

# یک مدل اجزاء محدود غیرخطی برای محرکها و تیرهای کامپوزیتی هوشمند شده با لایه های آلیاژ حافظه دار

منصور محی الدین قمشه ای

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

نصرالله تابنده

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

فرامرز گردانی نژاد

استاد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده مهندسی - دانشگاه ایالتی نوادا - امریکا

(تاریخ دریافت ۸۳/۷/۱۱، تاریخ تصویب ۸۳/۱۲/۱۵)

## چکیده

در این مقاله یک مدل اجزاء محدود جامع برای تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار محرکها و تیرهای هوشمند با ساختار کامپوزیتی متشکل از المنتهای آلیاژ حافظه دار<sup>۱</sup> (SMA) تعبیه شده در یک ماده ماتریس و دارای درجات آزادی و قابلیت تحرک در سه بعد، ارائه شده است. بدلیل وجود تنشهای برشی و خیز نسبتاً بزرگ در این سازه‌ها، مدلسازی بر اساس یک تئوری پیشرفته برای تیرها و با فرض میدان کرنش غیر خطی ون-کارمن انجام گرفته است. برای رفتار ترمومکانیکی SMA از یک معادله مشخصه با ضرائب متغیر، به همراه معادلات سینتیک تبدیل فاز سینوسی استفاده بعمل آمده است. در این مقاله ابتدا فرم ضعیف معادلات تعادل و انرژی تعیین شده، و سپس بر اساس آن یک فرمولبندی اجزاء محدود غیر خطی برای این سازه‌های فعال استخراج گردیده است. این مدل اجزاء محدود قادر است محرکها و تیرهای کامپوزیتی SMA با هر شکل سطح مقطع را تحلیل نماید. البته این مدل محدود به حالتی است که در تیر پیچش ایجاد نمی شود. در مرحله آخر، این مدل F.E. بر روی مثال خاصی از این سازه‌ها اعمال شده و بکمک یک برنامه کامپیوتری تحلیل و نتایج عددی حاصله در نمودارهایی ارائه گردیده است. این نتایج عددی مؤید صحت و توانایی این مدل اجزاء محدود برای تحلیل پاسخ این نوع سازه‌های کامپوزیتی SMA می‌باشند.

**واژه‌های کلیدی:** آلیاژ حافظه دار - کامپوزیت - تیر ضخیم - محرک - روش اجزاء محدود غیر خطی

## مقدمه

تیرهای مرکب مسلح شده با مفتولهای از جنس نایتینول<sup>۲</sup> (نوعی آلیاژ حافظه دار از نیکل و تیتانیوم) ارائه نمودند. آنها نشان دادند که بار بحرانی کمانش در کنترل فعال تا سه برابر نسبت به حالت بدون کنترل افزایش می‌یابد. Lagoudas و Tadjbakhsh [۲] یک مدل محیط پیوسته سه بعدی برای تغییر شکل میله‌های استوانه ای که در آنها مفتولهای SMA تعبیه شده است، پیشنهاد نمودند. Wu [۳] یک فرمولاسیون اجزاء محدود بمنظور بررسی پاسخ گذرای صفحات کامپوزیتی تشکیل شده از یک لایه SMA که بر روی یک لایه الاستومری چسبانده شده است، پیشنهاد کرد. مؤلفان این مقاله برای پاسخ ایستای تیرهای سه بعدی با ساختار کامپوزیت SMA با تحریک حرارتی یک فرمولبندی بفرم صریح<sup>۴</sup> ارائه نمودند [۴].

امروزه مواد و سازه‌های هوشمند در بسیاری از شاخه‌های مهندسی و صنایع کاربردهای مهمی یافته‌اند. کامپوزیت‌های SMA دسته‌ای از مواد مرکب هوشمند می‌باشند که از تعبیه مفتول‌ها، نوارها و یا صفحات SMA در یک ماده ماتریس و یا چسبانیدن آنها بر روی ماتریس ساخته می‌شوند. از آنجا که آلیاژهای حافظه دار دارای قابلیت ایجاد نیروها و تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشند، کامپوزیت‌های SMA در صورت اعمال یک تحریک حرارتی قادرند که بعنوان نوعی محرک نیرو-جابجایی<sup>۲</sup> عمل نمایند. در دهه گذشته تحقیقات زیادی در زمینه مدلسازی رفتار فعال و غیر فعال سازه‌های کامپوزیت SMA بعمل آمده است. Baz و همکارانش [۱] یک فرمولاسیون اجزاء محدود برای کنترل فعال کمانش

می‌نمایند. هنگامیکه یکی از لایه‌های SMA با عبور جریان الکتریسیته بتدریج گرم می‌شود (گرمایش اهمی) و به تدریج به فاز آستنیت تبدیل می‌گردد. در نتیجه این تبدیل فاز کریستالی آلیاژ تمایل به بازیافت شکل اولیه اش پیدا می‌کند. بر اثر این بازیافت کرنش، تیر شروع به منحرف شدن بسمت لایه SMA تحریک شده می‌نماید، و بر ضد بارگذاری خارجی (در صورت وجود)، کار مکانیکی مثبت انجام می‌دهد. در این مدلسازی فرضیات زیر بانجام رسیده است:

- ۱- لایه‌های SMA به لایه ماتریس کاملاً چسبیده اند، و بین این لایه‌ها لغزش بوجود نمی‌آید. بدین ترتیب این مجموعه یک تیر ضخیم<sup>۲</sup> را تشکیل می‌دهند.
- ۲- لایه چسب بین لایه‌های SMA و لایه الاستومر دارای ضخامت ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود.
- ۳- اثر تنش‌های حرارتی در مقایسه با اثر تنش‌های ناشی از تبدیل فاز در لایه‌های SMA، ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است. البته اثر درجه حرارت در تبدیل فاز در لایه‌های SMA در نظر گرفته می‌شود.
- ۴- کرنش‌های ایجاد شونده در لایه ماتریس در محدوده الاستیک است. اما کرنش‌های ایجاد شونده در لایه‌های SMA در محدوده حد کرنش قابل بازیافت بعلاوه حد کرنش الاستیک در SMA می‌باشد.

### روابط سینماتیکی و مشخصه

در شکل (۱) شمائی از محرک SMA مورد مطالعه نمایش داده شده است. مختصات XYZ به گونه ای انتخاب شده است که صفحات XY و XZ منطبق بر دو صفحه میانی این تیر سه بعدی می‌باشند. با توجه به ایجاد تنش‌های برشی شدید در تیر و نیز فرض ضخیم بودن تیر، در اینجا از یک تئوری تیر مرتبه بالا<sup>۴</sup> ارائه شده توسط شخصی بنام Levinson، که شرط صفر بودن تنش‌های برشی در صفحات فوقانی و تحتانی را برقرار می‌سازد استفاده بعمل می‌آید [۵،۷]. بنا بر این میدان جابجایی برای این تیر سه بعدی با تساوی زیر بیان می‌گردد:

$$U = u + z \left[ \psi - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 (\psi + w_{,x}) \right] + y \left[ \chi - \frac{4}{3} \left( \frac{y}{h'} \right)^2 (\chi + v_{,x}) \right],$$

$$V = v,$$

$$W = w$$

(۱)

در این مقاله، مؤلفان در ادامه کارهای قبلی خود، یک مدل اجزاء محدود غیر خطی برای تعیین پاسخ گذرای سازه‌های تیر کامپوزیت SMA با قابلیت حرکت سه بعدی تحت اثر گرمایش اهمی پیشنهاد نموده اند. این فرمولبندی همچنین قادر به تحلیل رفتار غیر فعال سازه می‌باشد. این مدل اجزاء محدود بکمک یک برنامه کامپیوتری بر روی یک مثال ساده از این نوع سازه مرکب SMA اعمال شده و نتایج عددی حاصله بصورت نمودارهایی در بخش پایانی مقاله ارائه گردیده است.

### مدلسازی ریاضی

عملکرد محرک‌های SMA وابسته به یک ویژگی منحصر بفرد در آلیاژهای حافظه دار بنام "اثر حافظه شکل"<sup>۵</sup> یا "خاصیت بازیافت شکل" می‌باشد. این خاصیت به اختصار چنین تعریف می‌شود: اگر در یک قطعه SMA در دمای پایین تغییر شکل پلاستیک ایجاد شود، هنگامیکه SMA تا درجه حرارت معینی گرم شود شکل اولیه خود را بطور کامل باز می‌یابد. آلیاژ حافظه دار در هنگام بازیافت شکل اولیه اش قادر است ایجاد جابجایی یا نیرو، و یا ترکیبی از هر دو بنماید. این رفتار در آلیاژهای حافظه دار بر اثر یک تبدیل فاز کریستالی بنام "تبدیل فاز مارتنزیتی"<sup>۶</sup> بوجود می‌آید [۳].

محرک SMA مورد مطالعه دارای ساختار تیر کامپوزیتی بوده و متشکل است از یک بدنه یا ماتریس و المنت‌های SMA بفرم مفتول، نوار یا ورقه که در امتداد محور تیر در داخل ماتریس تعبیه شده و یا بر روی آن چسبانیده شده است. المنت‌های SMA وظیفه فعال نمودن سازه را دارند، در حالیکه ماده ماتریس وظیفه تحمل نیروها و ایجاد انسجام کل سازه را بعهده دارد. فرمولاسیون اجزاء محدود ارائه شده در این مقاله قابل بکارگیری برای محرک‌های SMA از این نوع با هر شکل سطح مقطع می‌باشد، اما در این مقاله بمنظور رعایت اختصار، مطالب در مورد محرک با شکل و مقطع نشان داده شده در شکل (۱) بیان می‌گردد. این محرک از چهار عدد نوار نازک SMA که به چهار طرف یک تیر الاستیک با مقطع مستطیلی (لایه ماتریس) چسبانیده شده است، تشکیل گردیده است. قبل از تعبیه لایه‌های SMA بر روی ماتریس، در این لایه‌ها در فاز مارتنزیت مقداری افزایش طول شبه پلاستیک (در حد کرنش قابل بازیافت SMA (یعنی کمتر از ۰.۷٪) ایجاد

مشخصه پیشنهاد شده توسط Brinson [۶] با خواص مادی متغیر استفاده بعمل می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_s \varepsilon_x + (E_s - E_{s0}) \varepsilon_0 + \Omega \xi_s - \Omega_0 \xi_{s0}, \\ \sigma_{xz} &= G_s \varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{xy} = G_s \varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (5)$$

که در آنها:

$$\begin{aligned}E_s &= E_A + \xi(E_M - E_A), \quad \Omega = -\varepsilon_L E_s, \\ G_s &= E_s / [2(1+\nu)]\end{aligned}\quad (6)$$

در معادلات فوق  $E_s, G_s$  مدول یانگ کششی و برشی آلیاژ حافظه دار،  $\Omega$  تانسور تبدیل فاز در SMA،  $\xi_s, \xi_s^0$  کسر مارتنزیت و کسر مارتنزیت ناشی از تنش،  $\varepsilon_0$  کرنش باقیمانده مارتنزیتی در لایه‌های SMA،  $\varepsilon_L$  حد کرنش قابل بازیافت در لایه‌های SMA،  $E_A, E_M$  بترتیب مدول یانگ مارتنزیت و آستنیت، و  $\nu$  ضریب پواسون میباشد. همچنین کمیت‌های مشخص شده با زیرنویس صفر مبین مقایر اولیه این کمیتها هستند. در تساویهای اخیر  $\xi_s^0$  و  $\xi_s$  با معادلات سینتیک تبدیل فاز در آلیاژ SMA بصورت توابعی از درجه حرارت و تنش مؤثر در آلیاژ تعریف می‌شوند. این معادلات در مرجع [۶] داده شده اند.

### استخراج معادلات تیر به روش انرژی

در اینجا از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل<sup>۱</sup> بمنظور استخراج معادلات حاکم بر این تیر مرکب استفاده بعمل می‌آید. این اصل با تساوی زیر بیان می‌گردد:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (7)$$

واریاسیون انرژی کرنشی با رابطه زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta \int_V \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + 2(1+\nu)(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{xy}^2)] dv \\ &= \int_0^L \int_A \frac{1}{E} [\sigma_x \delta \sigma_x + 2(1+\nu) \times \\ &\quad (\sigma_{xz} \delta \sigma_{xz} + \sigma_{xy} \delta \sigma_{xy})] dA dx\end{aligned}\quad (8)$$

با ترکیب تساویهای (۲)، (۴)، (۵) و (۸) و انجام انتگرالگیری بر روی سطح مقطع تیر، تساوی زیر حاصل می‌شود:

که در آن  $W, V, U$  جابجایی‌های کل محوری و عرضی،  $w, v, u$  جابجایی محوری و جابجایی‌های عرضی صفحات میانی،  $\psi, \chi$  چرخش کل مقطع بترتیب در صفحات xy و xz،  $h', h$  ضخامت کل تیر به ترتیب در امتداد محور z و محور y، و مشتق گیری نسبت به متغیرهای زیر نویس بشکل (۱)، [ ] نمایش داده شده است.

از آنجا که در این تیر مرکب خیزها و چرخش‌های نسبتاً بزرگ بوجود می‌آید، در این مدلسازی از میدان کرنش غیر خطی ون-کارمن<sup>۲</sup> استفاده می‌گردد [۷،۵]. بدین ترتیب مؤلفه‌های کرنش غیر صفر با تساویهای زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z \kappa_x^0 + z^3 \kappa_x^2 + y \rho_x^0 + y^3 \rho_x^2, \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{xz}^0 + z^2 \kappa_{xz}^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + y^2 \rho_{xy}^2\end{aligned}\quad (2)$$

که در آنها:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{2} v_{,x}^2, \\ \varepsilon_{xz}^0 &= \psi + w_{,x}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \chi + v_{,x}, \\ \kappa_x^0 &= \psi_{,x}, \quad \kappa_x^2 = -\frac{4}{3h^2} (\psi_{,x} + w_{,xx}), \\ \kappa_{xz}^2 &= -\frac{4}{h^2} (\psi + w_{,x}), \\ \rho_x^0 &= \chi_{,x}, \quad \rho_x^2 = -\frac{4}{3h'^2} (\chi_{,x} + v_{,xx}), \\ \rho_{xy}^2 &= -\frac{4}{h'^2} (\chi + v_{,x})\end{aligned}\quad (3)$$

در تساویهای فوق  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_x$  کرنش‌های نرمال و برشی،  $\varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_x^0$  کرنش‌های نرمال و برشی در صفحات میانی،  $\kappa_x^0, \rho_x^0$  انحناء تیر بترتیب در صفحات xy و xz،  $\kappa_x^2, \kappa_{xz}^2, \rho_x^2, \rho_{xy}^2$  انحناءهای مرتبه بالاتر در صفحات xy و xz میباشدند.

برای لایه ماتریس (مثلا نوعی الاستومر) روابط تنش-کرنش با معادلات هوک قابل بیان هستند:

$$\sigma_x = E_e \varepsilon_x, \quad \sigma_{xy} = G_e \varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{xy} = G_e \varepsilon_{xy}\quad (4)$$

در تساویهای اخیر  $\sigma_{xz}, \sigma_{xy}, \sigma_x$  تنش‌های نرمال و برشی،  $E_e, G_e$  مدول یانگ کششی و برشی الاستومر (ماده ماتریس) میباشدند. اما برای لایه‌های SMA از معادله

$$(S, S^*, S^{**}, S', S^{**'}) = \int_A G(1, z^2, z^4, y^2, y^4) dA \quad (11c)$$

همچنین مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{J}$  که ناشی از تبدیل فاز در لایه‌های SMA می‌باشد، از انتگرال زیر محاسبه می‌گردد:

$$(J_1, J_2, J_3, J_2', J_3') = \int_{A_s} \Lambda(1, z, z^3, y, y^3) dA \quad (11d)$$

که در آن:

$$\Lambda = E_s \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0} \xi_s\right) - E_{s0} \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon} \xi_{s0}\right) \quad (11e)$$

واریاسیون کار نیروهای خارجی  $\delta W$ ، با در نظر گرفتن یک بار گذاری کاملاً کلی شامل بارهای گسترده  $q_x, q_y, q_z$  در جهات محورهای  $x, y, z$  و نیز نیروها و ممان‌های متمرکز  $P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}, M_{yi}, M_{zi}$  اعمال شده بر  $n$  نقطه مختلف بر روی محور تیر بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta W = \int_0^L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dx + \sum_{i=1}^n (p_{xi} \delta u_i + p_{yi} \delta v_i + p_{zi} \delta w_i + M_{yi} \delta \psi_i + M_{zi} \delta \chi_i) \quad (12)$$

اکنون با جایگزینی از تساویهای (۹) و (۱۲) در معادله (۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L (N \delta \varepsilon_x^0 + M \delta \kappa_x^0 + P \delta \kappa_x^2 + Q \delta \varepsilon_{xz}^0 + R \delta \kappa_{xz}^2 + M' \delta \rho_x^0 + P' \delta \rho_x^2 + Q' \delta \varepsilon_{xy}^0 + R' \delta \rho_{xy}^2) dx - \int_0^L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dx - \sum_{i=1}^n (p_{xi} \delta u_i + p_{yi} \delta v_i + p_{zi} \delta w_i + M_{yi} \delta \psi_i + M_{zi} \delta \chi_i) = 0 \quad (13)$$

### مدل اجزاء محدود تیر

در این بخش یک فرمولبندی اجزاء محدود با متغیرهای اصلی جابجایی‌های تعمیم یافته<sup>۱۱</sup> بر اساس فرم

$$\delta U = \int_0^L (N \delta \varepsilon_x^0 + M \delta \kappa_x^0 + P \delta \kappa_x^2 + Q \delta \varepsilon_{xz}^0 + R \delta \kappa_{xz}^2 + M' \delta \rho_x^0 + P' \delta \rho_x^2 + Q' \delta \varepsilon_{xy}^0 + R' \delta \rho_{xy}^2) dx \quad (9)$$

که در آن منتجهای تنش  $P', M', P, M, N$  و  $R', Q', R, Q$  با انتگرالهای زیر تعریف می‌شوند:

$$(N, M, P, M', P') = \int_A \sigma_x(1, z, z^3, y, y^3) dA,$$

$$(Q, R) = \int_A \sigma_{xz}(1, z^2) dA,$$

$$(Q', R') = \int_A \sigma_{xy}(1, y^2) dA$$

(۱۰ a,b,c)

اکنون از ترکیب تساویهای (۲)، (۴)، (۵) و (۱۰) معادلات مشخصه تیر مطابق زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \\ M' \\ P' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & B' & E' \\ B & D & F & C & C^* \\ E & F & H & C^* & C^{**} \\ B' & C & C^* & D' & F' \\ E' & C^* & C^{**} & F' & H' \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_x^2 \\ \rho_x^0 \\ \rho_x^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_2' \\ J_3' \end{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \quad (11a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ R \\ Q' \\ R' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S & S^* & 0 & 0 \\ S^* & S^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & S' \\ 0 & 0 & S' & S^{**'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \kappa_{xz}^2 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \rho_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (11b)$$

در تساویهای اخیر درایه‌های ماتریس‌های ضرائب مؤلفه‌های مختلف سختی تیر بوده، و با انتگرالهای زیر تعریف می‌شوند:

$$(A, B, D, E, F, H) = \int_A E(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dA,$$

$$(B', D', E', F', H') = \int_A E(y, y^2, y^3, y^4, y^6) dA,$$

$$(C, C^*, C', C^{**}) = \int_A E(zy, zy^3, z^3y, z^3y^3) dA,$$

محیط به عنوان یک چاه حرارتی در فرآیند سرمایه‌گذاری و بازگشت محرک به وضعیت اولیه اش عمل می‌نماید. معادله دیفرانسیل توزیع گذرای دما بشکل زیر است:

$$C_{ps}T_{,t} - Q_s \xi_{,t} - k_s T_{,xx} - k_s T_{,yy} + H_c(T - T_\infty) = P_h \quad (16)$$

که در آن  $T$  درجه حرارت لایه SMA تحریک شده،  $T_\infty$  دمای هوای محیط،  $t$  زمان،  $C_{ps}$  ظرفیت حرارتی ویژه SMA،  $Q_s$  گرمای نهایی تبدیل فاز در SMA،  $k_s$  ضریب هدایت حرارتی SMA،  $H_c$  ضریب انتقال حرارت جابجایی،  $P_h$  دانسیته گرمایش اهمی در SMA میباشند. در معادله (16) جمله  $Q_s \xi_{,t}$  مبین انرژی ناشی از تبدیل فاز در SMA است [3]، و جمله  $H_c(T - T_\infty)$  گرمای تلف شده کل معادل انتقال حرارت جابجایی به هوای پیرامون می‌باشد. فرم ضعیف<sup>۱۵</sup> معادله دیفرانسیل (16) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\int_{\Omega} [(C_{ps} \Theta_{,t} - Q_s \xi_{,t} - P_h) \delta \Theta + \frac{1}{2} k_s \delta(\Theta_{,x}^2 + \Theta_{,y}^2) + \frac{1}{2} H_c \delta \Theta^2] dx dy - \int_{\Gamma} q_n \delta \Theta ds = 0 \quad (17)$$

که در آن  $\Theta = (T - T_\infty)$  بوده و  $q_n = k_s (\Theta_{,x} n_x + \Theta_{,y} n_y)$  درونیایی زیر که در آن توابع درونیایی لاگرانژی می‌باشد [8]:

$$\Theta^2(x, y, t) = \sum_{j=1}^n \Theta_j^e(t) \beta_j^e(x, y) \quad (18)$$

و نیز استفاده از تقریب خانواده  $\alpha$  برای گسسته نمودن نسبت به زمان در معادله (17)، به فرم کاملاً گسسته این معادله دست می‌یابیم:

$$[\hat{K}] \{\Theta^e\}^{s+1} = [\bar{K}] \{\Theta^e\}^s + \{\hat{F}\} \quad (19a)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [\hat{K}] &= [C^1] + \alpha \Delta t_{s+1} [C^2], \\ [\bar{K}] &= [C^1] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} [C^2], \\ \{\hat{F}\} &= \Delta t_{s+1} [\alpha \{F^4\}^{s+1} + (1 - \alpha) \{F^4\}^s] - [C^3] (\{\xi\}^{s+1} - \{\xi\}^s) \end{aligned} \quad (19b)$$

ضعیف معادلات تعادل (تساوی (13)) استخراج می‌گردد. جابجاییهای تعمیم یافته  $u, \psi, w, v, \chi$  با درونیاییهای زیر تقریب زده می‌شوند. (برای توضیحات بیشتر به مرجع [8] مراجعه شود):

$$\begin{aligned} u^e &= \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e, \quad \psi^e = \sum_{j=1}^n \psi_j^e N_j^e, \\ \chi^e &= \sum_{j=1}^n \chi_j^e N_j^e, \\ v^e &= \sum_{j=1}^m v_j^e \phi_j^e, \quad w^e = \sum_{j=1}^m w_j^e \phi_j^e \end{aligned} \quad (14)$$

که در آنها  $N_j^e$  مبین توابع شکل لاگرانژی<sup>۱۲</sup> از درجه  $n$  بوده، و ساده ترین آن یعنی به ازاء  $n=2$  تابع شکل لاگرانژی خطی نامیده می‌شود. همچنین  $\phi_j^e$  معرف توابع شکل هرمیت<sup>۱۳</sup> است که به ازاء  $m=4$  ساده ترین آنها یعنی تابع هرمیت مکعبی را خواهیم داشت.

با جایگزینی از تساویهای (14) در معادلات سینماتیکی (3)، و با جایگزینی تساویهای حاصله در معادله (13)، به دستگاه معادلات جبری نیرو-جابجایی زیر برای یک المان از تیر نائل می‌شویم:

$$[K^e] \{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (15)$$

که در آن  $[K^e]$  ماتریس سختی المان،  $\{F^e\}$  بردار نیروی تعمیم یافته، و  $\{\Delta^e\}$  بردار مقادیر گرهی جابجاییهای تعمیم یافته می‌باشد، یعنی:

$$\{\Delta^e\} = \{ \{u_1^e \ u_2^e\} \{v_1^e \ v_2^e \ v_3^e \ v_4^e\} \{ \chi_1^e \ \chi_2^e\} \{w_1^e \ w_2^e \ w_3^e \ w_4^e\} \{ \psi_1^e \ \psi_2^e\} \}$$

عبارات مربوط به درایه‌های ماتریس سختی و بردار نیروی تعمیم یافته در ضمیمه آورده شده‌اند. باید توجه داشت که مؤلفه‌های ماتریس سختی و بردار نیروی توابعی از جابجاییهای تعمیم یافته می‌باشند، و بنابراین معادله ماتریسی (15) غیر خطی و نامتقارن است و بایستی با یک روش افزایش پله‌ای<sup>۱۴</sup> حل شود.

## مدل اجزاء محدود پخش دما در SMA

همانطور که قبلاً اشاره گردید، فعال نمودن این محرک SMA با اعمال گرمایش اهمی (عبور جریان الکتریکی) به یک لایه SMA صورت می‌گیرد و هوای

۲- زمان جدید  $t_{s+1} = t_s + \Delta t_{s+1}$  را محاسبه کنید. سپس

تساوی (۲۰a) را برای  $\{\Theta^P\}^{s+1}$  حل نمایید.

۳- بردارهای  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$ ،  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  را با استفاده از معادلات سینتیک تبدیل فاز و با مقادیر بردارهای  $\{\Theta^P\}^{s+1}$ ،  $\{\sigma\}^s$  محاسبه نمایید.

۴- با استفاده از  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$ ، معادله (۱۹a) را برای  $\{\Theta\}^{s+1}$  حل کنید.

۵- با استفاده از  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$ ،  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  معادله (۱۵) را برای  $\{\Delta\}^{s+1}$  حل کنید. سپس بردار  $\{\sigma\}^{s+1}$  را به

کمک  $\{\Delta\}^{s+1}$ ،  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  و  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  بدست آورید

۶- بردارهای  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$ ،  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  را با استفاده از معادلات سینتیک تبدیل فاز و با مقادیر بردارهای  $\{\Theta\}^{s+1}$  و  $\{\sigma\}^{s+1}$  محاسبه کنید.

۷- همگرایی بردارهای  $(\{\xi_s^P\}^{s+1} - \{\xi_s^P\}^{s+1})$  و  $(\{\xi_s^P\}^{s+1} - \{\xi_s^P\}^{s+1})$  را بکمک یک معیار همگرایی بررسی نمایید. اگر معیار همگرایی برقرار بود، زمان را یک پله افزایش دهید و مراحل (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶) و (۷) را تکرار کنید. اما اگر معیار همگرایی برقرار نبود، تخمین‌های جدیدی برای  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  و  $\{\xi_s^P\}^{s+1}$  به کمک روش ریلکسیشن<sup>۱۷</sup> مطابق زیر بدست می‌آورید:

$$\{\xi_s^P\}^{s+1} = \{\xi_s\}^{s+1} + \lambda(\{\xi_s\}^{s+1} - \{\xi_s^P\}^{s+1}),$$

$$\{\xi_s^P\}^{s+1} = \{\xi_s\}^{s+1} + \lambda(\{\xi_s\}^{s+1} - \{\xi_s^P\}^{s+1})$$

سپس مراحل (۴)، (۵) و (۶) را تکرار کنید.

بمنظور انجام محاسبات عددی روش گام بگام ارائه شده در فوق، یک برنامه کامپیوتری بزبان MATLAB تهیه شده است. این برنامه برای مثال ساده ای از این نوع محرک SMA اجراء گردیده و نتایج عددی آن در بخش بعد ارائه شده است.

## نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی بدست آمده برای پاسخ آزاد (بدون بارگذاری خارجی) یک محرک SMA با شرایط مرزی یک سر گیردار- یک سر آزاد ارائه شده است. این محرک حالت خاصی از محرک سه بعدی نشان داده شده در شکل (۱) است، که در آن لایه‌های SMA جانبی حذف شده و یا به عبارت دیگر ضخامت این لایه‌ها برابر صفر در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب این محرک فقط در

در تساویهای اخیر:

$$C_{ij}^1 = \int_{\Omega^e} C_{ps} \beta_i \beta_j dx dy, \quad C_{ij}^2 = \int_{\Omega^e} (k_s \beta_{i,x} \beta_{j,x} + k_s \beta_{i,y} \beta_{j,y} + H_c \beta_i \beta_j) dx dy,$$

$$C_{ij}^3 = - \int_{\Omega^e} Q_s \beta_i \beta_j dx dy,$$

$$F^4 = \int_{\Omega^e} P_h \beta_i dx dy + \int_{\Gamma^e} \beta_i q_n ds$$
(۱۹c)

در اینجا لازم به ذکر است که معادلات (۱۵) و (۱۹a) بدلیل وجود  $\xi$  در هر دو آنها به یکدیگر کوبله می‌باشند. زیرا که  $\xi$  بر طبق روابط سینتیک تبدیل فاز در SMA تابع درجه حرارت و تنش (و در نتیجه تابع جابجاییهای تعمیم یافته) می‌باشد. حل این معادلات یک مسئله مقدار اولیه با گامهای زمانی<sup>۱۶</sup> است. یک روش برای مستقل نمودن این معادلات آن است که بجای  $\xi$  در تساویهای (۱۹) یک تابع تقریب به عنوان پردیکتور<sup>۱۷</sup> جایگزین گردد. یک تقریب مناسب برای  $\xi$  استفاده از مدل پاسخ آزاد (بدون ایجاد تنش) بصورت  $\xi = c_\theta \Theta + c_o$  برای سینتیک تبدیل فاز در SMA می‌باشد، که با جایگزینی از آن در معادلات (۱۹) به یک حل تقریبی  $\Theta^P$  برای توزیع دما دست مییابیم:

$$[\hat{K}^P] \{\Theta^{eP}\}^{s+1} = [\bar{K}^P] \{\Theta^{eP}\}^s + \{\hat{F}^P\}$$
(۲۰a)

که در آن:

$$[\hat{K}^P] = [C^1] + \alpha \Delta t_{s+1} [C^2] + c_\theta [C^3],$$

$$[\bar{K}^P] = [C^1] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1} [C^2] + c_\theta [C^3],$$

$$\{\hat{F}^P\} = \Delta t_{s+1} [\alpha \{F^4\}^{s+1} + (1 - \alpha) \{F^4\}^s]$$
(۲۰b)

## روش انجام محاسبات عددی

مراحل حل معادلات (۱۵) و (۱۹a) بشرح زیر است:

۱- در لحظه صفر (شروع گرمایش اهمی) بردارهای  $\{\xi_s^P\}^0$ ،  $\{\xi_s^P\}^0$ ،  $\{\Theta\}^0$  را برای جابجایی اولیه  $\{\Delta\}^0$  در تیر بر اثر بارهای مکانیکی حل کنید. بدین منظور بارگذاری خارجی را از صفر تا حداکثر مقدار آن بطور پله ای افزایش دهید و برای هر استپ معادله (۱۵) را حل نمایید. سپس بردار تنش موثر  $\{\sigma\}^0$  را محاسبه کنید.

ماتریس و ضخامت لایه SMA،  $\sigma_f^{cr}, \sigma_s^{cr}$  تنش‌های بحرانی تبدیل فاز در SMA،  $M_f, M_s$  دماهای شروع و خاتمه تبدیل به فاز مارتنزیتی،  $A_f, A_s$  درجه حرارت‌های شروع و خاتمه تبدیل فاز آستنیتی،  $C_A, C_M$  ثابت‌های ماده مربوط به اثر تنش بر تبدیل فاز،  $\rho_s$  جرم مخصوص SMA می‌باشد.

در این تحلیل تیر مرکب به پنج عدد المان تیر از نوع HSDBT و با طولهای یکسان تقسیم گردیده است، و استپ زمانی برای 5.1 ثانیه اول برابر 0.01 sec و برای بقیه برابر 0.001 sec انتخاب شده است.

در شکل (۲) تغییرات درجه حرارت لایه SMA تحریک شده با زمان در مقطع  $x = L/2$  نمایش داده شده است. از لحظه اعمال گرمایش اهمی ( $t=0$ ) درجه حرارت لایه SMA بصورت یک منحنی نمایی شروع به بالا رفتن می‌نماید. در لحظه  $t = 1.38$  sec که در آن تبدیل فاز آستنیتی کامل شده است (شکل (۳) را ببینید)، گرمایش اهمی قطع می‌گردد، و از این زمان به بعد لایه SMA شروع به سرد شدن میکند. در لحظه  $t = 1.79$  sec که تبدیل فاز به مارتنزیت در لایه SMA آغاز می‌شود، بدلیل آزاد شدن انرژی نهان تبدیل فاز، شیب نزولی دما تا حدی کاهش می‌یابد. این روند نزولی درجه حرارت تا رسیدن به دمای هوای محیط ادامه می‌یابد.

در شکل (۳) تغییرات کسرمارتنزیت و کسر مارتنزیت ناشی از تنش با زمان در لایه SMA تحریک شده در مقطع  $x = L/2$  نمایش داده شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود که از لحظه صفر تا  $t = 0.23$  sec کسر مارتنزیت و کسر مارتنزیت ناشی از تنش بدون تغییر در مقادیر اولیه خود (0.5, 1) باقی می‌مانند. در لحظه  $t = 0.23$  sec که درجه حرارت در لایه SMA به دمای  $A_s$  می‌رسد، مقادیر  $\xi$  و  $\xi_s$  شروع به کاهش یافتن می‌نمایند و این روند تا لحظه  $t = 1.38$  sec که در آن تبدیل فاز در لایه SMA کامل شده و مقادیر  $\xi$  و  $\xi_s$  هر دو معادل صفر می‌شوند ادامه می‌یابد، و درست در همین لحظه گرمایش اهمی قطع می‌شود و از آن به بعد لایه SMA شروع به سرد شدن می‌نماید. از لحظه قطع گرمایش تا زمان  $t = 1.79$  sec مقادیر  $\xi$  و  $\xi_s$  در مقدار صفر باقی می‌مانند و در این زمان که درجه حرارت در SMA به دمای شروع مارتنزیت در حالت تنیده شده ( $M_s^\sigma$ ) می‌رسد، مقادیر  $\xi$  و  $\xi_s$  در

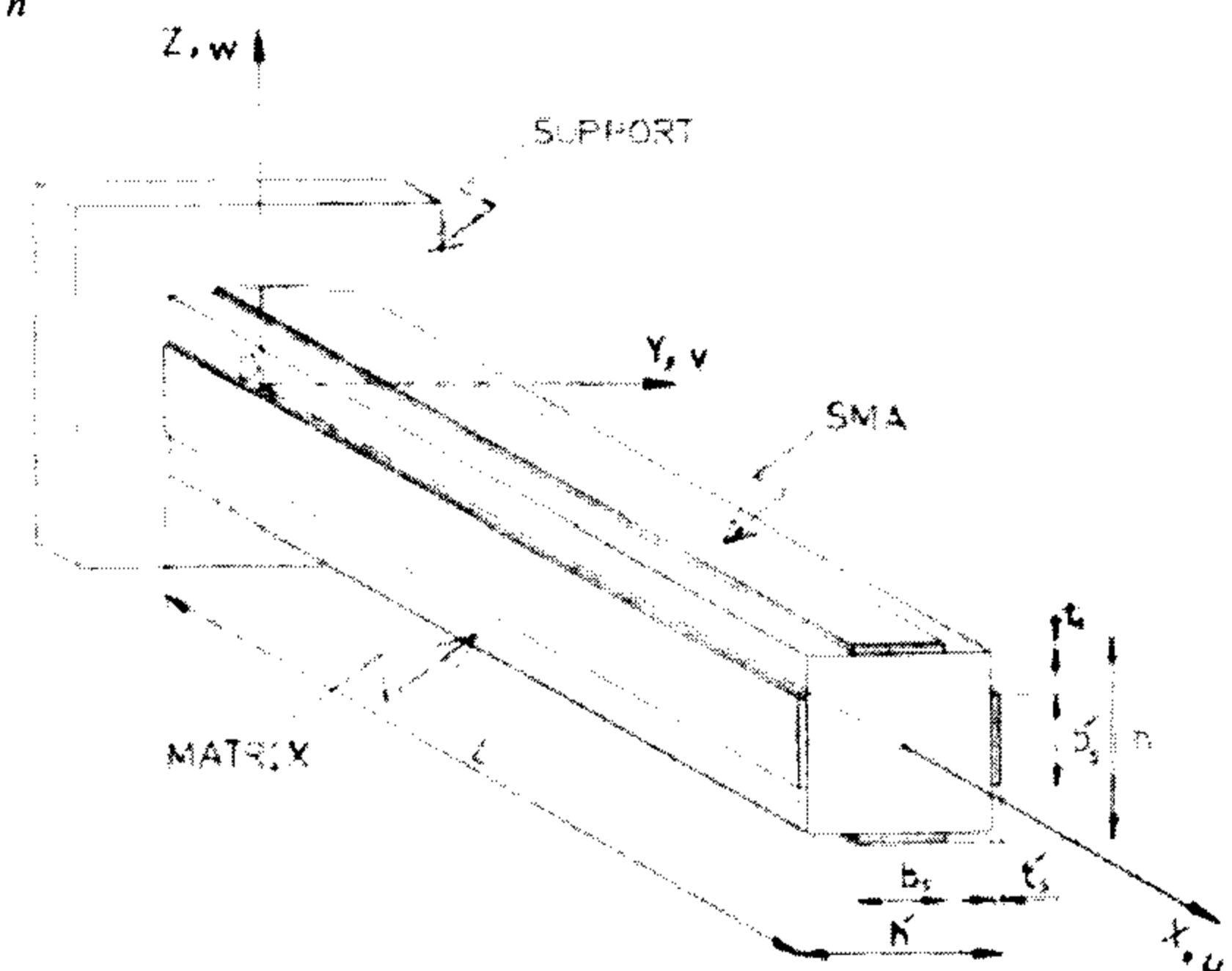
صفحه xz دارای قابلیت تحرک و اعمال نیرو می‌باشد. نتایج برای یک سیکل کامل گرمایش و سرمایش ارائه گردیده است. گرمایش اهمی فقط به لایه SMA سمت +z اعمال شده، و دقیقاً در لحظه ای که تبدیل فاز آستنیتی در این لایه کامل می‌گردد، با قطع مدار الکتریکی گرمایش قطع می‌شود، و از این لحظه به بعد با انتقال حرارت از این لایه به هوای محیط، سرمایش آغاز می‌گردد. ابعاد هندسی سازه، و خواص فیزیکی بکار رفته در این تحلیل به قرار زیراند:

ابعاد هندسی:

$$L = 99 \text{ mm}, b_e = 8 \text{ mm}, b_s = 4.75 \text{ mm}, \\ t_e = 2.85 \text{ mm}, t_s = .203 \text{ mm}$$

خواص فیزیکی:

$$E_e = 6000 \text{ MP}_a, \\ E_M = 26300 \text{ MP}_a, E_A = 67000 \text{ MP}_a, \\ \nu = 0.3, \varepsilon_0 = .0335, \varepsilon_L = .067, \\ \sigma_s^{cr} = 0, \sigma_f^{cr} = C_M (M_s - M_f), \\ M_f = 9^\circ \text{C}, M_s = 18.4^\circ \text{C}, \\ A_s = 34.5^\circ \text{C}, A_f = 49^\circ \text{C}, \\ C_M = 13.8 \text{ MP}_a / ^\circ \text{C}, C_A = 13.8 \text{ MP}_a / ^\circ \text{C}, \\ \rho_s = 6450 \text{ kg} / \text{m}^3, Q_s = 15.609 \text{ MJ} / \text{m}^3, \\ C_{PS} = 2.079 \text{ MJ} / \text{m}^3 \text{C}, k_s = 13. \text{ w} / \text{m}^\circ \text{C}, \\ T_\infty = 6^\circ \text{C}, H_c = 150. \text{ kw} / \text{m}^3 \text{C}, \\ P_h = 259.035 \text{ MW} / \text{m}^3$$

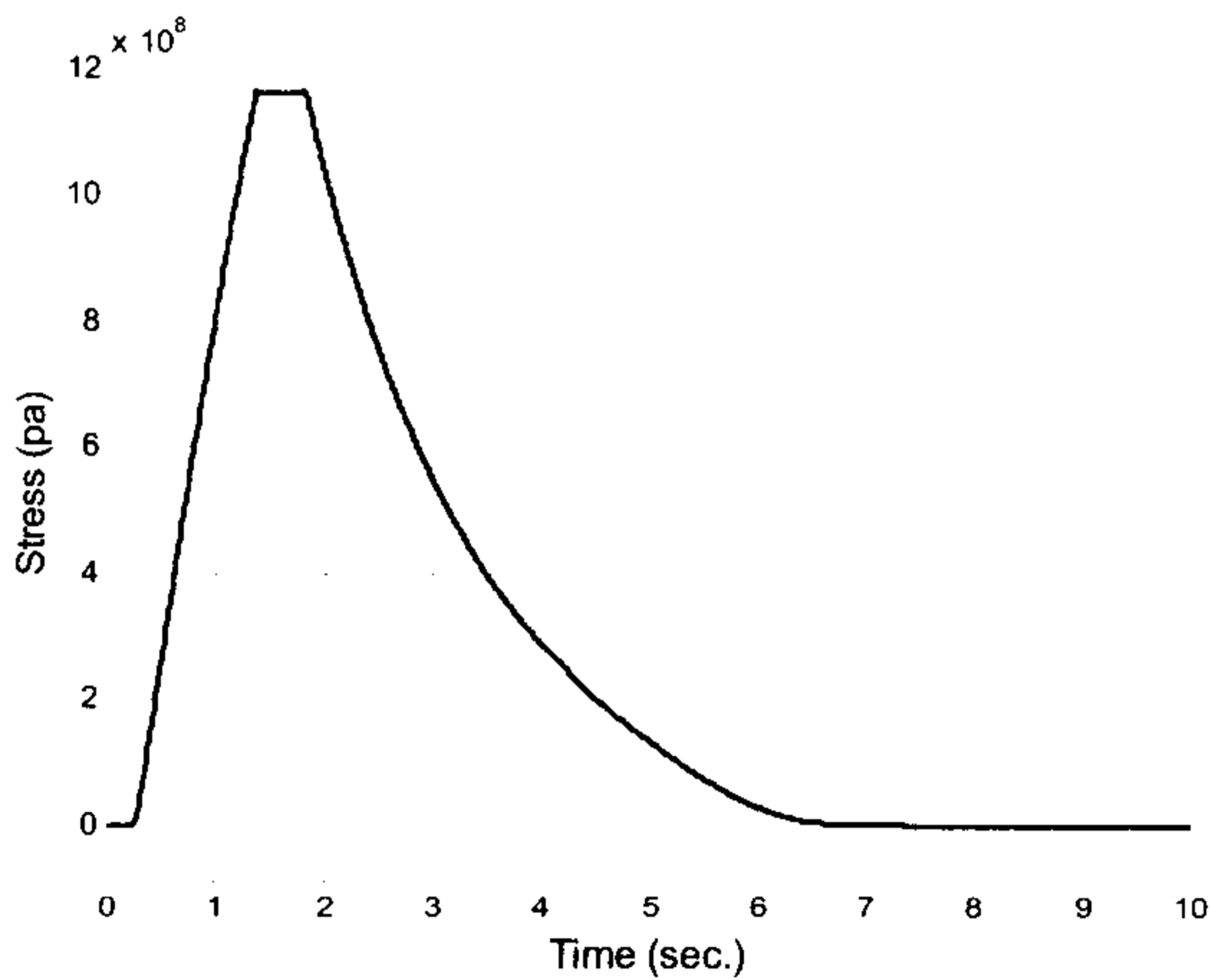


شکل ۱: شمای کلی محرک SMA.

در تساویهای فوق  $L$  طول محرک،  $b_s, b_e$  بترتیب پهنای لایه ماتریس و پهنای لایه SMA،  $t_s, t_e$  ضخامت لایه

می‌باشد، و از این زمان به بعد با شروع تبدیل فاز آستنیتی و ایجاد بازیافت کرنش در لایه SMA و بدلیل مقید بودن این لایه به ساختار تیر مرکب، در این لایه تنش ایجاد می‌گردد. مقدار این تنش هماهنگ با کاهش  $\epsilon_s$  و  $\epsilon_f$  در لایه افزایش، و با زیاد شدن آنها کاهش مییابد.

در شکل (۵) خیز عرضی محرک در زمانهای مختلف برای یک سیکل کامل گرمایش و سرمایش نمایش داده شده است.

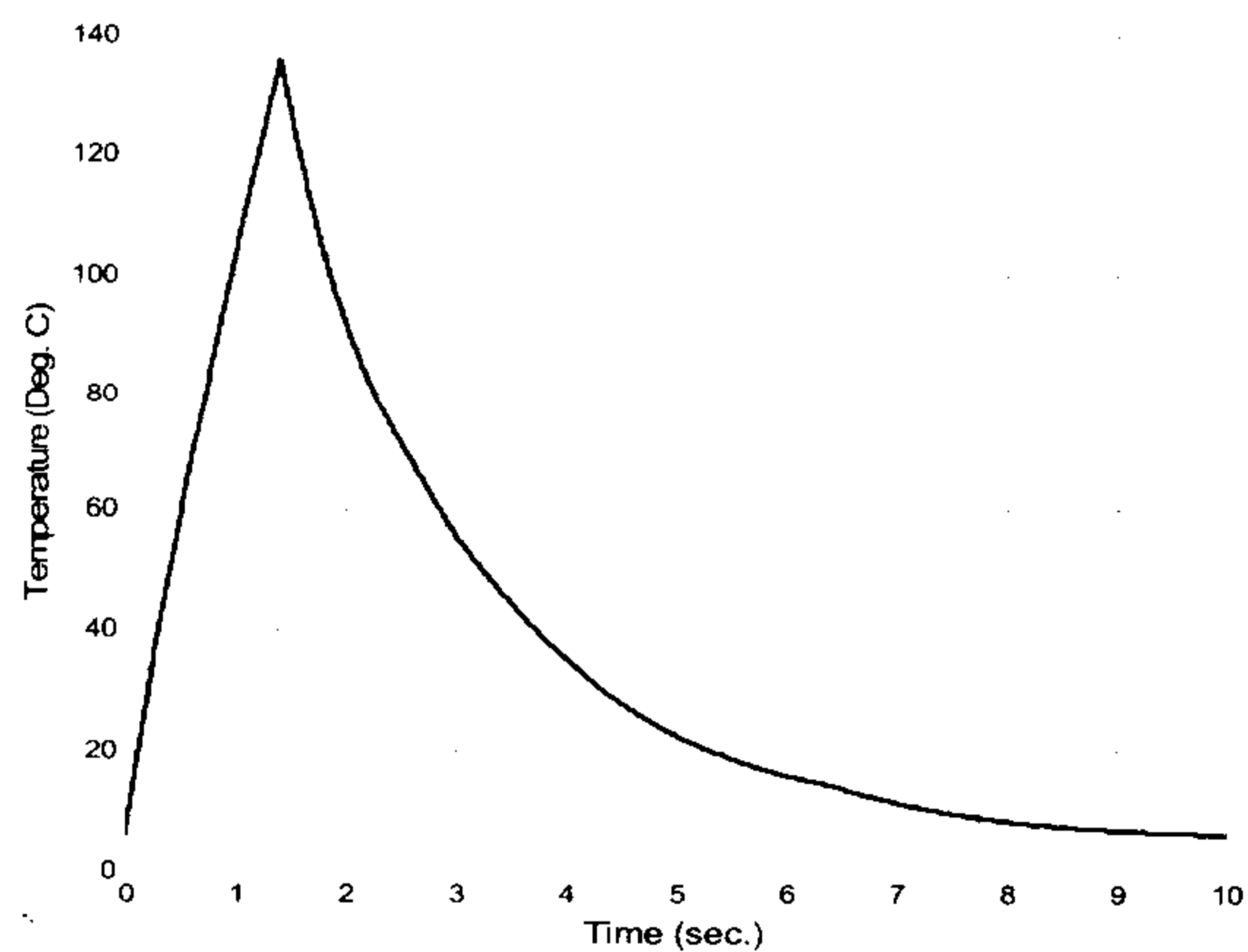


شکل ۴: تغییرات زمانی تنش در لایه SMA تحریک شده.

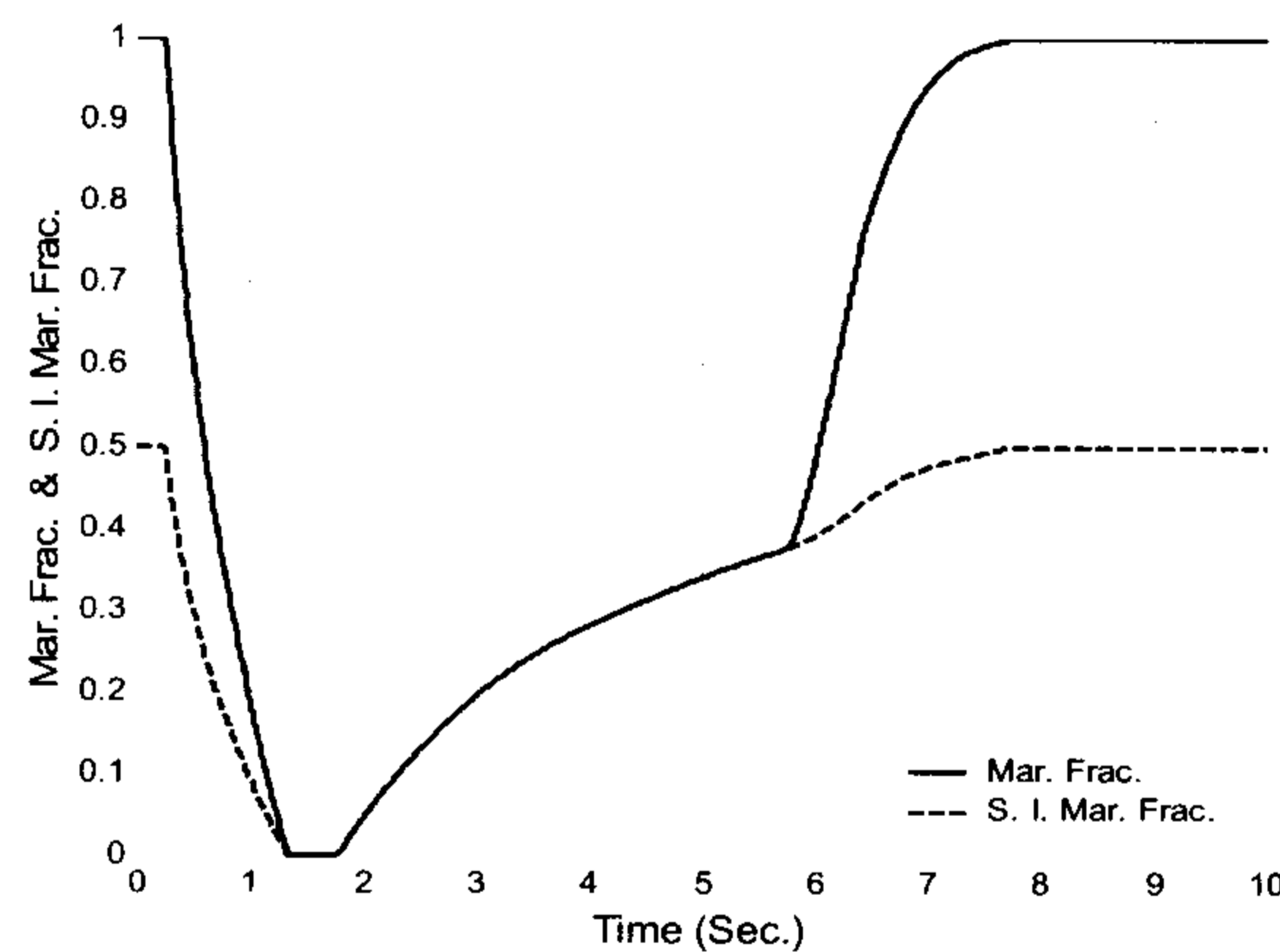
### بحث و نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل اجزاء محدود غیر خطی برای تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار محرکهای SMA با ساختار کامپوزیتی متشکل از لایه‌های آلیاژ حافظه دار تعبیه شده در یک ماده ماتریس و دارای درجات آزادی در سه بعد، ارائه گردید. این مدل اجزاء محدود قادر است رفتار فعال (با اعمال تحریک حرارتی) و غیر فعال (بدون تحریک حرارتی) این نوع سازه‌ها را تحلیل نماید. در این مدلسازی از یک تئوری تیر مرتبه بالا (درجه سه) به همراه فرض میدان کرنش ون-کارمن استفاده بعمل آمد. همچنین از یک معادله مشخصه با خواص مادی متغیر، که در آن کسر مارتنزیت بعنوان یک متغیر حالت جدید در نظر گرفته شده است، به همراه معادلات سینتیک تبدیل فاز سینوسی، بمنظور تبیین رفتار ترمومکانیکی آلیاژ حافظه دار استفاده گردید. بمنظور حل معادلات تعادل و انرژی بیان شده بفرم اجزاء محدود، یک روش گام به گام ارائه شد. این روش محاسبات عددی بر اساس متد تغییرات پله ای به همراه یک روش تکرار با مقادیر اولیه پردیکتور می‌باشد، بطوریکه برای هر استپ زمانی، یک حلقه تکرار تا برقرار شدن یک

لایه SMA با نرخ نسبتاً کمی شروع به افزایش می‌نماید. در لحظه  $t=6.4145$  sec که درجه حرارت به  $M_s$  می‌رسد، با شروع تولید مارتنزیت ناشی از دما نرخ زمانی تبدیل فاز مارتنزیتی افزایش می‌یابد و منحنی های  $\epsilon_s$  و  $\epsilon_f$  از یکدیگر جدا میشوند. اما در ادامه بدلیل آنکه منحنی کاهش دما به ناحیه مسطح خود نزدیک می‌گردد، مجدداً شیب رشد  $\epsilon_s$  و  $\epsilon_f$  ملایم گردیده و با نرخ نسبتاً کمی این کمیت‌ها به مقادیر نهایی خود (یعنی 0.5,1) نزدیک می‌گردند، و در لحظه  $t=7.744$  sec که درجه حرارت به دمای خاتمه مارتنزیت ( $M_f$ ) می‌رسد،  $\epsilon_s$  و  $\epsilon_f$  به مقادیر نهایی خود که همان مقادیر قبل از شروع گرمایش می‌باشد رسیده و از این زمان به بعد ثابت باقی می‌مانند.



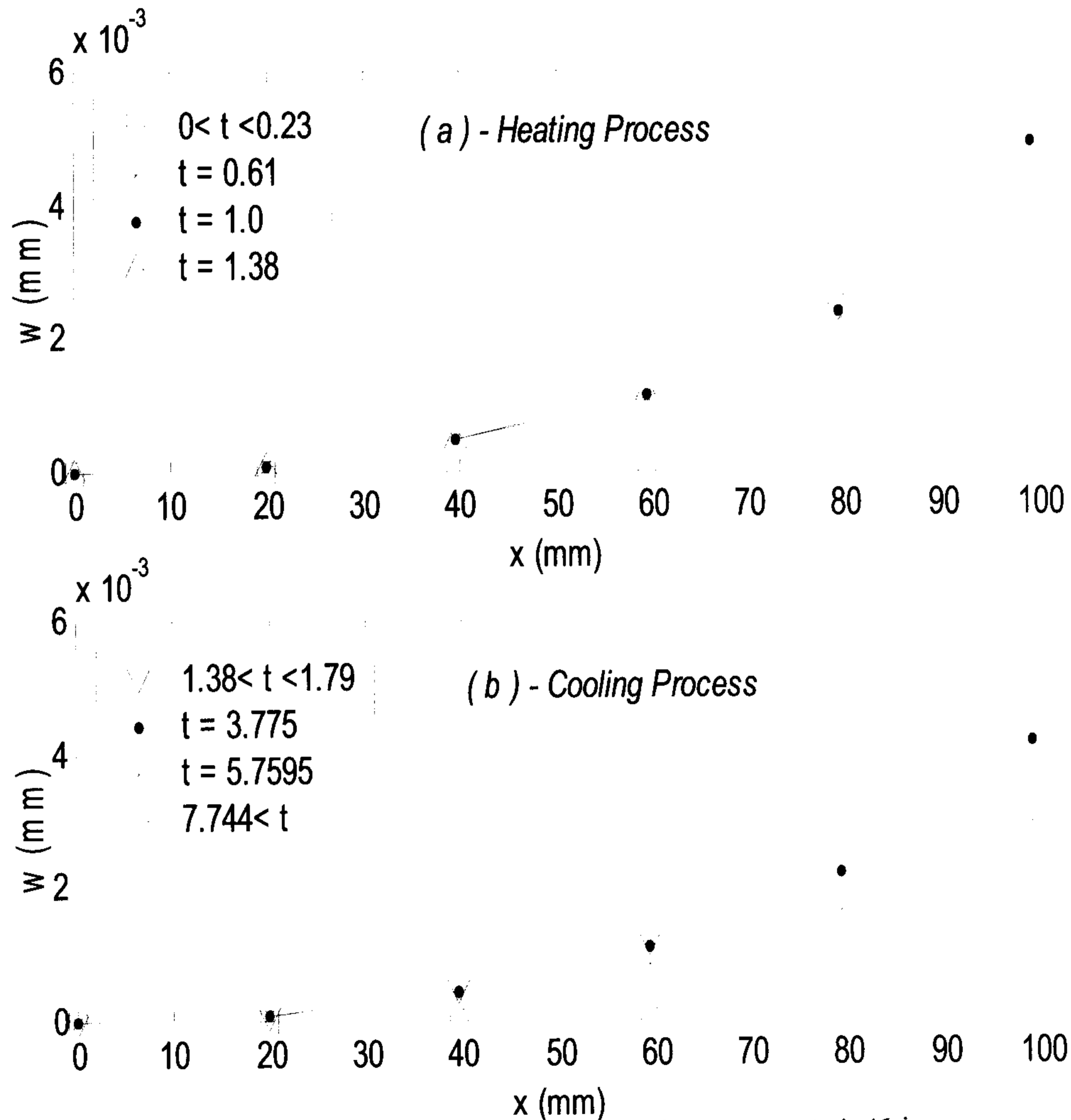
شکل ۲: تغییرات زمانی دما در لایه SMA تحریک شده.



شکل ۳: تغییرات زمانی  $\epsilon_s$  و  $\epsilon_f$  در لایه SMA تحریک شده.

در شکل (۴) تغییرات زمانی تنش مؤثر در وسط ضخامت لایه SMA تحریک شده در مقطع  $x = L/2$  نمایش داده شده است. همانطور که در این نمودار مشاهده می‌شود، تنش در این لایه تا قبل از لحظه  $t=0.23$ sec صفر





شکل ۵: خیز عرضی محرک در (a) فرایند گرمایش (b) فرایند سرمایش

### تشکر و قدردانی

این تحقیق بخشی از یک طرح پژوهشی تعریف شده در دانشکده فنی دانشگاه تهران است. لذا بدینوسیله مؤلفان مراتب تشکر و قدردانی خود را از حوزه معاونت پژوهشی این دانشگاه به سبب تامین اعتبار لازم برای انجام آن ابراز می‌دارد.

### فهرست علائم

$A, B, B'$ : سختی کششی و سختی‌های کوپلینگ  
 $A_s, A_f$ : درجه حرارت‌های شروع و خاتمه تبدیل فاز آستنیتی  
 $C, C^*, C^{**}, C''$ : سختی‌های کوپلینگ بین دو صفحه  $xz$  و  $xy$   
 $C_A, C_M$ : ثابت‌های ماده مربوط به اثر تنش بر تبدیل فاز  
 $C_{ps}$ : ظرفیت حرارتی ویژه SMA

شرط همگرایی تکرار می‌گردد.

بدین ترتیب این مدل اجزاء محدود غیر خطی و روش انجام محاسبات عددی مربوطه، از دقت بسیار بالایی برخوردار است.

در بخش آخر، این فرمولبندی اجزاء محدود بر روی مثال خاصی از این نوع محرک SMA با قابلیت تحرک صفحه ای و بصورت یک تیر یکسر گیردار در شرایط بدون بارگذاری خارجی، اعمال گردید و محاسبات عددی مربوطه بکمک یک برنامه کامپیوتری انجام و نتایج آن در نمودارهای مختلف ارائه شد. این نتایج عددی کاملاً با پاسخ‌های مورد انتظار از این سازه مطابقت دارند. مقایسه دقیق نتایج حاصله از این مدل اجزاء محدود با نتایج بدست آمده از آزمایشات، خود موضوع مقاله دیگری است که در آینده نزدیک توسط این مؤلفان ارائه خواهد شد.

$\delta$ : علامت واریاسیون  
 $\mathcal{E}_0$ : کرنش باقیمانده مارتنزیتی در لایه‌های SMA  
 $\mathcal{E}_L$ : حد کرنش قابل بازیافت در لایه‌های SMA  
 $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{xy}, \mathcal{E}_{xz}$ : کرنش‌های نرمال و برشی  
 $\mathcal{E}_x^0, \mathcal{E}_{xy}^0, \mathcal{E}_{xz}^0$ : کرنش‌های نرمال و برشی در صفحات میانی  
 $\phi_j^e$ : توابع درونیابی هرمیت یکبندی  
 $\kappa_x^0, \rho_x^0$ : انحنا و تیر بترتیب در صفحات  $xy$  و  $xz$   
 $\kappa_x^2, \kappa_{xz}^2, \rho_x^2, \rho_{xy}^2$ : انحناهای مرتبه بالاتر در صفحات  $xy$  و  $xz$   
 $U$ : ضریب پواسون  
 $\sigma_s^{cr}, \sigma_f^{cr}$ : تنش‌های بحرانی تبدیل فاز در SMA  
 $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ : تنش‌های نرمال و برشی  
 $\Omega$ : تانسور تبدیل فاز در SMA  
 $\xi_s, \xi_f$ : کسر مارتنزیت و کسر مارتنزیت ناشی از تنش  
 $\psi, \chi$ : چرخش کل مقطع بترتیب در صفحات  $xy$  و  $xz$

### بالا نویسیها

0: صفحه میانی  
 $e$ : المان  
 $s$ : استپ زمانی  
 $\dot{}$ : یکمرتبه مشتق‌گیری نسبت به زمان  
 $\ddot{}$ : دو مرتبه مشتق‌گیری نسبت به زمان

### زیر نویسیها

0: مقدار اولیه  
 $(\cdot)$ : مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای زیر نویس

$D, D'$ : سختی‌های خمشی  
 $E, F, H, E', F', H'$ : سختی‌های مرتبه بالاتر  
 $E_e, G_e$ : مدول یانگ کششی و برشی الاستومر (ماده ماتریس)  
 $E_A, E_M$ : مدول یانگ آستنیت و مارتنزیت  
 $H_c$ : ضریب انتقال حرارت جابجایی  
 $h, h'$ : ضخامت کل تیر به ترتیب در امتداد محورهای  $y$  و  $z$   
 $I_{ij}$ : لنگر اینرسی از درجه  $i$  ام نسبت به محور  $y$  ها و از درجه  $j$  ام نسبت به محور  $z$  ها  
 $k_s$ : ضریب هدایت حرارتی SMA  
 $N, M, P, Q, R, M', P', Q', R'$ : منتجه‌های تنش  
 $N_j^e$ : توابع درونیابی لاگرانژ یکبندی  
 $P$ : توان حرارتی  
 $P_h$ : دانسیته گرمایش اهمی در SMA  
 $p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, M_{yi}, M_{zi}$ : نیروها و ممان‌های متمرکز خارجی در نقطه  $i$  ام  
 $Q_s$ : گرمای نهایی تبدیل فاز در SMA  
 $q_x, q_y, q_z$ : شدت بارهای گسترده خارجی  
 $R$ : مقاومت الکتریکی لایه SMA  
 $S, S^*, S^{**}, S^*, S^{**}$ : سختی‌های برشی  
 $T$ : انرژی جنبشی  
 $T$ : درجه حرارت  
 $T_\infty$ : دمای چاه حرارتی  
 $t$ : زمان  
 $U, V, W$ : جابجایی‌های کل محوری و عرضی  
 $u, v, w$ : جابجایی محوری و جابجایی‌های عرضی  
 $v$ : ولتاژ تحریک لایه SMA

### نمادهای یونانی

$\beta_j^e$ : توابع درونیابی لاگرانژ دو بعدی

### مراجع

- 1 - Baz, A., Ro, J., Mutua, M. and Gilheany, J. (1991). "Active control of buckling of national reinforced composite beam." *Active Materials and Adaptive Structures Conference*, Arlington, VA, PP. 167-176.
- 2 - Lagoudas, D. C. L, and Tadjbakhsh, I. G. (1992). "Deformation of active flexible rods with embedded line actuators." *Recent Development in Stability, Vibration, and Control of Structural Systems*, AMD-Vol 167, PP. 89-106.

- 3 - Wu, W. (1996). *Modeling and Analysis of One and Two Dimensional Shape Memory Alloy-Elastomer Actuators*, Ph.D. Dissertation, Department of Mech. Eng., Univ. of Nevada.
- 4 - Ghomshei, M. M., Tabandeh, N., Ghazavi, A., and Gordaninejad, F. (2000). "Mathematical modeling and analysis of a novel shape memory alloy-elastomer composite actuator in plane steady conditions." *Proc. 5<sup>th</sup> Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME 2000*, Montreux, Switzerland. PP. 611-621.
- 5 - Heyliger, P. R. and Reddy, J. N. (1988). "A higher order beam finite element for bending and vibration problems." *J. of Sound and Vibration*, Vol. 126, No. 2, PP. 309-326.
- 6 - Brinson, L. C. (1992). "Constitutive behavior of shape memory alloys: one-dimensional thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable." *Proc., Conf. on Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications*.
- 7 - Ghazavi, A. and Gordaninejad, F. (1989) "Nonlinear bending of thick beams laminated from bimodular composite material." *Composites Science and technology*, 36, PP. 289-298.
- 8 - Reddy, J. N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*, Second Ed., McGraw-Hill, New York.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1- Shape Memory Alloy                 | 2 - Force-Displacement Actuator                  |
| 3 - Nitinol                           | 4 - Closed Form Solution                         |
| 5 - Shape Memory Effect               | 6 - Martensitic Transformation                   |
| 7 - Thick Beam                        | 8 - Higher Order Shear Deformation Beam Theory   |
| 9 - Von-Karman Strain Field           | 10- Principle of Minimum Total Potential Energy  |
| 11- Generalized Displacements         | 12- Lagrange Family of Interpolation Polynomials |
| 13 - Hermit Interpolation Polynomials | 14- Incremental Method                           |
| 15 - Weak Formulation                 | 16- Time Marching Initial Value Problem          |
| 17- Predictor                         | 18- Relaxation Method                            |

### ضمیمه

ماتریس سختی المان تیر بصورت زیر است:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & [K^{14}] & [K^{15}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] & [K^{24}] & [K^{25}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ [K^{41}] & [K^{42}] & [K^{43}] & [K^{44}] & [K^{45}] \\ [K^{51}] & [K^{52}] & [K^{53}] & [K^{54}] & [K^{55}] \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن درایه های  $[K_{ij}^{\alpha\beta}]$  از انتگرالهای زیر محاسبه می شوند:

$$K_{ij}^{1n} = \int_{x_A}^{x_B} \bar{A}_{1j}^{d_n} N_i' dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$K_{ij}^{2n} = \int_{x_A}^{x_B} [A_{1j}^{-d_n} (\sum v_k^e \phi_k') \phi_i' - \frac{4}{3h'^2} \bar{A}_{5j}^{d_n} \phi_i''] dx, \quad n = 1, 4, 5$$

$$K_{ij}^{2n} = \int_{x_A}^{x_B} [(\bar{A}_{1j}^{d_n} (\sum v_k^e \phi_k') + \bar{S}_{3j}^{d_n} - \frac{4}{h'^2} \bar{S}_{4j}^{d_n}) \phi_i' - \frac{4}{3h'^2} \bar{A}_{5j}^{d_n} \phi_i''] dx, \quad n = 2, 3$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{3n} &= \int_{x_A}^{x_B} (\bar{A}_{4j}^{d_n} - \frac{4}{3h'^2} \bar{A}_{5j}^{d_n}) N'_i dx, \quad n = 1, 4, 5 \\
K_{ij}^{3n} &= \int_{x_A}^{x_B} [(\bar{A}_{4j}^{d_n} - \frac{4}{3h'^2} \bar{A}_{5j}^{d_n}) N'_i + (\bar{S}_{3j}^{d_n} - \frac{4}{h'^2} \bar{S}_{4j}^{d_n}) N_i] dx, \quad n = 2, 3 \\
K_{ij}^{4n} &= \int_{x_A}^{x_B} [\bar{A}_{1j}^{d_n} (\sum w_k^e \phi'_k) \phi'_i - \frac{4}{3h^2} \bar{A}_{3j}^{d_n} \phi_i''] dx, \quad n = 1, 2, 3 \\
K_{ij}^{4n} &= \int_{x_A}^{x_B} [(\bar{A}_{1j}^{d_n} (\sum w_k^e \phi'_k) + \bar{S}_{1j}^{d_n} - \frac{4}{h^2} \bar{S}_{2j}^{d_n}) \phi'_i - \frac{4}{3h^2} \bar{A}_{3j}^{d_n} \phi_i''] dx, \quad n = 4, 5 \\
K_{ij}^{5n} &= \int_{x_A}^{x_B} (\bar{A}_{2j}^{d_n} - \frac{4}{3h^2} \bar{A}_{3j}^{d_n}) N'_i dx, \quad n = 1, 2, 3 \\
K_{ij}^{5n} &= \int_{x_A}^{x_B} [(\bar{A}_{2j}^{d_n} - \frac{4}{3h^2} \bar{A}_{3j}^{d_n}) N'_i + (\bar{S}_{1j}^{d_n} - \frac{4}{h^2} \bar{S}_{2j}^{d_n}) N_i] dx \quad n = 4, 5
\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آنها  $d_n$  مولفه  $n$  ام بردار  $\Delta = \{u, v, \chi, w, \psi\}$  است و ضرایب  $\bar{A}$ ،  $\bar{S}$  از تساویهای زیر تعیین میشوند:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{lj}^u &= A_{l1} N'_j, \\
\bar{A}_{lj}^v &= \frac{1}{2} A_{l1} (\sum v_k^e \phi'_k) \phi'_j - \frac{4}{3h'^2} A_{l5} \phi_j'', \quad \bar{A}_{lj}^\chi = (A_{l4} - \frac{4}{3h'^2} A_{l5}) N'_j, \\
\bar{A}_{lj}^w &= \frac{1}{2} A_{l1} (\sum w_k^e \phi'_k) \phi'_j - \frac{4}{3h^2} A_{l3} \phi_j'', \quad \bar{A}_{lj}^\psi = (A_{l2} - \frac{4}{3h^2} A_{l3}) N'_j, \\
\bar{S}_{lj}^v &= (S_{l3} - \frac{4}{h'^2} S_{l4}) \phi'_j, \quad \bar{S}_{lj}^\chi = (S_{l3} - \frac{4}{h'^2} S_{l4}) N_j, \\
\bar{S}_{lj}^w &= (S_{l1} - \frac{4}{h^2} S_{l2}) \phi'_j, \quad \bar{S}_{lj}^\psi = (S_{l1} - \frac{4}{h^2} S_{l2}) N_j
\end{aligned} \tag{۳}$$

در تساویهای فوق  $A_{lj}$  و  $S_{lj}$  معرف درایه (l,j) ام ماتریسهای سختی تیر بترتیب در تساویهای (۱۱a) و (۱۱b) می‌باشند. مؤلفه‌های بردار نیروی تعمیم یافته از تساویهای زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= - \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon_0 J_1 N'_i dx + \int_{x_A}^{x_B} q_x^e N_i dx + p_{xi}^e, \\
F_i^2 &= - \int_{x_A}^{x_B} [J_1 \varepsilon_0 (\sum v_k^e \phi'_k) \phi'_i - \frac{4}{3h'^2} J_5 \varepsilon_0 \phi_i''] dx + \int_{x_A}^{x_B} q_y^e \phi_i dx + p_{yi}^e, \\
F_i^3 &= - \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon_0 (J_4 - \frac{4}{3h'^2} J_5) N'_i dx + M_{zi}^e, \\
F_i^4 &= - \int_{x_A}^{x_B} [J_1 \varepsilon_0 (\sum w_k^e \phi'_k) \phi'_i - \frac{4}{3h^2} J_3 \varepsilon_0 \phi_i''] dx + \int_{x_A}^{x_B} q_z^e \phi_i dx + p_{zi}^e, \\
F_i^5 &= - \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon_0 (J_2 - \frac{4}{3h^2} J_3) N'_i dx + M_{yi}^e
\end{aligned} \tag{۴}$$

در تمامی عبارات فوق بمنظور رعایت اختصار علامت  $( )'$  جایگزین  $\frac{\partial}{\partial x}$  گردیده است.