k u_{mk}^{ij} + \int_S T_{lk} \hat{u}_{mk}^j ds - \int_S U_{lk} \hat{u}_{mk}^j ds \right)$$

(۱۲)

که در این رابطه  $\hat{t}_{mk}^j$  مقدار ترکشن متناظر با حل خاص  $\hat{u}_{mk}^j$  (تغییر مکان) می باشد. پس از امان بندی مرز میدان و تقریب زدن تغییرات  $u$  و  $t$  و  $\hat{u}$  و  $\hat{t}$  در هر المان، با نوشتن معادله (۱۳) بصورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$c_k u_k^i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} t_k = \sum_{j=1}^N$$

$$\left( a^j c \hat{u}^{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_k^j - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{t}_k^j \right)$$

(۱۳)

حال با بکار بردن معادله (۱۴) برای تمام نقاط مرزی، دستگاه معادلات نهایی بدست خواهد آمد:

$$Hu - Gt = (H\hat{u} - G\hat{t})a$$

(۱۴)

بطور کلی مسائل الاستو دینامیک که در آنها نیروی اینرسی وجود دارد، با صرف نظر از وزن سازه، به دو صورت حل می شوند:

۱ - ابتدا باید حل اساسی (تابع گرین) معادله حاکم

### بررسی حالت ارتعاش آزاد

تحلیل مودها و تواترهای ارتعاش آزاد را می توان با صفر قرار دادن بارگذاری های خارجی در معادله (۲۵) بدست آورد :

$$\bar{M}_1 \ddot{u}_2 + \bar{H}_1 u_2 = 0 \quad (26)$$

با فرض اینکه بتوان تغییر مکانها را بصورت توابع هارمونیک از زمان در نظر گرفت، خواهیم داشت :

$$\ddot{u}_2 - \omega^2 u_2 \quad (27)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس زاویه ای طبیعی سیستم است. با جایگذاری رابطه (۲۸) در رابطه (۲۷) و صرب طرفین مساوی در معکوس ماتریس  $\bar{H}_1$  بدست خواهد آمد :

$$A u_2 = \lambda u_2$$

$$A = \bar{H}_1^{-1} \bar{M}_1; \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (28)$$

می توان مقادیر ویژه ماتریس  $A$  را ( $\lambda$ ) طبق مرجع [۳] بدست آورد.

### بررسی دیوارهای برشی به روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM در مقایسه با روش اجزاء محدود

یکی از مشکلات روش DRM تعیین تابع شکل مناسب است تاکنون در تحقیق های علمی که در زمینه استفاده از روش المان مرزی با کمک تکنیک تقابل دوگانه انتشار یافته اند، توابع شکل محدودی پیشنهاد شده است که اکثراً بصورت توابع شعاعی می باشند و معروف ترین این توابع، تابع شکل شعاعی  $1+r$  می باشد [۷،۶،۵،۴]. در این تحقیق با هدف رسیدن به خطای کمتر در فرکانسهای ارتعاش آزاد سیستم توابع شکل مختلفی مورد بررسی قرار گرفتند که عبارتند از [۸] :

$$\sqrt{sr^2 + t} + \frac{1}{3} \frac{t^2}{\sqrt{sr^2 + t}}, S + tr + wr^2 \ln(r),$$

$$S + tr^2 + wr \ln(r), S + tr + wr \ln(r), S + tr^n,$$

$$S + tr + wr^2, S + tr^2 + wr^3, 1 + r^1 + r^s$$

دستگاه معادلات (۲۰) را می توان مطابق شرایط مرزی اعمال شده قسمت بندی کرده، با استفاده از تکنیک فشردگی استاتیکی <sup>۱۰</sup> آن را به گونه ای مرتب کرد که فقط تغییر مکانهای نامعلوم به عنوان مجهولات مساله قرار گیرند. علت امکان بارگیری این روش آن است که در فرمول بندی مذکور مشتقات ترکشن برحسب زمان وجود ندارند.

اکنون اگر مرز میدان حل مساله را به گونه ای تقسیم بندی کنیم که کلیه نقاطی که دارای تغییر مکان های معلوم  $u_1$  و ترکشن های مجهول  $t_1$  می باشند در محدوده مرز  $\Gamma_1$  و کلیه نقاطی که دارای تغییر مکان مجهول  $u_2$  و ترکشن های معلوم  $t_2$  می باشند در محدوده مرز  $\Gamma_2$  قرار گیرند یعنی :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

آنگاه عمل جداسازی دستگاه معادلات کلی، مطابق روابط (۲۳) و (۲۴) انجام خواهد گرفت :

$$M_{11} \ddot{u}_1 + M_{12} \ddot{u}_2 + H_{11} u_1 + H_{12} u_2 = G_{11} t_1 + G_{12} t_2 \quad (22)$$

$$M_{12} \ddot{u}_1 + M_{22} \ddot{u}_2 + H_{21} u_1 + H_{22} u_2 = G_{21} t_1 + G_{22} t_2 \quad (23)$$

اگر از معادله (۲۳) مقدار ترکشن  $t_1$  را برحسب بقیه متغیرها بدست آورده، در معادله (۲۴) جایگذاری کنیم خواهیم داشت :

$$\bar{M}_1 \ddot{u}_2 + \bar{H}_1 u_2 = \bar{M}_2 \ddot{u}_1 + \bar{H}_2 u_1 + \bar{G} t_2 \quad (24)$$

که در آن ماتریس های تغییر یافته برابر هستند با :

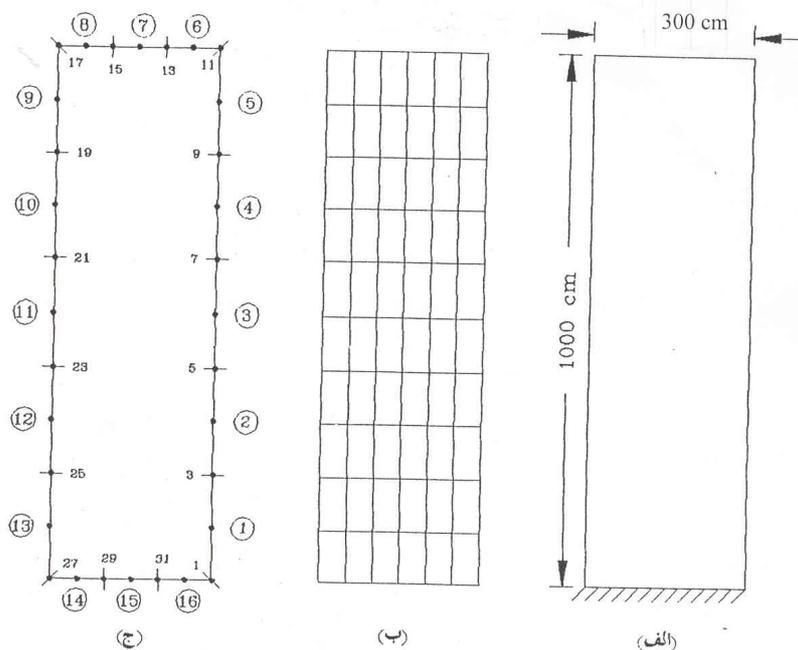
$$\bar{M}_1 = M_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} M_{12}$$

$$\bar{H}_1 = H_{22} - H_{21} G_{11}^{-1} H_{12}$$

$$\bar{G} = G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12}$$

$$\bar{M}_2 = G_{21} G_{11}^{-1} M_{11} - M_{21}$$

$$\bar{H}_2 = G_{21} G_{11}^{-1} H_{11} - H_{21}$$



شکل ۱: الف) مشخصات هندسی دیوار برشی (ضخامت ۳۰ cm)  
 ب) مدل المان بندی به روش اجزاء محدود با ۶۰ المان  
 ج) مدل المان بندی به روش المان مرزی با ۱۶ المان

به بیان دقیق تر، یکی از شرایط لازم برای تابع شکل مناسب، نزدیکی نرم تواتری ناشی از فرکانسهای بدست آمده از روش المان مرزی به نرم تواتری ناشی از تواتری بدست آمده از روش اجزاء محدود است. از آنجائیکه تواترهای ناشی از زلزله بین ۱۰ هرتز در نقاط دور از مرکز زلزله تا ۳۰ هرتز در نقاط نزدیک به مرکز زلزله متغیر است لذا  $n$  برابر تعداد تواترهایی در نظر گرفته شده است که مقدار آنها کمتر از ۱۰ هرتز باشد [۱۰].

**معیار دوم:** معیار دیگری است که بیانگر مناسب بودن تابع شکل اختیار شده می باشد میزان انحراف کمتر تواترهای بدست آمده بوسیله روش BE<sup>۱۲</sup> از تواترهای بدست آمده از روش FE<sup>۱۳</sup> است به عبارت دیگر:

$$g_2(\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i^* \cdot \omega_i)^2}{n\omega_1^2}} \quad (30)$$

در این توابع،  $S$ ،  $t$  و  $W$  ضرایب ثابت و مشخص می باشند و  $n$  نیز یک عدد مثبت حقیقی است.  $r$  در دستگاه قطبی فاصله نقطه  $p$ ،  $Q$ ،  $r$  می باشد (در مساله کلویین  $p$  نقطه ای است که بار واحد در آن وارد شده است و  $Q$  نقطه است که تغییر مکانها در آن مورد نظر هستند). با انتخاب تابع شکل ماتریسهای  $\hat{u}$  و  $\hat{t}$  در رابطه (۱۹) با استفاده از معادله نویر (۱۲) و با کمک بردار گالرکین بدست می آیند [۹].

#### انتخاب تابع شکل مناسب

برای تعیین تابع شکل مناسب، دو معیار مورد نظر قرار گرفته است.

**معیار اول:** پس از تعیین تواتری ارتعاش آزاد سیستم با استفاده از توابع شکل مورد نظر، نرم<sup>۱۱</sup> تواتری مطابق رابطه (۲۹) تعریف می گردد.

$$g_1(\omega) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i^2} \quad (29)$$

جدول ۱: مقایسه پریودها و تواترهای ارتعاش آزاد بین روش المان مرزی و روش اجزاء محدود برای مساله اول.

روش اجزاء محدود			روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM			روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM		
			تابع شکل مرسوم $f(r) = 1+r$			تابع شکل پیشنهادی $f(r) = 601.0 + 1.1r + 0.7r^2 \ln(r)$		
شماره مود	تواتر ارتعاش آزاد	پریود ارتعاش آزاد	تواتر ارتعاش آزاد	پریود ارتعاش آزاد	درصد خطا در تواتر	تواتر ارتعاش آزاد	پریود ارتعاش آزاد	درصد خطا در تواتر
	(rad/sec)	(sec)	(rad/sec)	(sec)	%	(rad/sec)	(sec)	%
1	2.62	2.40	2.57	2.44	1.8	2.57	2.45	2.1
2	12.64	0.50	12.34	0.51	2.3	12.26	0.51	3.0
3	14.05	0.45	14.16	0.44	0.7	14.03	0.45	0.1
4	28.18	0.22	29.15	0.22	3.5	27.73	0.23	1.6
5	41.73	0.15	42.74	0.15	2.4	41.96	0.15	0.5
6	43.99	0.14	49.09	0.13	11.6	44.53	0.14	1.2
7	59.34	0.11	71.27	0.09	20.1	59.16	0.11	0.3
$\left[ \sum (\omega_i - \omega_{2i})^2 / \left( \sum \omega_{2i}^2 \right) \right]^{1/2}$			1.88			0.12		
$(\sum \omega_i^2)^{1/2}$			102.59			91.46		

تابع شکل پیشنهادی در این مساله بصورت  $f(r) = 601 + 1.1r + 0.7r^2 \ln(r)$  می باشد. کلیه اطلاعات مربوط به پریودها و تواترهای ارتعاش آزاد، درصد خطا در تواتر و ... در جدول (۱) آمده است.

**بیان مساله دوم:** در این مساله دیوار برشی شکل (۲) مورد بررسی قرار می گیرد کلیه خصوصیات فیزیکی مصالح همانند خصوصیات فیزیکی مصالح تعریف شده در مساله اول می باشد.

تابع پیشنهادی در این مساله بصورت  $f(r) = 1001.0 + 1.1r + 1.1r + 0.5r^2 \ln(r)$  می باشد. همچنین اطلاعات مربوط به ارتعاش آزاد سازه و مقدار خطاهای موجود در جدول (۲) آورده شده است.

**نتیجه گیری**

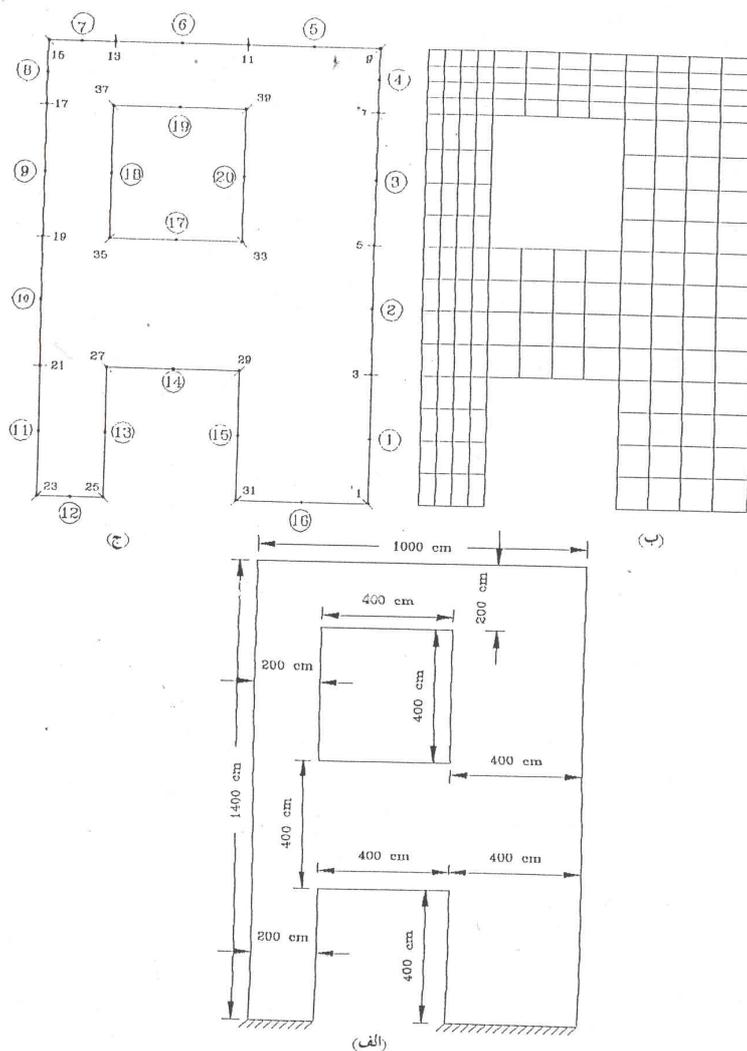
۱ - در روش تقابل دوگانه (DRM) توابع شکلی که مشتق آنها نسبت به  $r$ ، با افزایش یا کاهش مقدار  $r$  به سرعت افزایش یا کاهش پیدا می کند خطای بیشتری در تواترهای آزاد بدست خواهند داد.

که در آن  $\omega_i$  تواترهای بدست آمده از روش المان مرزی و  $\omega_i^*$  تواترهای بدست آمده از روش اجزاء محدود است و  $n$  تعداد کل مودهای در نظر گرفته شده است.

پس از بررسی توابع شکل یاد شده و مقایسه آنها با تابع شکل مرسوم در روش DRM  $(1+r)$  و نیز با استفاده از دو معیار مذکور، تابع شکل  $S + tr + wr^2 \ln(r)$  پیشنهاد شده که نحوه عملکرد این دو تابع شکل در مقایسه با روش اجزاء محدود در خلال دو مساله از نظر می گذرد. لازم به ذکر است که ضرایب  $t, S$  و  $w$  بستگی به شکل جسم دارند و از جسمی به جسم دیگر متفاوت می باشند که در هر مساله این ضرایب بوسیله عملیات سعی و خطا بدست می آیند.

**حل چند مساله**

**بیان مساله اول:** دیوار برشی شکل (۱) را در نظر بگیرید مدول برشی  $\mu = 2 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ ، جرم واحد حجم برابر  $\rho = 0.0025 \text{ kg/cm}^3$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.15$  در نظر گرفته شده است. رفتار دیوار برشی در حالت تنش مسطح بررسی می گردد.



شکل ۲: الف) مشخصات هندسی دیوار برشی (ضخامت ۳۰ cm)  
 ب) مدل المان بندی به روش اجزاء محدود با ۱۶۰ المان  
 ج) مدل المان بندی به روش المان مرزی با ۲۰ المان

آمده ناشی از تابع شکل  $1+r$  باشد. این ضریب بستگی به شکل سازه دارند و از یک سازه به سازه دیگر متفاوت می باشند.

۴ - یکی از خصوصیات مهمی که توابع شکل شعاعی موجود در روش تقابل دوگانه باید دارا باشند این است که اگر مقدار  $r$  به سمت صفر میل کند، مقدار تغییرمکانهای بدست آمده از معادله نویر با فرض بار حجمی برابر  $f(r)$  باید محدود باشند.

۲ - در تابع شکل  $\sqrt{r^2 + t^2}$  می توان با اضافه کردن جمله  $\frac{1}{3} \frac{t^4}{\sqrt{r^2 + t^2}}$  بدون آنکه در تواترهای بدست آمده تغییر محسوسی ایجاد گردد از بوجود آمدن انتگرالی که منجر به ایجاد سری می شود جلوگیری کرد. در بررسی های انجام شده همچنین بدست آمد که رفتار تابع مذکور بسیار شبیه رفتار تابع  $r+t$  است.

۳ - در بیشتر موارد با استفاده از تابع شکل  $s + tr + wr^2 \ln(r)$  ، ضرایب  $t, s$  و  $w$  را می توان بگونه ای یافت که تواترهای ارتعاش آزاد بدست آمده برای سیستم، دارای خطای کمتری نسبت به تواترهای بدست

جدول ۲: مقایسه پریودها و تواترهای ارتعاش آزاد بین روش المان مرزی و روش اجزاء محدود برای مساله دوم.

شماره مود	روش اجزاء محدود		روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM			روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM		
	تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	تابع شکل مرسوم $f(r) = 1+r$			تابع شکل پیشنهادی $f(r) = 1001.0 + 1.1r + 0.5r^2 \ln(r)$		
			تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	درصد خطا در تواتر (%)	تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	درصد خطا در تواتر (%)
1	2.91	2.158	2.91	2.156	0.1	2.91	2.159	0.1
2	8.01	0.784	8.49	0.740	6.0	8.20	0.766	2.4
3	8.78	0.716	9.13	0.688	4.0	9.03	0.696	2.9
4	12.65	0.497	12.76	0.492	0.9	12.28	0.512	2.9
5	14.71	0.427	15.39	0.408	4.6	14.92	0.421	1.4
6	21.76	0.289				21.46	0.293	1.4
7	22.48	0.280						
8	23.43	0.268	23.31	0.270	0.5			
9	26.61	0.236				26.70	0.235	0.3
10	27.24	0.231	27.85	0.226	2.2	27.89	0.225	2.4
11	29.17	0.215	30.98	0.203	6.2	30.08	0.209	3.1
12	32.60	0.193	31.63	0.199	3.0	33.46	0.188	2.6
13	37.54	0.167						
14	39.48	0.159				39.40	0.159	0.2
15	42.86	0.147				42.46	0.148	0.9

شماره مود	روش اجزاء محدود		روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM			روش المان مرزی با استفاده از تکنیک DRM		
	تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	تابع شکل مرسوم $f(r) = 1+r$			تابع شکل پیشنهادی $f(r) = 1001.0 + 1.1r + 0.5r^2 \ln(r)$		
			تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	درصد خطا در تواتر (%)	تواتر ارتعاش آزاد (rad/sec)	پریود ارتعاش آزاد (sec)	درصد خطا در تواتر (%)
16	46.26	0.136						
17	47.27	0.133				47.20	0.133	0.1
18	48.58	0.129						
19	50.07	0.125						
20	52.14	0.121				51.24	0.123	1.7
21	52.69	0.119	52.70	0.119	0.0	53.62	0.117	1.8
22	54.61	0.115						
23	57.21	0.110						
24	58.36	0.108	58.56	0.107	0.4			
25	59.72	0.105				59.57	0.105	0.3
26	61.14	0.103						
	$\left[ \sum (\omega_i - \omega_{2i})^2 / \left( n \omega_{21}^2 \right) \right]^{1/2}$		0.24			0.18		
	$\left( \sum \omega_i^2 \right)^{1/2}$	204.75	100.24			138.34		

مراجع

1 – Banerjee, P. K. (1981). *The boundary element methods in engineering*. MacGraw-Hill.  
 2 – Becker, A. A. (1992). *The boundary element methods in engineering*. MacGraw-Hill.  
 3 – Brebbia, C. A. and Paridage, P. W. (1985). “Advanced formulations in boundary element method.” *Computational Mechanics*.

- 4 – Agnantiaris, J. P., Polyzos, D. and Beskos, D. E. (1996). "Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis." *Computational Mechanics*, Vol. 17, PP. 270-277.
- 5 – Coleman, C. J. (1996). "One the use radial functions in the solution of elliptic boundary value problems." *Computational Mechanics*, Vol. 17, PP. 418-422.
- 6 – Golberg, M. A., Chen, C. S., Bowman, H. and Power, H. (1998). "Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method." *Computational Mechanics*, Vol. 22, PP. 61-69.
- 7 - Golberg, M. A., Chen, C. S., Bowman, H. (1999). "Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 23, No. 4, PP. 285-296.
- ۸ – مهرآیین، ش. "بررسی رفتار دیوارهای برشی بازشودار با استفاده از روش المان مرزی و تکنیک تقابل دوگانه." پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه تهران، (۱۳۷۹).
- 9 – Boresi, P. and Chang, K. P. (1987). *Elasticity in engineering mechanics*. Elsevier Science Publications.
- 10 – Naiem, F. (1989). *The seismic design handbook*. Von Nostrand Reinhold, NewYork.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Dual Reciprocity Method
- 2 – Functional Expansion
- 3 – Opening
- 4 – Boundary Element Method
- 5 – Fundamental Solution
- 6 – Traction
- 7 – Bett's Theory
- 8 – Navier
- 9 – Weighted-Residual
- 10 – Static Condensation
- 11 – Norm
- 12 – Boundary Element
- 13 – Finite Element